

Кафедра «КРЭМС»

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИС- ЦЕПЕЙ (ОБЗОР)

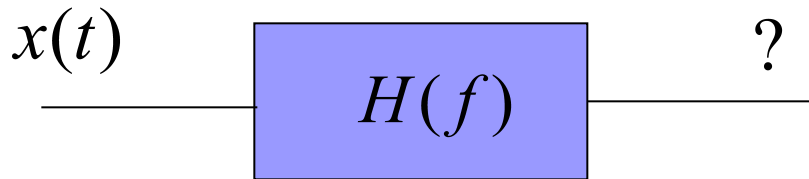
Зырянов

Юрий Трифонович

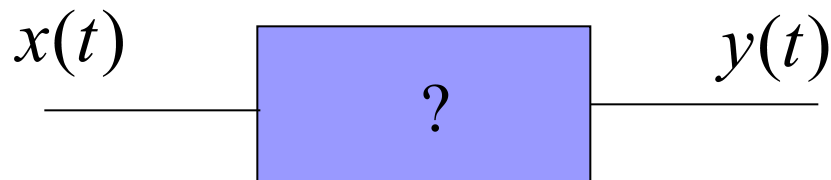
доктор технических наук

профессор

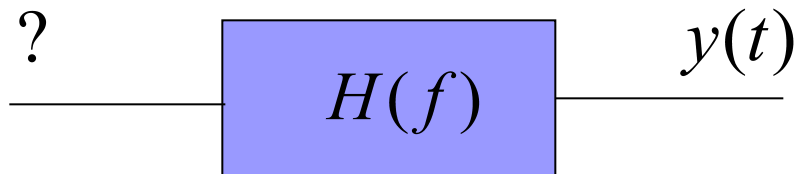
Задачи, связанные с сигналами и цепями



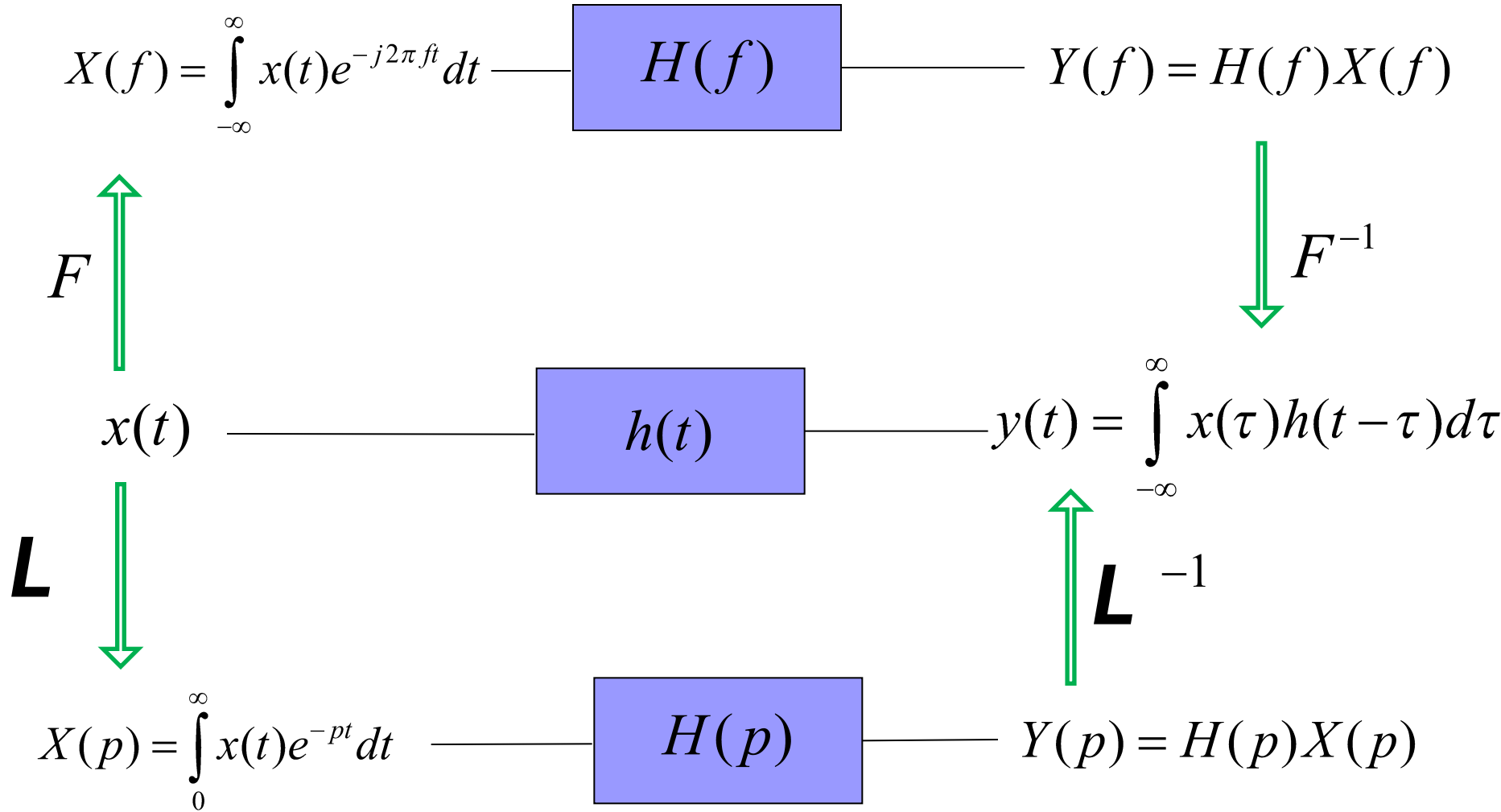
анализ



идентификация и синтез



обратная задача



ИХ, КЧХ, ПФ – функциональное описание

Принципиальная схема, дифференциальное уравнение – структурные способы описания

Точные методы анализа ЛИС-цепей:

1. Временной метод (интеграл Дюамеля)
2. Метод, основанный на решении дифференциального уравнения цепи
3. Операторный и спектральный методы
4. Метод комплексной огибающей (будет рассмотрен позже)

Они позволяют точно решить задачу анализа для любой ЛИС-цепи и при любом воздействии

Приближенные методы основаны на некоторых упрощающих допущениях

Метод мгновенной частоты (будет рассмотрен позже) и др.

Разные приближенные методы приводят к разным результатам !

Метод, основанный на решении ДУ

Дифференциальные уравнения вообще связывают значения некоторых физических величин со скоростями их изменения, скоростями изменения скоростей (ускорениями) и т.д.

ЛИС-цепи с сосредоточенными параметрами описываются наиболее простыми ДУ – *обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами*

(ЛИС-цепи с распределенными параметрами описываются *линейными дифференциальными уравнениями в частных производных с постоянными коэффициентами*)

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_0 x(t)$$

$x(t)$ – входной сигнал
(воздействие)

$y(t)$ – выходной сигнал
(отклик)

Линейные ДУ с постоянными коэффициентами

Если входной сигнал задан, то тем самым задана вся правая часть уравнения

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_0 y(t) = f(t) \quad \text{неоднородное уравнение}$$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_0 y(t) = 0 \quad \text{соответствующее однородное уравнение}$$

Начальные условия – состояние цепи в начальный момент времени

$$a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + \dots + a_1 \gamma + a_0 = 0 \quad \text{характеристическое уравнение}$$

Если коэффициенты уравнения вещественны, то корни либо вещественны, либо образуют комплексно-сопряженные пары. При этом некоторые корни могут совпадать (быть кратными).

Решение ЛДУ с ПК (пример см. в учебнике)

Если все корни $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ простые, то общее решение *однородного* дифференциального уравнения описывает собственные колебания цепи и имеет вид

$$y(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \dots + C_n e^{\gamma_n t}$$

C_1, C_2, \dots, C_n определяются начальными условиями

При наличии кратного корня (кратности m) присутствуют слагаемые вида

$$e^{\gamma_k t}, te^{\gamma_k t}, \dots, t^{m-1} e^{\gamma_k t}$$

Для *устойчивости* цепи свободные колебания должны затухать со временем



все корни характеристического уравнения должны иметь отрицательные вещественные части (лежать в левой половине комплексной плоскости)

Связь спектрального метода с ДУ

Пусть на вход ЛИС-цепи воздействует $x(t) = e^{j\omega t}$

Тогда $y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$

$$\frac{d}{dt}x(t) = j\omega e^{j\omega t}, \dots, \frac{d^k}{dt^k}x(t) = (j\omega)^k e^{j\omega t}$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = j\omega H(\omega)e^{j\omega t}, \dots, \frac{d^k}{dt^k}y(t) = (j\omega)^k H(\omega)e^{j\omega t}$$

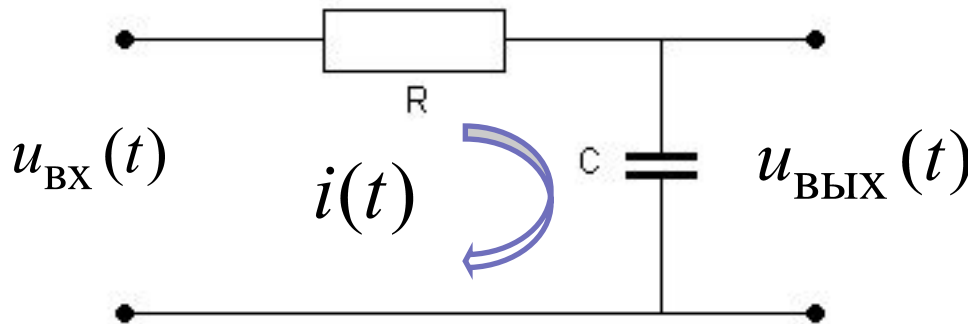
$$a_n (j\omega)^n H(\omega)e^{j\omega t} + \dots + a_0 H(\omega)e^{j\omega t} = b_m (j\omega)^m e^{j\omega t} + \dots + b_0 e^{j\omega t}$$

$$H(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0}$$

Итак, КЧХ любой ЛИС-цепи имеет вид функции, дробно-рациональной относительно $j\omega$

$$H(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0}$$

Пример



$$i(t) = C \frac{du_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt}$$

$$u_{\text{ВХ}}(t) = RC \frac{du_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + u_{\text{ВЫХ}}(t)$$

неоднородное ДУ

$$\tau \frac{du_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + u_{\text{ВЫХ}}(t) = 0$$

однородное ДУ

$$\tau = RC$$

$\tau\gamma + 1 = 0$ характеристическое уравнение

$\gamma = -1/\tau$ корень характеристического уравнения

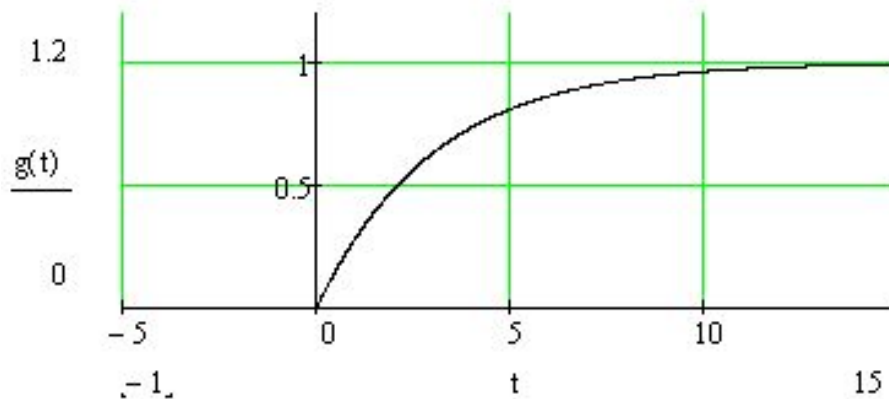
$u_{\text{ВЫХ}}(t) = Ce^{-t/\tau}$ общее решение однородного ДУ

$u_{\text{ВЫХ}}(t) = Ce^{-t/\tau} + \sigma(t)$ частное решение неоднородного ДУ при
воздействии в виде функции Хэвисайда

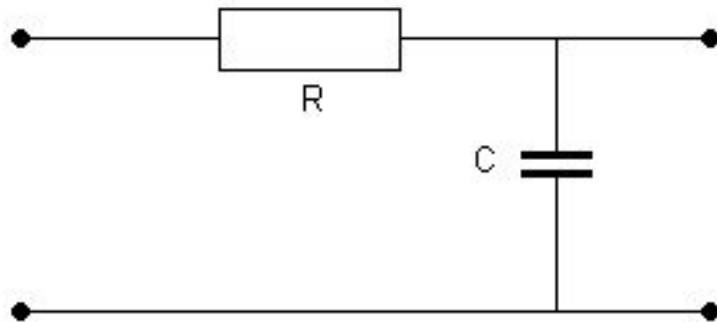
Если начальное условие $u_{\text{ВЫХ}}(0) = 0 \implies C = -1$

Отклик на функцию Хэвисайда (переходная характеристика ЛИС-цепи)

$$g(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$



$$H(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0}$$



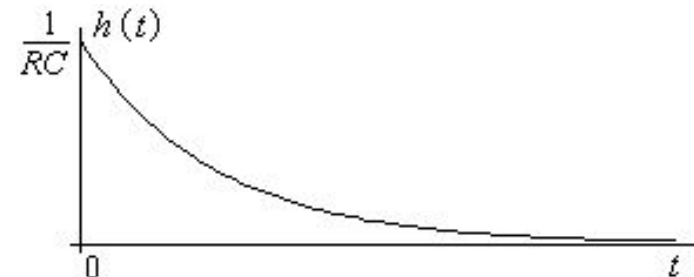
$$H(\omega) = 1 / (1 + j\omega RC)$$

Если на входе дельта-функция
(сп. плотность $\equiv 1$)

$$Y(\omega) = 1 / (1 + j\omega RC)$$

Обратным преобразованием
Фурье получаем отклик – ИХ

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$



Операторный метод

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow p$$

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(p)e^{pt} dt$$

Дифференциальное уравнение заменяется алгебраическим

$$a_n p^n Y(p) + \dots + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = b_m p^m X(p) + \dots + b_1 p X(p) + b_0 X(p)$$

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad \text{операторная передаточная функция}$$

$$K(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

$$Y(p) = K(p)X(p)$$

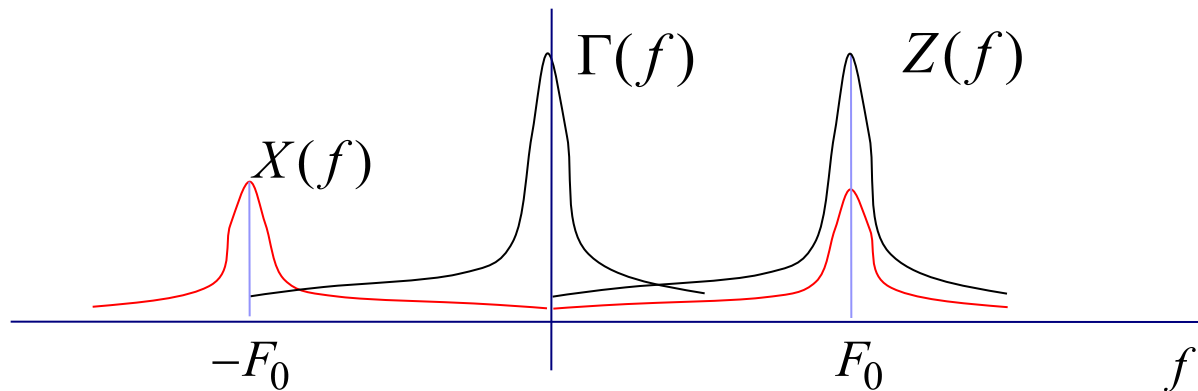
Метод комплексной огибающей

обычно применяется для анализа *частотно-избирательных цепей* при *узкополосных* воздействиях

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ \gamma(t) e^{j2\pi F_0 t} \right\} = \frac{1}{2} \left[\gamma(t) e^{j2\pi F_0 t} + \gamma^*(t) e^{-j2\pi F_0 t} \right]$$

Спектральная плотность

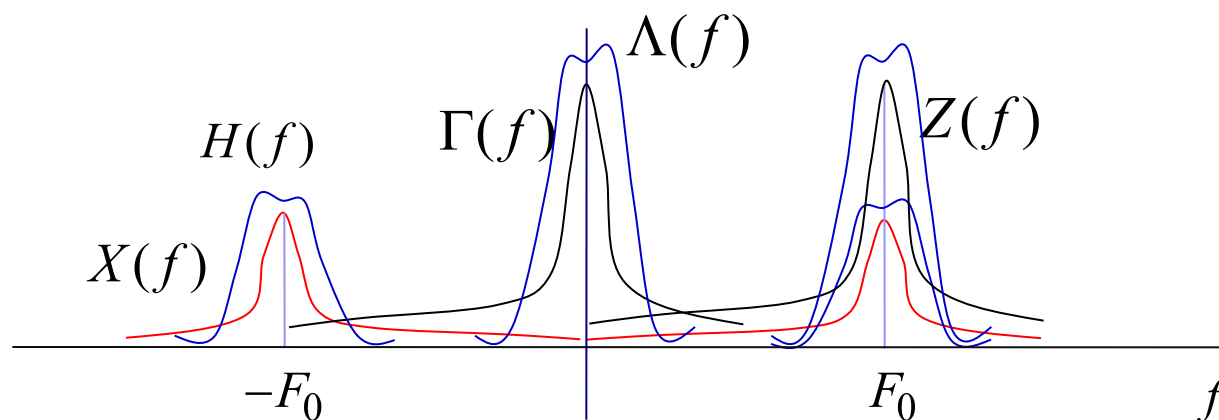
$$X(f) = \frac{1}{2} \left[\Gamma(f - F_0) + \Gamma^*(-f - F_0) \right]$$



ИХ частотно-избирательной цепи (полосового фильтра)

$$h(t) = \operatorname{Re} \left\{ \lambda(t) e^{j2\pi F_0 t} \right\} = \frac{1}{2} \left[\lambda(t) e^{j2\pi F_0 t} + \lambda^*(t) e^{-j2\pi F_0 t} \right]$$

$$H(f) = \frac{1}{2} \left[\Lambda(f - F_0) + \Lambda^*(-f - F_0) \right]$$



Тогда спектральная плотность сигнала на выходе фильтра равна

$$Y(f) = H(f) X(f) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\Lambda(f - F_0) + \Lambda^*(-f - F_0) \right] \frac{1}{2} \left[\Gamma(f - F_0) + \Gamma^*(-f - F_0) \right] = \\
&= \frac{1}{4} \left[\Lambda(f - F_0)\Gamma(f - F_0) + \Lambda^*(-f - F_0)\Gamma^*(-f - F_0) \right]
\end{aligned}$$



$$Y(f) = \frac{1}{2} \left[B(f - F_0) + B^*(-f - F_0) \right]$$

где

$$B(f) = \frac{1}{2} \Lambda(f)\Gamma(f)$$

$$y(t) = \operatorname{Re} \left\{ \beta(t) e^{j2\pi F_0 t} \right\} = \frac{1}{2} \left[\beta(t) e^{j2\pi F_0 t} + \beta^*(t) e^{-j2\pi F_0 t} \right];$$

$$\text{Итак, } \beta(t) = \gamma(t) * \frac{1}{2} \lambda(t)$$

Низкочастотный эквивалент ЧИЦ имеет ИХ $\frac{1}{2} \lambda(t)$



НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Линейные нестационарные цепи

Линейные нестационарные цепи с сосредоточенными параметрами описываются *обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами*

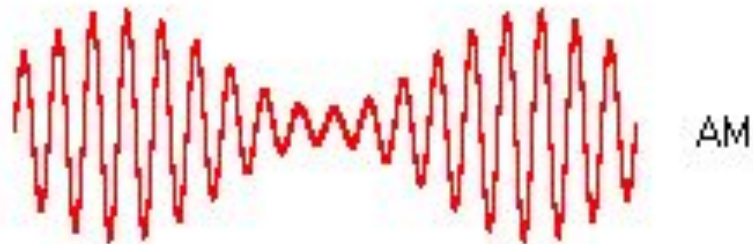
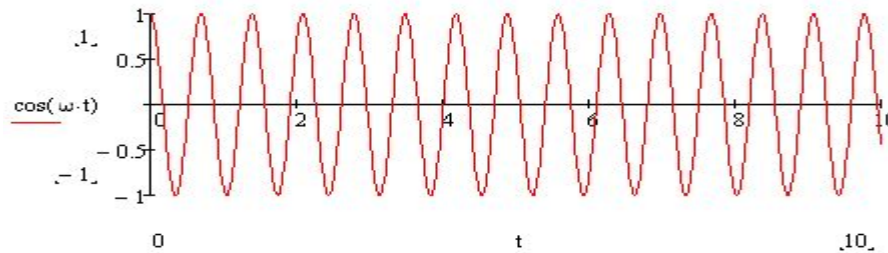
$$a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_0(t) y(t) = \\ = b_m(t) \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_0(t) x(t)$$

$x(t)$ – входной сигнал
(воздействие)

$y(t)$ – выходной сигнал
(отклик)

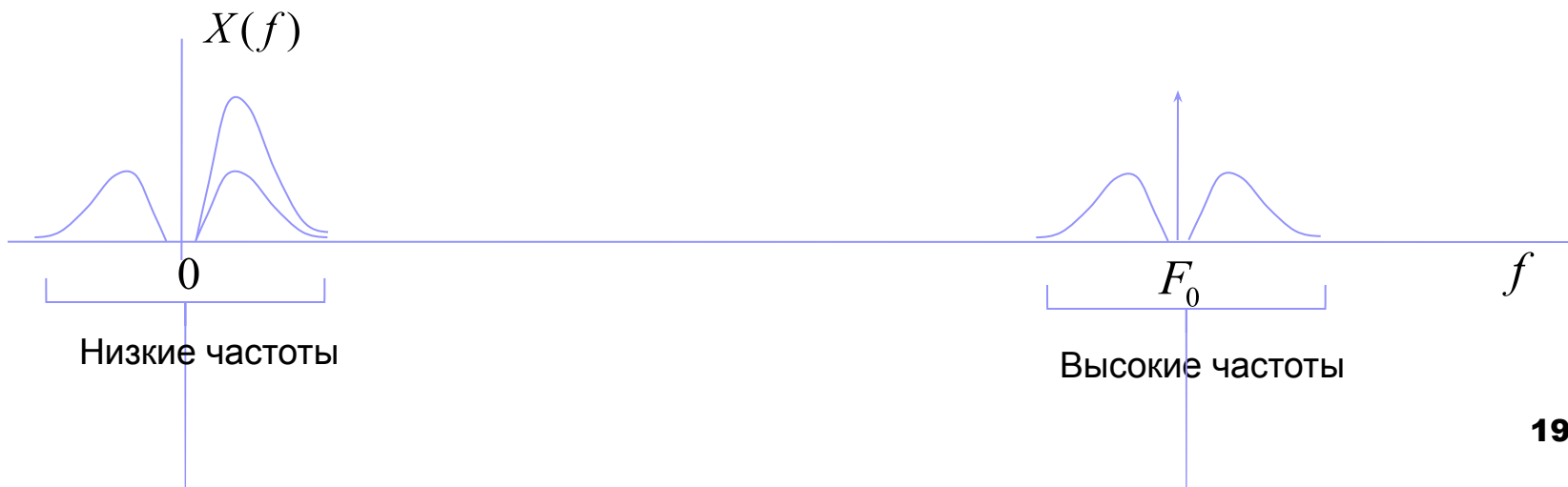
Общего метода решения нет

Модуляция – это изменение *одного или нескольких* параметров колебания, называемого несущим колебанием (переносчиком), в соответствии с изменениями первичного (информационного) сигнала.



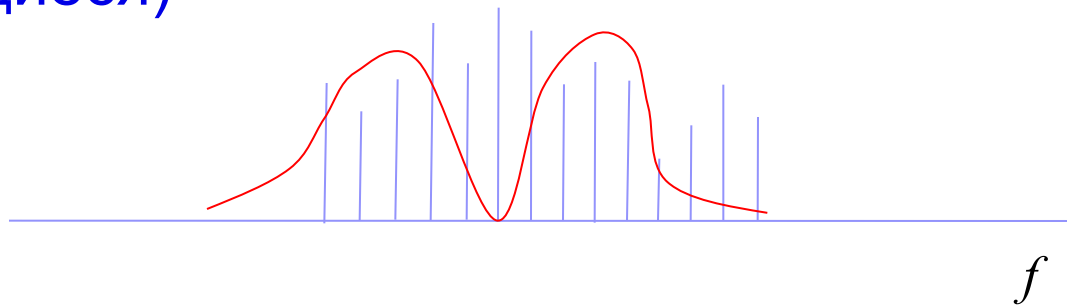
Модуляция – это изменение *одного или нескольких* параметров колебания, называемого несущим колебанием (переносчиком), в соответствии с изменениями первичного (информационного) сигнала.

при модуляции (а также демодуляции) происходят такие преобразования сигнала, которые сопровождаются появлением новых частотных составляющих, отсутствовавших в спектре исходного сигнала

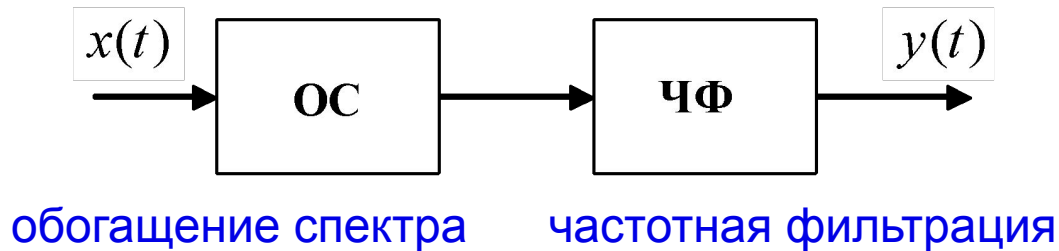


Изменение спектрального состава сигналов при модуляции и демодуляции

ЛИС-цепь не может обогатить спектр колебания новыми составляющими! (может только подавить имеющиеся)



Типичный способ формирования нужного спектрального состава:



Линейные нестационарные цепи

$$y(t) = \mathbb{L}\{x(t)\} = \mathbb{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbb{L}\{\delta(t-\tau)\}d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

где $h(t,\tau)$ - отклик цепи в момент t на входной сигнал в виде δ -функции, воздействующий на цепь в момент τ . Заменяем переменную τ

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(t,t-\tau)d\tau$$

Пусть на входе колебание $e^{j2\pi ft}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)}h(t,t-\tau)d\tau = e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau}h(t,t-\tau)d\tau =$$

$$= H(f,t)e^{j2\pi ft}$$

Линейные нестационарные цепи

Пусть на входе колебание $e^{j2\pi ft}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)} h(t, t-\tau) d\tau = e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau} h(t, t-\tau) d\tau =$$

$$= H(f, t) e^{j2\pi ft} \quad H(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$y(t) = H(f, t) e^{j2\pi ft}$$

Однако эта функция зависит не только от частоты, но и от времени

Можно представить

$$H(f, t) = K(f, t) e^{j\Phi(f, t)}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \quad \longrightarrow \quad y(t) = K(f_0, t) e^{j[2\pi f_0 t + \Phi(f_0, t)]}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(t, t - \tau)d\tau$$

подставим обратное ПФ для
входного сигнала

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f(t-\tau)}h(t, t - \tau)df d\tau =$$

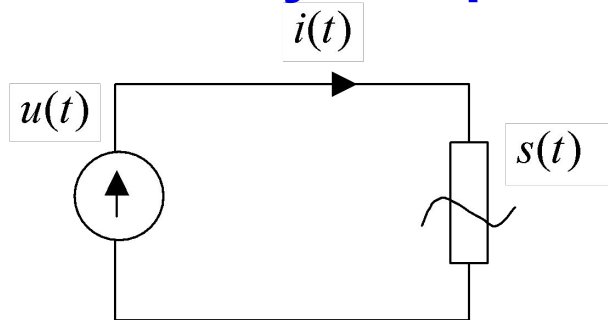
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t - \tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau e^{j2\pi ft} df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)H(f, t)e^{j2\pi ft} df$$

$$X(f)H(f, t)$$

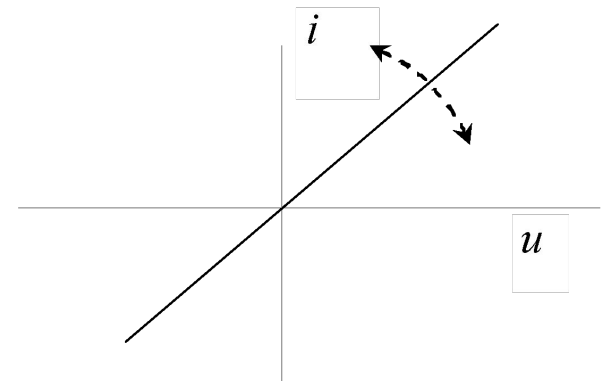
Это не спектральная плотность !!!

Воздействие гармонического колебания на линейную параметрическую цепь



$$s(t) = 1 / R(t)$$

проводимость
(крутизна ВАХ)



Простейший случай – напряжение и крутизна изменяются по гармоническому закону с разными частотами

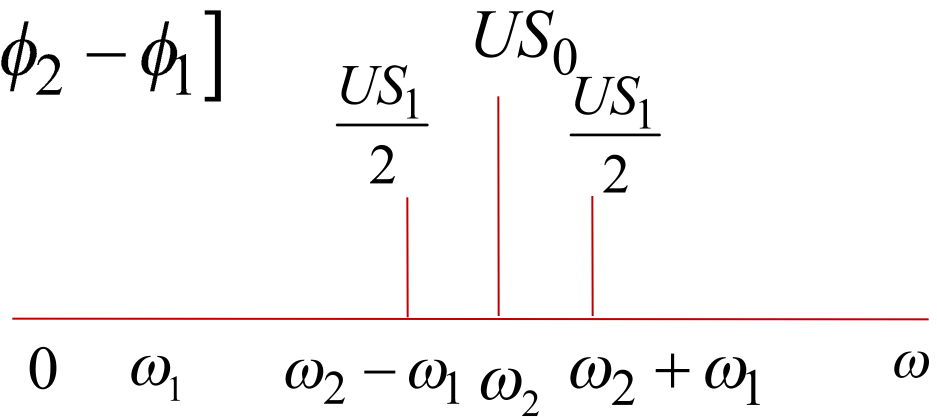
$$s(t) = S_0 + S_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$



$$u(t) = U \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$



$$\begin{aligned}
 i(t) &= US_0 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + US_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \cos(\omega_2 t + \phi_2) = \\
 &= US_0 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{US_1}{2} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1 + \phi_2] + \\
 &+ \frac{US_1}{2} \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \phi_2 - \phi_1]
 \end{aligned}$$



перенос спектра