# Задачи. Найти асимптоту кривой (правую $x \to \infty$)

1). $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$; 2). $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$;

3). $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x + 3}$; 4). $y = \dfrac{x^3}{2(x + 1)^2}$;

# Задача. Найти асимптоты кривой

а) правую асимптоту : $k_1$; $b_1$ (при $x \to \infty$).

б) левую асимптоту : $k_2$; $b_2$ (при $x \to -\infty$).

5). $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x - 2}}$;

**<u>1. Дано</u>:** $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$ ; **Найти : k ; b .**

**Решение.** $y = \dfrac{x^3+4}{x^2} = x + \dfrac{4}{x^2}$ ; $\alpha(x) = \dfrac{4}{x^2}$ ; $k = 1$ ; $b = 0$ .

**<u>2. Дано</u>:** $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ ; **Найти : k ; b .**

**Решение.** $y = \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{x^2-1+1}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ ;

$\alpha(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ; $k = 1$ ; $b = 1$ .

**3. Дано:** $y = \dfrac{x^2+1}{2x+3}$ ; **Найти : k ; b .**

**Решение.**

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1+1/x^2)}{x^2(2+3/x)} = \frac{1}{2} \;;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - k\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x+3} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2-2x^2}{2(2x+3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-3x}{4x+6} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(-3+2/x)}{x(4+6/x)} = -\frac{3}{4}$$

**Ответ : k = 1 / 2 ; b = -3 / 4 .**

**4. Дано:** $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ ; Найти : k ; b .

**Решение.**

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ \frac{x^2}{x^2(1+2/x+1/x^2)}=\frac{1}{2}\ ;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - k\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ \frac{2x^2 + x}{(x+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ \frac{x^2(2+1/x)}{x^2(1+2/x+1/x^2)} = -1\ .$$

**Ответ : k = 1 / 2 ; b = -1 .**

**<u>5. Дано</u>:** $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$ ;

**Найти :**

**а) правую асимптоту : $k_1$ ; $b_1$ (при $x \to \infty$ ).**

**б) левую асимптоту : $k_2$ ; $b_2$ (при $x \to -\infty$ ).**

**Решение.**

**а) Правая асимптота ($x \to \infty$)**

$$k_1 = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^3}{(x-2)x^2}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 1 \; ;$$

$$b_1 = \lim_{x\to\infty}\left[\mathbf{f(x)} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - \mathbf{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x-2}} - \mathbf{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1\right)\right];$$

$$\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})\sqrt{x-2}} =$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})\sqrt{x-2}} = \frac{2}{x(1 + \sqrt{1-2/x})\sqrt{1-2/x}};$$

$$b_1 = \lim_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}-1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{x(1+\sqrt{1-2/x})\sqrt{1-2/x}}\right] = 1\ ;$$

**Ответ : $k_1 = 1$ ; $b_1 = 1$ .**

**б) Левая асимптота (x → - ∞)**

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \sqrt{\frac{x^2 x}{x-2}}\ ; \qquad k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^2 x}{(x-2)}}}{x}\ ;$$

$$\text{Замена}: \; z = -x \;; \; \text{если } x \to -\infty \text{ то } z \to \infty$$

$$\mathbf{k}_2 = \lim_{z \to \infty} \frac{\sqrt{\dfrac{-zz^2}{(-z-2)}}}{-z} = -\lim_{z \to \infty} \sqrt{\frac{-zz^2}{(-z-2)z^2}} =$$

$$= -\lim_{z \to \infty} \sqrt{\frac{z}{(z+2)}} = -1 \,.$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} \left[ \mathrm{f(x)} - \mathrm{k}_2 \cdot \mathrm{x} \right] = \lim_{x \to -\infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right)$$

$$\textit{Замена}: \; z = -x \; ; \; \textit{если} \; x \to -\infty \; \textit{то} \; z \to \infty$$

$$b_2 = \lim_{z \to \infty} \left( \sqrt{\frac{-zz^2}{-z-2}} - z \right) = \lim_{z \to \infty} z\sqrt{\frac{z}{z+2}} - z =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \left[ z \left( \sqrt{\frac{z}{z+2}} - 1 \right) \right]$$

$$\sqrt{\frac{z}{z+2}}-1=\frac{\sqrt{z}-\sqrt{z+2}}{\sqrt{z+2}}=\frac{\left(\sqrt{z}-\sqrt{z+2}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{z+2}\right)}{\sqrt{z+2}\left(\sqrt{z}+\sqrt{z+2}\right)}=$$

$$=\frac{-2}{z\sqrt{1+2/z}\left(1+\sqrt{1+2/z}\right)}\;;$$

$$b_2 = \lim_{z\to\infty}\left[z\left(\sqrt{\frac{z}{z+2}}-1\right)\right] =$$

$$= \lim_{z\to\infty}\frac{-2z}{z\sqrt{1+2/z}\left(1+\sqrt{1+2/z}\right)} = -1\ ;$$

**Ответ : $k_2$ = - 1 ; $b_2$ = - 1 .**