

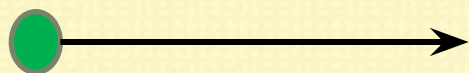
Первообразная

11 класс

Вспомним физический смысл производной.

Если материальная точка движется прямолинейно и её координата изменяется по закону $s(t)$, то скорость её движения $v(t)$ в момент времени t равна производной $s'(t)$:

*материальная
точка*



скорость

движения $v(t)$

$$v(t) = s'(t)$$

*$s(t)$ закон
движения*



Задача: Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = t^3 + 2t$ (где $s(t)$ – измеряется в м). Найдите скорость точки в момент времени $t=2$ с.

Решение:

$$v(t) = s'(t).$$

$$v(t) = 3t^2 + 2$$

$$v(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14 \text{ м/с}$$

**В математике часто приходится решать обратную задачу:
зная скорость найти закон движения.**

Задача: По прямой движется материальная точка, скорость которой в момент времени t задается формулой $v(t) = 3t^2$. Найдите закон движения.

Решение: Пусть $s(t)$ – закон движения

так как $v(t) = s'(t)$

$$s'(t) = 3t^2, \quad s(t) = t^3.$$

надо найти функцию, производная которой равна $3t^2$.

Эта задача решена верно, но не полно.

Эта задача имеет бесконечное множество решений.

$$s(t) = t^3 \quad s'(t) = 3t^2$$

$$s(t) = t^3 + 2 \quad s'(t) = 3t^2$$

$$s(t) = t^3 + 5 \quad s'(t) = 3t^2$$

$$s(t) = t^3 + \frac{1}{2} \quad s'(t) = 3t^2$$

можно сделать вывод, что любая функция вида $s(t) = t^3 + C$ является решением данной задачи, где C любое число.

При решении задачи, мы, зная производную функции, восстановили ее первичный образ.

Эта операция восстановления - операция **интегрирования**.

Восстановленная функция – **первообразная**
(первичный образ функции)

Операция
дифферен-
цирования



функция $y = F(x)$
(первообразная)

$y = f(x)$

производная

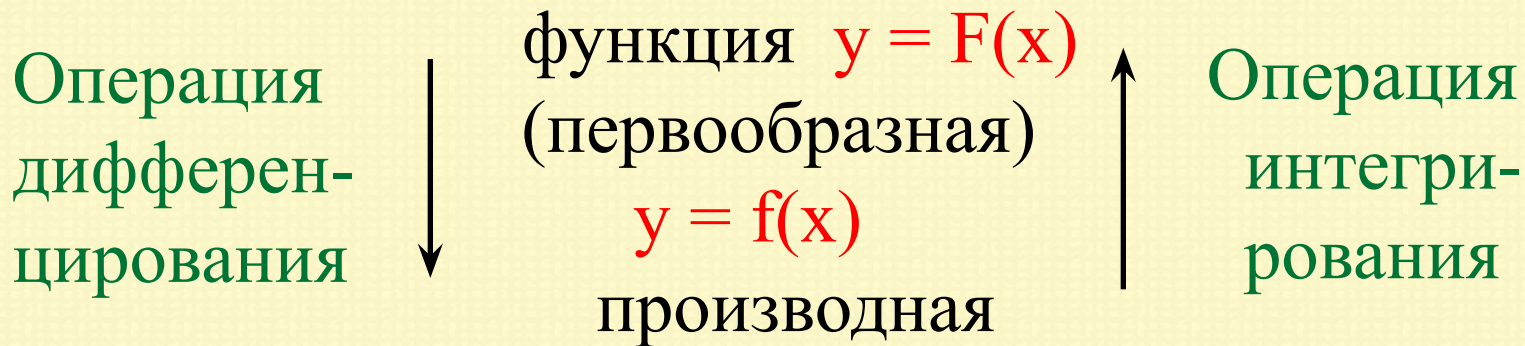


Операция
интегри-
рования

Определение первообразной

$y = F(x)$ называют первообразной для $y = f(x)$ на промежутке X , если при $x \in X$

$$F'(x) = f(x)$$



В математике много операций которые являются обратными

$$3^2 = 9$$

$$? \sqrt{9} = 3$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$? \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Сегодня мы познакомились с новой операцией
 интегрирование ? дифференцирование

Запомните: Первообразная – это родитель
производной: $F'(x)=f(x)$

Задача: Докажите, что функция $y = F(x)$ является
первообразной для функции $y = f(x)$, если:

а) $F(x) = x^2 + x^3$, $f(x) = 2x + 3x^2$

б) $F(x) = x^4 - x^{11}$, $f(x) = 4x^3 - 11x^{10}$

в) $F(x) = -4\cos x$, $f(x) = 4\sin x$

г) $F(x) = -9\sin x$, $f(x) = -9\cos x$

$f(x)$	$F(x)$
1	

Задача:

Найдите все первообразные для функций:

$$f(x)=3$$

$$f(x)=x^2$$

$$f(x)=\cos x$$

$$f(x)=12$$

$$f(x)=x^5$$

Три правила нахождения первообразных

Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют на промежутке

первообразные соответственно $y=F(x)$ и $y=G(x)$, то

Функция	Первообразная
$y = f(x) + g(x)$	$y = F(x) + G(x)$
$y = k f(x)$	$y = k F(x)$

Задача.

Для функции $y=f(x)$ найдите хотя бы одну первообразную:

а) $f(x) = 4x^2 + 6x^2$

г) $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$

б) $f(x) = -\sin x + 2\cos x$

д) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

в) $f(x) = -13\sin x + \frac{5}{\cos^2 x}$

г) $f(x) = (4 - 5x)^4$

Самостоятельно

Для функции $y=f(x)$ найдите хотя бы одну первообразную:

а) $f(x) = 3x^4 - 5x^2$

б) $f(x) = 3\cos x - \sin x$

в) $f(x) = \cos x + \frac{1}{\sin^2 x}$

г) $f(x) = \frac{1}{x} - 2e^x$

д) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

е) $f(x) = (3x - 12)^4$