Задачи. Найти асимптоту кривой (правую $x \to \infty$)

1). $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$; 2). $y = \dfrac{x^2}{x-1}$;

3). $y = \dfrac{x^2+1}{2x+3}$; 4). $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;

Задача. Найти асимптоты кривой

а) правую асимптоту : k_1 ; b_1 (при $x \to \infty$).

б) левую асимптоту : k_2 ; b_2 (при $x \to -\infty$).

5). $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$;

<u>1. Дано</u>: $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$; **Найти : k ; b .**

Решение. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}$; $\alpha(x) = \frac{4}{x^2}$; $k = 1$; $b = 0$.

<u>2. Дано</u>: $y = \frac{x^2}{x - 1}$; **Найти : k ; b .**

Решение. $y = \frac{x^2}{x - 1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$;

$\alpha(x) = \frac{1}{x - 1}$; $k = 1$; $b = 1$.

3. Дано: $y = \dfrac{x^2+1}{2x+3}$; **Найти : k ; b .**

Решение.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1+1/x^2)}{x^2(2+3/x)} = \frac{1}{2} \;;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x+3}-\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2-2x^2}{2(2x+3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-3x}{4x+6} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(-3+2/x)}{x(4+6/x)} = -\frac{3}{4}$$

Ответ : k = 1 / 2 ; b = -3 / 4 .

<u>4. Дано</u>: $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; **Найти : k ; b .**

Решение.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2(1+2/x+1/x^2)} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - k\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ \frac{2x^2 + x}{(x+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ \frac{x^2(2+1/x)}{x^2(1+2/x+1/x^2)} = -1\ .$$

Ответ : k = 1 / 2 ; b = -1 .

5. Дано: $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$;

Найти :

а) правую асимптоту : k_1 ; b_1 (при $x \to \infty$).

б) левую асимптоту : k_2 ; b_2 (при $x \to -\infty$).

Решение.

а) Правая асимптота ($x \to \infty$)

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{(x-2)x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 1 ;$$

$$b_1=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-k_1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x-2}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}-1\right)\right];$$

$$\sqrt{\frac{x}{x-2}}-1=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})\sqrt{x-2}}=$$

$$=\frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})\sqrt{x-2}}=\frac{2}{x(1+\sqrt{1-2/x})\sqrt{1-2/x}};$$

$$b_1 = \lim_{x \to \infty} \left[x\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{2x}{x(1+\sqrt{1-2/x})\sqrt{1-2/x}} \right] = 1 \ ;$$

Ответ : $k_1 = 1$; $b_1 = 1$.

б) Левая асимптота ($x \to -\infty$)

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \sqrt{\frac{x^2 x}{x-2}} \ ; \qquad k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2 x}{(x-2)}}}{x} \ ;$$

$$\text{Замена}: \ z = -x \ ; \ \text{если} \ x \to -\infty \ \text{то} \ z \to \infty$$

$$\mathrm{k}_2 = \lim_{z \to \infty} \frac{\sqrt{\dfrac{-zz^2}{(-z-2)}}}{-z} = -\lim_{z \to \infty} \sqrt{\frac{-zz^2}{(-z-2)z^2}} =$$

$$= -\lim_{z \to \infty} \sqrt{\frac{z}{(z+2)}} = -1 \ .$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - k_2 \cdot x \right] = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right)$$

$$Замена: \ z = -x \ ; \ если \ x \to -\infty \ то \ z \to \infty$$

$$b_2 = \lim_{z \to \infty} \left(\sqrt{\frac{-zz^2}{-z-2}} - z \right) = \lim_{z \to \infty} z\sqrt{\frac{z}{z+2}} - z =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \left[z \left(\sqrt{\frac{z}{z+2}} - 1 \right) \right]$$

$$\sqrt{\frac{z}{z+2}}-1=\frac{\sqrt{z}-\sqrt{z+2}}{\sqrt{z+2}}=\frac{\left(\sqrt{z}-\sqrt{z+2}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{z+2}\right)}{\sqrt{z+2}\left(\sqrt{z}+\sqrt{z+2}\right)}=$$

$$=\frac{-2}{z\sqrt{1+2/z}\left(1+\sqrt{1+2/z}\right)}\;;$$

$$b_2 = \lim_{z \to \infty} \left[z \left(\sqrt{\frac{z}{z+2}} - 1 \right) \right] =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{-2z}{z\sqrt{1+2/z}\left(1+\sqrt{1+2/z}\right)} = -1 \; ;$$

Ответ : k_2 = - 1 ; b_2 = - 1 .