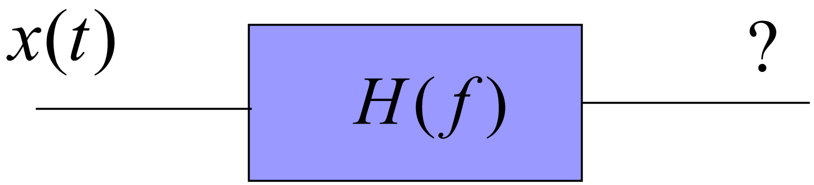
Кафедра «КРЭМС»

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИС-ЦЕПЕЙ (ОБЗОР)

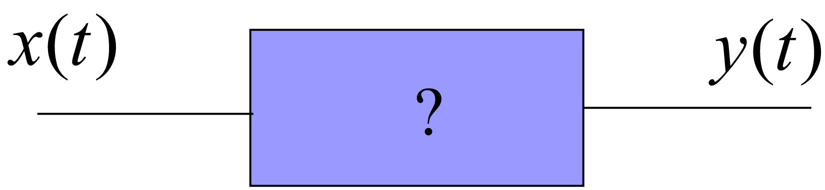
Зырянов

Юрий Трифонович
доктор технических наук
профессор

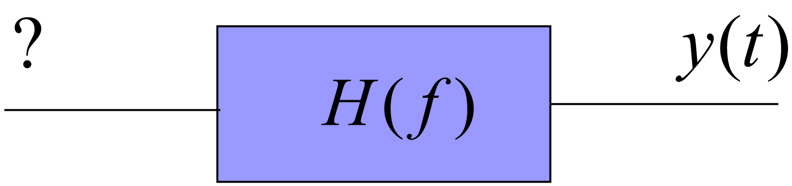
Задачи, связанные с сигналами и цепями



анализ



идентификация и синтез



обратная задача

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad \longrightarrow \quad \boxed{H(f)} \quad \longrightarrow \quad Y(f)=H(f)X(f)$$

$$F \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow F^{-1}$$

$$x(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{h(t)} \quad \longrightarrow \quad y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\mathbf{L} \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \mathbf{L}^{-1}$$

$$X(p)=\int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt \quad \longrightarrow \quad \boxed{H(p)} \quad \longrightarrow \quad Y(p)=H(p)X(p)$$

ИХ, КЧХ, ПФ – функциональное описание

Принципиальная схема, дифференциальное уравнение – структурные способы описания

Точные методы анализа ЛИС-цепей:

1. Временной метод (интеграл Дюамеля)
2. Метод, основанный на решении дифференциального уравнения цепи
3. Операторный и спектральный методы
4. Метод комплексной огибающей (будет рассмотрен позже)

Они позволяют точно решить задачу анализа для любой ЛИС-цепи и при любом воздействии

Приближенные методы основаны на некоторых упрощающих допущениях

Метод мгновенной частоты (будет рассмотрен позже) и др.

Разные приближенные методы приводят к разным результатам !

Метод, основанный на решении ДУ

Дифференциальные уравнения вообще связывают значения некоторых физических величин со скоростями их изменения, скоростями изменения скоростей (ускорениями) и т.д.

ЛИС-цепи с сосредоточенными параметрами описываются наиболее простыми ДУ– *обыкновенными линейными* дифференциальными уравнениями *с постоянными коэффициентами*

(ЛИС-цепи с распределенными параметрами описываются *линейными* дифференциальными уравнениями *в частных производных с постоянными коэффициентами*)

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 x(t)$$

$x(t)$ – входной сигнал (воздействие)

$y(t)$ – выходной сигнал (отклик)

Линейные ДУ с постоянными коэффициентами

Если входной сигнал задан, то тем самым задана вся правая часть уравнения

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \ldots + a_0 y(t) = f(t)$$

неоднородное уравнение

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \ldots + a_0 y(t) = 0$$

соответствующее однородное уравнение

Начальные условия − состояние цепи в начальный момент времени

$$a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + \ldots + a_1 \gamma + a_0 = 0$$

характеристическое уравнение

Если коэффициенты уравнения вещественны, то корни либо вещественны, либо образуют комплексно-сопряженные пары. При этом некоторые корни могут совпадать (быть кратными).

Решение ЛДУ с ПК (пример см. в учебнике)

Если все корни $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ простые, то общее решение *однородного* дифференциального уравнения описывает собственные колебания цепи и имеет вид

$$y(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \ldots + C_n e^{\gamma_n t}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ определяются начальными условиями

При наличии кратного корня (кратности *m*) присутствуют слагаемые вида

$$e^{\gamma_k t}, \quad t e^{\gamma_k t}, \ldots, \quad t^{m-1} e^{\gamma_k t}$$

Для *устойчивости* цепи свободные колебания должны затухать со временем $\Rightarrow$ все корни характеристического уравнения должны иметь отрицательные вещественные части (лежать в левой половине комплексной плоскости)

Связь спектрального метода с ДУ

Пусть на вход ЛИС-цепи воздействует $x(t) = e^{j\omega t}$

Тогда $y(t) = H(\omega) e^{j\omega t}$

$$\frac{d}{dt} x(t) = j\omega e^{j\omega t}, \dots, \frac{d^k}{dt^k} x(t) = (j\omega)^k e^{j\omega t}$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = j\omega H(\omega) e^{j\omega t}, \dots, \frac{d^k}{dt^k} y(t) = (j\omega)^k H(\omega) e^{j\omega t}$$

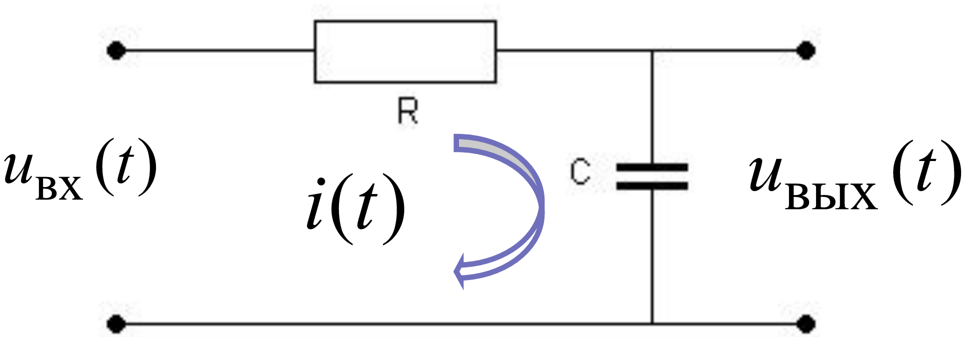
$$a_n (j\omega)^n H(\omega) e^{j\omega t} + \dots + a_0 H(\omega) e^{j\omega t} = b_m (j\omega)^m e^{j\omega t} + \dots + b_0 e^{j\omega t}$$

$$H(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0}$$

Итак, КЧХ любой ЛИС-цепи имеет вид функции, дробно-рациональной относительно $j\omega$

$$H(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 j\omega + a_0}$$

Пример



$$i(t) = C\frac{du_{\text{вых}}(t)}{dt}$$

$$\boxed{u_{\text{вх}}(t) = RC du_{\text{вых}}(t)/dt + u_{\text{вых}}(t)}$$ неоднородное ДУ

$$\tau du_{\text{вых}}(t)/dt + u_{\text{вых}}(t) = 0$$ однородное ДУ $\tau = RC$

$$\tau\gamma + 1 = 0$$ характеристическое уравнение

$$\gamma = -1/\tau$$ корень характеристического уравнения

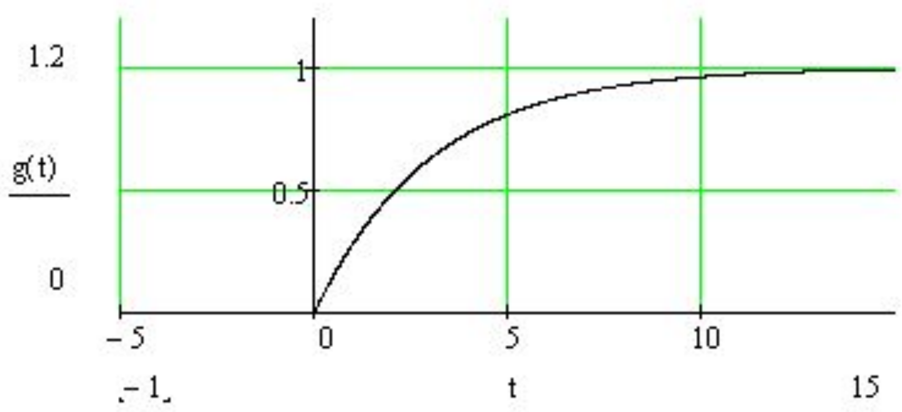
$$u_{\text{вых}}(t) = Ce^{-t/\tau}$$ общее решение однородного ДУ

$$u_{\text{вых}}(t) = Ce^{-t/\tau} + \sigma(t)$$ частное решение неоднородного ДУ при воздействии в виде функции Хэвисайда

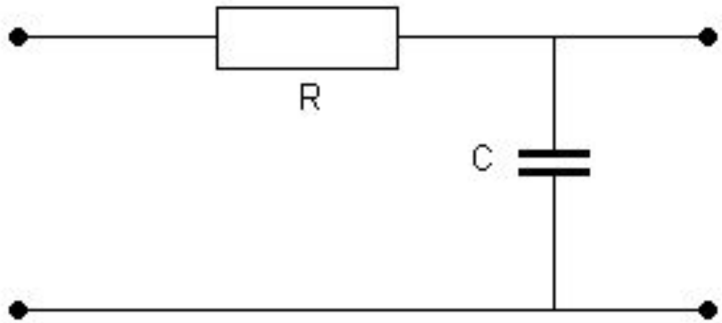
Если начальное условие $u_{\text{вых}}(0) = 0 \Longrightarrow C = -1$

Отклик на функцию Хэвисайда (переходная характеристика ЛИС-цепи)

$$g(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$



$$H(\omega)=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_1 j\omega+b_0}{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_1 j\omega+a_0}$$



$$H(\omega)=1/\left(1+j\omega RC\right)$$

Если на входе дельта-функция
(сп. плотность ≡1)

$$Y(\omega)=1/\left(1+j\omega RC\right)$$

Обратным преобразованием
Фурье получаем отклик − ИХ

$$h(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$

Операторный метод $\frac{d}{dt} \Rightarrow p$

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \qquad y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c-j\infty} Y(p) e^{pt} dt$$

Дифференциальное уравнение заменяется алгебраическим

$$a_n p^n Y(p) + \ldots + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = b_m p^m X(p) + \ldots + b_1 p X(p) + b_0 X(p)$$

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$ операторная передаточная функция

$$K(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}$$

$$Y(p) = K(p) X(p)$$

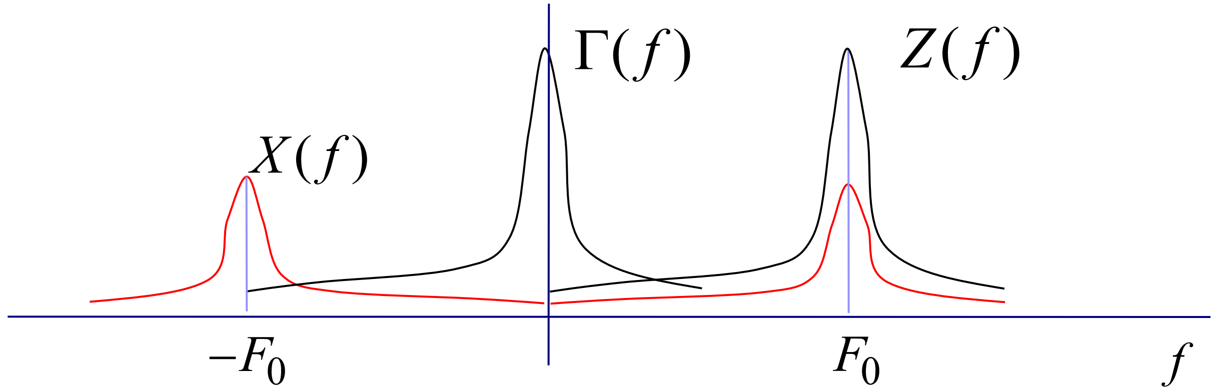
Метод комплексной огибающей

обычно применяется для анализа *частотно-избирательных цепей* при *узкополосных* воздействиях

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{\gamma(t)e^{j2\pi F_0 t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\gamma(t)e^{j2\pi F_0 t} + \gamma^*(t)e^{-j2\pi F_0 t}\right]$$

Спектральная плотность

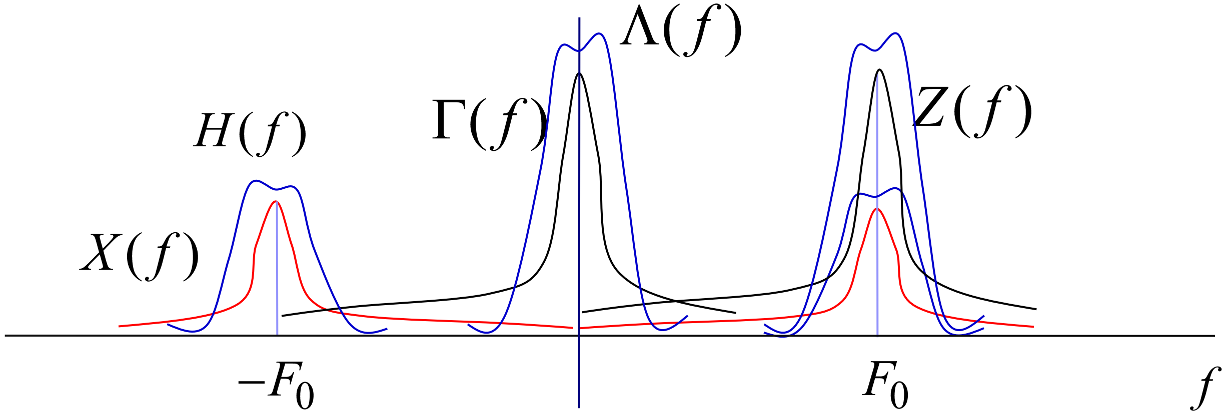
$$X(f) = \frac{1}{2}\left[\Gamma\left(f - F_0\right) + \Gamma^*\left(-f - F_0\right)\right]$$



ИХ частотно-избирательной цепи (полосового фильтра)

$$h(t) = \mathrm{Re}\left\{\lambda(t)e^{j2\pi F_0 t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\lambda(t)e^{j2\pi F_0 t} + \lambda^*(t)e^{-j2\pi F_0 t}\right]$$

$$H(f) = \frac{1}{2}\left[\Lambda\left(f - F_0\right) + \Lambda^*\left(-f - F_0\right)\right]$$



Тогда спектральная плотность сигнала на выходе фильтра равна

$$Y(f) = H\left(f\right)X\left(f\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Lambda\left(f-F_0\right)+\Lambda^*\left(-f-F_0\right)\right]\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(f-F_0\right)+\Gamma^*\left(-f-F_0\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\Lambda\left(f-F_0\right)\Gamma\left(f-F_0\right)+\Lambda^*\left(-f-F_0\right)\Gamma^*\left(-f-F_0\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$Y(f)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{B}\left(f-F_0\right)+\mathrm{B}^*\left(-f-F_0\right)\right]$$

где

$$\mathrm{B}(f)=\frac{1}{2}\Lambda(f)\Gamma(f)$$

$$y(t)=\mathrm{Re}\left\{\beta(t)e^{j2\pi F_0 t}\right\}=\frac{1}{2}\left[\beta(t)e^{j2\pi F_0 t}+\beta^*(t)e^{-j2\pi F_0 t}\right];$$

Итак, $\beta(t)=\gamma(t)*\frac{1}{2}\lambda(t)$

Низкочастотный эквивалент ЧИЦ имеет ИХ $\frac{1}{2}\lambda(t)$

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Линейные нестационарные цепи

Линейные нестационарные цепи с сосредоточенными параметрами описываются *обыкновенными линейными* дифференциальными уравнениями *с переменными коэффициентами*

$$a_n(t)\frac{d^n y(t)}{dt^n}+\ldots+a_0(t)y(t)=$$

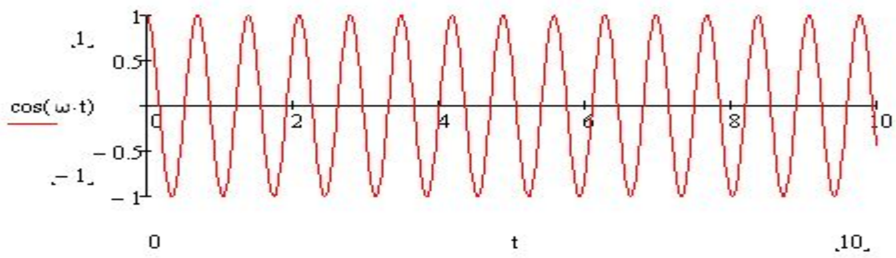
$$=b_m(t)\frac{d^m x(t)}{dt^m}+\ldots+b_0(t)x(t)$$

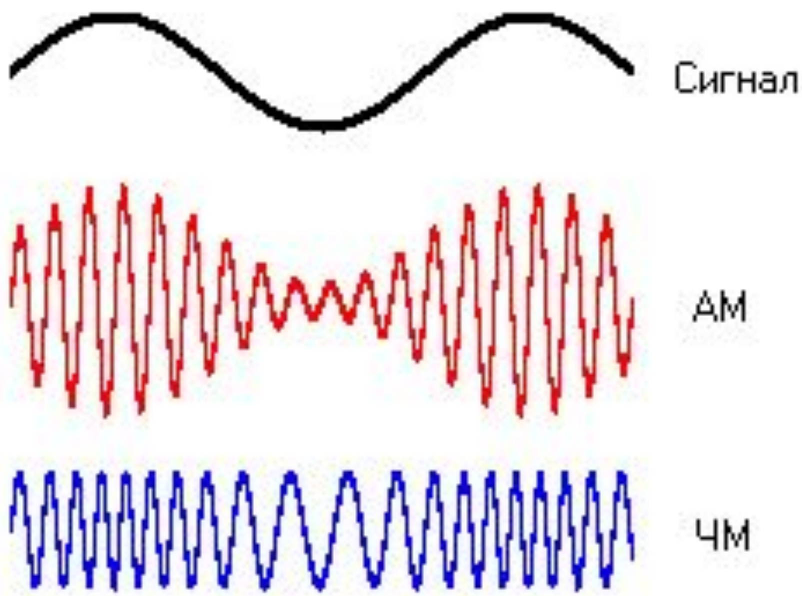
$x(t)$ – входной сигнал (воздействие)

$y(t)$ – выходной сигнал (отклик)

Общего метода решения нет

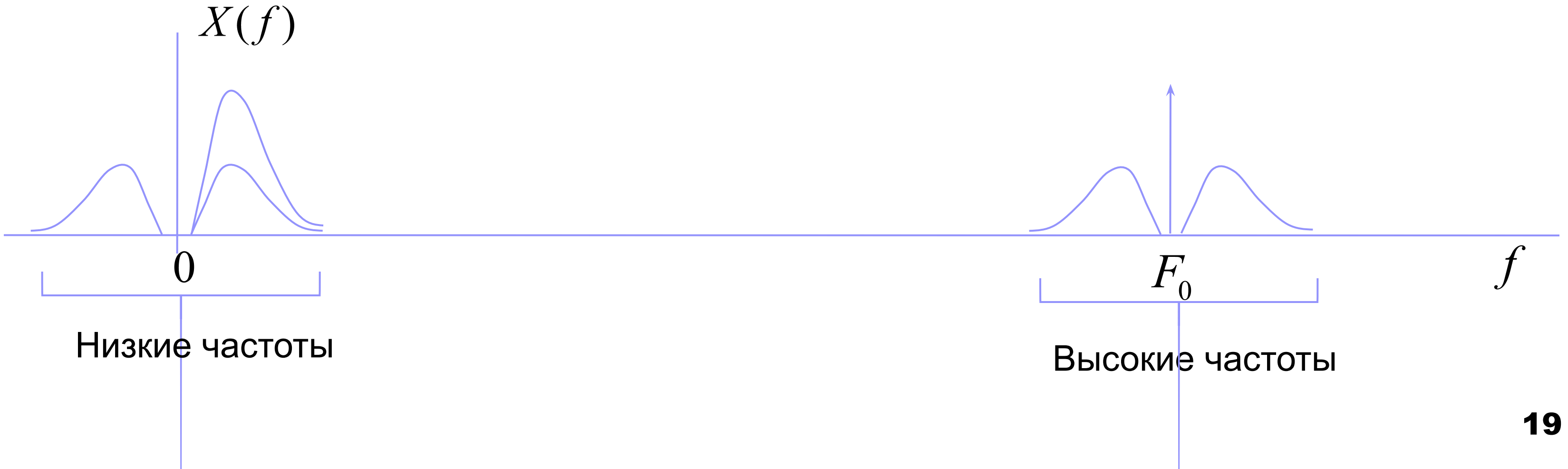
Модуляция – это изменение *одного или нескольких* параметров колебания, называемого несущим колебанием (переносчиком), в соответствии с изменениями первичного (информационного) сигнала.





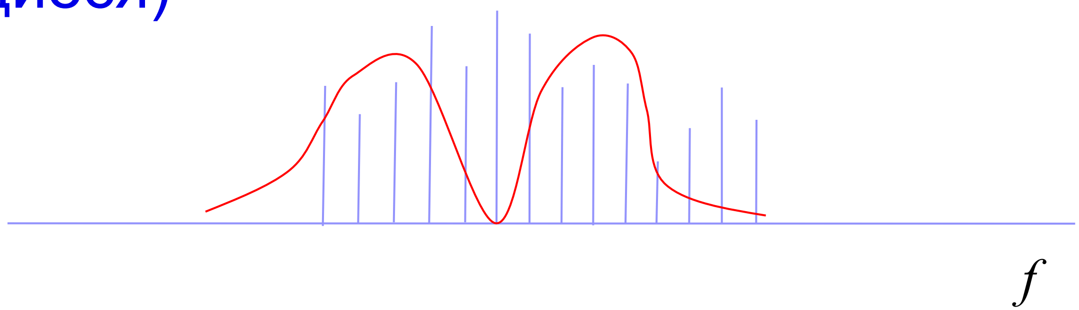
Модуляция – это изменение *одного или нескольких* параметров колебания, называемого несущим колебанием (переносчиком), в соответствии с изменениями первичного (информационного) сигнала.

при модуляции (а также демодуляции) происходят такие преобразования сигнала, которые сопровождаются появлением новых частотных составляющих, отсутствовавших в спектре исходного сигнала

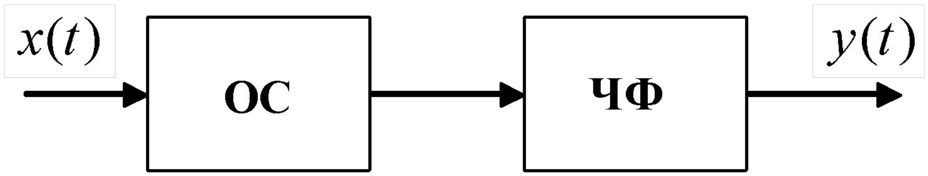


Изменение спектрального состава сигналов при модуляции и демодуляции

ЛИС-цепь не может обогатить спектр колебания новыми составляющими! (может только подавить имеющиеся)



Типичный способ формирования нужного спектрального состава:



обогащение спектра частотная фильтрация

Линейные нестационарные цепи

$$y(t) = \mathrm{L}\{x(t)\} = \mathrm{L}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathrm{L}\{\delta(t-\tau)\}d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

где $h(t,\tau)$ - отклик цепи в момент t на входной сигнал в виде δ-функции, воздействующий на цепь в момент τ. Заменим переменную τ

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(t,t-\tau)d\tau$$

Пусть на входе колебание $e^{j2\pi ft}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)}h(t,t-\tau)d\tau = e^{j2\pi ft}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau}h(t,t-\tau)d\tau =$$

$$= H(f,t)e^{j2\pi ft}$$

Линейные нестационарные цепи

Пусть на входе колебание $e^{j2\pi ft}$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)}h(t,t-\tau)d\tau = e^{j2\pi ft}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau}h(t,t-\tau)d\tau =$$

$$=H(f,t)e^{j2\pi ft}$$

$$H(f,t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,t-\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$y(t)=H(f,t)e^{j2\pi ft}$$

Однако эта функция зависит не только от частоты, но и от времени

Можно представить $H(f,t)=K(f,t)e^{j\Phi(f,t)}$

$$e^{j2\pi f_0 t} \Longrightarrow y(t)=K(f_0,t)e^{j[2\pi f_0 t+\Phi(f_0,t)]}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(t,t-\tau)d\tau$$

подставим обратное ПФ для входного сигнала

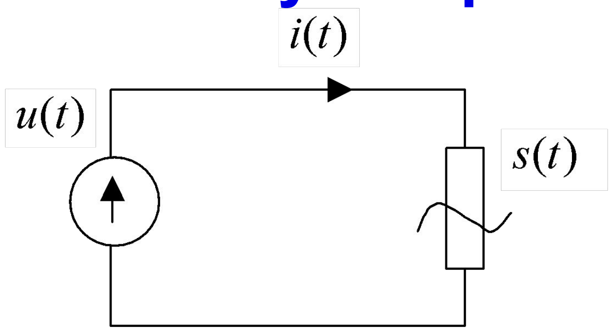
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f(t-\tau)}h(t,t-\tau)df\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\int_{-\infty}^{\infty} h(t,t-\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\, e^{j2\pi ft}df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)H(f,t)e^{j2\pi ft}df$$

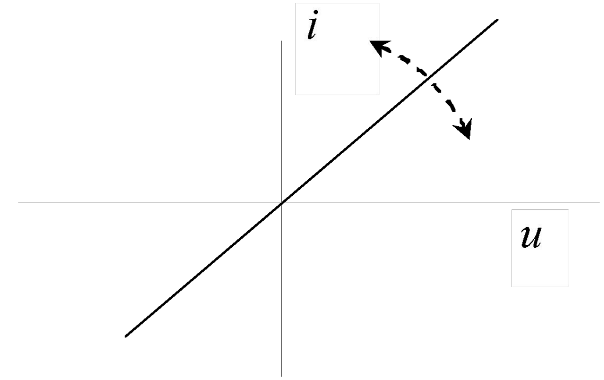
$X(f)H(f,t)$ Это не спектральная плотность !!!

Воздействие гармонического колебания на линейную параметрическую цепь



$$s(t) = 1/R(t)$$

проводимость
(крутизна ВАХ)



Простейший случай − напряжение и крутизна изменяются по гармоническому закону с разными частотами

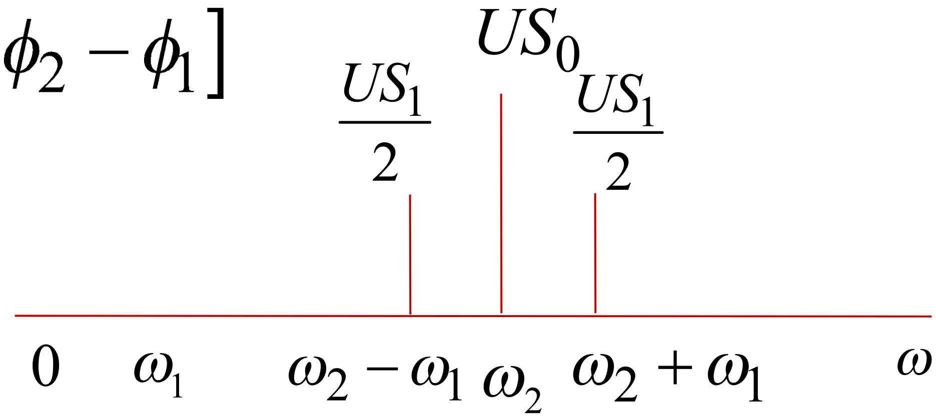
$$s(t) = S_0 + S_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$u(t) = U \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$i(t) = US_0 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + US_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)\cos(\omega_2 t + \phi_2) =$$

$$= US_0 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{US_1}{2}\cos\left[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1 + \phi_2\right] +$$

$$+ \frac{US_1}{2}\cos\left[(\omega_2 - \omega_1)t + \phi_2 - \phi_1\right]$$



перенос спектра