

**Задачи. Найти асимптоту кривой (правую  $x \rightarrow \infty$ )**

1) .  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$  ;      2) .  $y = \frac{x^2}{x-1}$  ;

3) .  $y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}$  ;      4) .  $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$  ;

**Задача. Найти асимптоты кривой**

а) правую асимптоту :  $k_1$  ;  $b_1$  (при  $x \rightarrow \infty$  ).

б) левую асимптоту :  $k_2$  ;  $b_2$  (при  $x \rightarrow -\infty$  ).

5) .  $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$  ;

1. Дано:  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$  ; Найти :  $k$  ;  $b$  .

Решение.  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}$  ;  $\alpha(x) = \frac{4}{x^2}$  ;  $k = 1$  ;  $b = 0$  .

2. Дано:  $y = \frac{x^2}{x-1}$  ; Найти :  $k$  ;  $b$  .

Решение.  $y = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$  ;

$\alpha(x) = \frac{1}{x-1}$  ;  $k = 1$  ;  $b = 1$  .

3. Дано:  $y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}$  ; Найти :  $k$  ;  $b$  .

Решение.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 + 1/x^2)}{x^2(2 + 3/x)} = \frac{1}{2} ;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - k \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{2x + 3} - \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2 - 2x^2}{2(2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x}{4x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(-3 + 2/x)}{x(4 + 6/x)} = -\frac{3}{4}$$

Ответ :  $k = 1 / 2$  ;  $b = -3 / 4$  .

4. Дано:  $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$  ; Найти : k ; b .

Решение.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2(1 + 2/x + 1/x^2)} = \frac{1}{2} ;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - k \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{(x+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 + 1/x)}{x^2(1 + 2/x + 1/x^2)} = -1.$$

**Ответ :  $k = 1 / 2 ; b = -1 .$**

5. Дано:

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} ;$$

**Найти :**

**а) правую асимптоту :  $k_1$  ;  $b_1$  (при  $x \rightarrow \infty$  ).**

**б) левую асимптоту :  $k_2$  ;  $b_2$  (при  $x \rightarrow -\infty$  ).**

**Решение.**

**а) Правая асимптота ( $x \rightarrow \infty$ )**

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3}{(x-2)x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 1 ;$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - k_1 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \sqrt{\frac{x}{x-2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \left( \sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) \right];$$

$$\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})\sqrt{x-2}} =$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})\sqrt{x-2}} = \frac{2}{x(1 + \sqrt{1 - 2/x})\sqrt{1 - 2/x}};$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \left( \sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) \right] =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x}{x(1 + \sqrt{1 - 2/x})\sqrt{1 - 2/x}} \right] = 1 ;$$

**Ответ :  $k_1 = 1 ; b_1 = 1 .$**

**б) Левая асимптота ( $x \rightarrow -\infty$ )**

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \sqrt{\frac{x^2 x}{x-2}} ; \quad k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2 x}{(x-2)}}}{x} ;$$



Замена :  $z = -x$  ; если  $x \rightarrow -\infty$  то  $z \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{-zz^2}{(-z-2)}}}{-z} = - \lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{-zz^2}{(-z-2)z^2}} = \\ &= - \lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{z}{z+2}} = -1. \end{aligned}$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right)$$

*Замена:  $z = -x$ ; если  $x \rightarrow -\infty$  то  $z \rightarrow \infty$*

$$\begin{aligned} b_2 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{-zz^2}{-z-2}} - z \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \sqrt{\frac{z}{z+2}} - z = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ z \left( \sqrt{\frac{z}{z+2}} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{z}{z+2}} - 1 &= \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z+2}}{\sqrt{z+2}} = \frac{(\sqrt{z} - \sqrt{z+2})(\sqrt{z} + \sqrt{z+2})}{\sqrt{z+2}(\sqrt{z} + \sqrt{z+2})} = \\ &= \frac{-2}{z\sqrt{1+2/z}(1+\sqrt{1+2/z})};\end{aligned}$$

$$b_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ z \left( \sqrt{\frac{z}{z+2}} - 1 \right) \right] =$$
$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-2z}{z\sqrt{1+2/z} \left( 1 + \sqrt{1+2/z} \right)} = -1 ;$$

**Ответ :  $k_2 = -1 ; b_2 = -1 .$**