

Математический анализ
Раздел: Введение в анализ

Тема: *Числовые последовательности*
(основные определения, предел последовательности,
свойства сходящихся последовательностей)

Лектор Янущик О.В.

2021 г.

§2. Числовые последовательности

1. Основные понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. **Последовательностью** называется *перенумерованное множество* (чисел – числовая последовательность, функций – функциональная последовательность и т.д.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. **Последовательностью** называется *функция, заданная на множестве натуральных чисел.*

Если область значений последовательности – числовое множество, то последовательность называют **числовой**, если область значений – множество функций, то последовательность называют **функциональной**.

Принято обозначать:

аргумент последовательности: n (или k)

значения функции: x_n , y_n и т.д.

Называют: x_1 – первый член последовательности,

x_2 – второй член последовательности и т.д.

x_n – n -й (общий) член последовательности.

Способы задания последовательностей:

1) явно (т.е. формулой $x_n = f(n)$)

2) рекуррентным соотношением

(т.е. формулой $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$)

Записывают последовательность:

$\{ x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \}$ – развернутая запись;

$\{ x_n \}$ – короткая запись (где x_n – общий член)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется

- **ограниченной снизу**, если $\exists a \in \mathbb{R}$ такое, что $a \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- **ограниченной сверху**, если $\exists b \in \mathbb{R}$ такое, что $x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- **ограниченной**, если $\exists a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Замечание. Условие « $\exists a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $a \leq x_n \leq b$ » равносильно условию « $\exists M > 0$ такое, что $|x_n| \leq M$ »

- **возрастающей (неубывающей)**, если
$$x_n < x_{n+1} \text{ (} x_n \leq x_{n+1} \text{), } \forall n \in \mathbb{N};$$
- **убывающей (невозрастающей)**, если
$$x_n > x_{n+1} \text{ (} x_n \geq x_{n+1} \text{), } \forall n \in \mathbb{N};$$

Замечание. Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие последовательности называются **монотонными**.

2. Предел последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$ если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

Записывают: $\lim x_n = a, \quad x_n \rightarrow a$

Говорят: последовательность $\{x_n\}$ сходится (стремится) к a .

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся***
(***сходящейся к a***)

Последовательность, не имеющую предела, называют ***расходящейся***.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ предела последовательности

Пусть $r \in \mathbb{R}$, $M(r) \in Ox$



$M(r)$ – геометрическая интерпретация числа $r \in \mathbb{R}$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.



Интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ называют **ε -окрестностью точки** x_0 .
(геометрическое определение ε -окрестности точки)

Будем обозначать: $U(x_0, \varepsilon)$

Имеем: $U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$

(алгебраическое определение ε -окрестности точки)



Из определения предела последовательности получаем: если $\{x_n\} \rightarrow a$, то с геометрической точки зрения это означает, что в любой ε -окрестности точки a находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением может быть конечного их числа. (Геометрическая интерпретация предела последовательности).

$\Rightarrow a$ – точка «сгущения» последовательности $\{x_n\}$.

СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1) Две последовательности, отличающиеся на конечное число членов, ведут себя одинаково относительно сходимости.

2) Последовательность может иметь не более одного предела
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

3) Если $\{x_n\} \rightarrow a$, то $\{|x_n|\} \rightarrow |a|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – очевидно, в силу $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$.

4) Сходящаяся последовательность ограничена
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность, сходящуюся к нулю, называют **бесконечно малой**.

5) ЛЕММА 1 (о роли б.м. последовательностей). Число $a \in \mathbb{R}$ является пределом последовательности $\{x_n\} \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Суммой, разностью, произведением, частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются соответственно последовательности

$$\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \quad (y_n \neq 0) \quad \cdot$$

Последовательность $\{cx_n\}$ называется *произведением* $\{x_n\}$ на число c (произведение последовательностей $\{x_n\}$ и $\{c\}$)

6) Пусть $\{x_n\}$ – ограничена, $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая. Тогда $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ – бесконечно малая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

7) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – сходящиеся и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже являются сходящимися последовательностями, причем

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$ (доказать самостоятельно)

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$

СЛЕДСТВИЕ свойства 7. Если $\{x_n\}$ сходится к a , то $\forall c \in \mathbb{R}$ последовательность $\{cx_n\}$ тоже сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ca$$

Говорят: «константу можно вынести за знак предела»

8) Пусть $\{x_n\} \rightarrow a$ и $x_n \geq 0$ (или $x_n > 0$), $\forall n \in \mathbb{N}$.
Тогда $a \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

9) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – сходящиеся последовательности и $x_n \leq y_n$ ($x_n < y_n$), $\forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – следствие свойства 8.

10) ЛЕММА о двух милиционерах.

Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к одному и тому же числу и $\forall n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда последовательность $\{z_n\}$ тоже сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$ если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$