Задачи. Найти асимптоту кривой (правую $x \to \infty$)

1). $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$; 2). $y = \dfrac{x^2}{x-1}$;

3). $y = \dfrac{x^2+1}{2x+3}$; 4). $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;

Задача. Найти асимптоты кривой

а) правую асимптоту : k_1; b_1 (при $x \to \infty$).

б) левую асимптоту : k_2; b_2 (при $x \to -\infty$).

5). $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$;

1. Дано: $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$; **Найти : k ; b .**

Решение. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2} = x + \dfrac{4}{x^2}$; $\alpha(x) = \dfrac{4}{x^2}$; $k = 1$; $b = 0$.

2. Дано: $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$; **Найти : k ; b .**

Решение. $y = \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{x^2 - 1 + 1}{x - 1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$;

$\alpha(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $k = 1$; $b = 1$.

3. Дано: $y = \dfrac{x^2+1}{2x+3}$; **Найти : k ; b .**

Решение.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1+1/x^2)}{x^2(2+3/x)} = \frac{1}{2} \;;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - k\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x+3} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2-2x^2}{2(2x+3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-3x}{4x+6} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(-3+2/x)}{x(4+6/x)} = -\frac{3}{4}$$

Ответ : k = 1 / 2 ; b = -3 / 4 .

4. Дано: $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$; **Найти : k ; b .**

Решение.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2(1 + 2/x + 1/x^2)} = \frac{1}{2} \;;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - k\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x}{(x+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2+1/x)}{x^2(1+2/x+1/x^2)} = -1\ .$$

Ответ : k = 1 / 2 ; b = -1 .

5. Дано: $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$;

Найти :

а) правую асимптоту : k_1 ; b_1 (при $x \to \infty$).

б) левую асимптоту : k_2 ; b_2 (при $x \to -\infty$).

Решение.

а) Правая асимптота ($x \to \infty$)

$$k_1 = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^3}{(x-2)x^2}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 1 \ ;$$

$$b_1 = \lim_{x\to\infty}\left[\mathbf{f(x)} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - \mathbf{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x-2}} - \mathbf{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1\right)\right];$$

$$\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})\sqrt{x-2}} =$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})\sqrt{x-2}} = \frac{2}{x(1 + \sqrt{1-2/x})\sqrt{1-2/x}};$$

$$b_1 = \lim_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}-1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{x(1+\sqrt{1-2/x})\sqrt{1-2/x}}\right] = 1\ ;$$

Ответ : $k_1 = 1$; $b_1 = 1$.

б) Левая асимптота (x → - ∞)

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \sqrt{\frac{x^2 x}{x-2}}\ ; \quad k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2 x}{(x-2)}}}{x}\ ;$$

Замена: $z=-x$; *если* $x\to-\infty$ *то* $z\to\infty$

$$k_2=\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{-zz^2}{(-z-2)}}}{-z}=-\lim_{z\to\infty}\sqrt{\frac{-zz^2}{(-z-2)z^2}}=$$

$$=-\lim_{z\to\infty}\sqrt{\frac{z}{(z+2)}}=-1\,.$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} \left[\mathbf{f(x)} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} \right] = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right)$$

$$\textit{Замена}: \; z = -x \; ; \; \textit{если} \; x \to -\infty \; \textit{то} \; z \to \infty$$

$$b_2 = \lim_{z \to \infty} \left(\sqrt{\frac{-zz^2}{-z-2}} - z \right) = \lim_{z \to \infty} z\sqrt{\frac{z}{z+2}} - z =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \left[z \left(\sqrt{\frac{z}{z+2}} - 1 \right) \right]$$

$$\sqrt{\frac{z}{z+2}}-1=\frac{\sqrt{z}-\sqrt{z+2}}{\sqrt{z+2}}=\frac{\left(\sqrt{z}-\sqrt{z+2}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{z+2}\right)}{\sqrt{z+2}\left(\sqrt{z}+\sqrt{z+2}\right)}=$$

$$=\frac{-2}{z\sqrt{1+2/z}\left(1+\sqrt{1+2/z}\right)}\;;$$

$$b_2 = \lim_{z\to\infty}\left[z\left(\sqrt{\frac{z}{z+2}}-1\right)\right]=$$

$$=\lim_{z\to\infty}\frac{-2z}{z\sqrt{1+2/z}\left(1+\sqrt{1+2/z}\right)}=-1\ ;$$

Ответ : k_2 = - 1 ; b_2 = - 1 .