

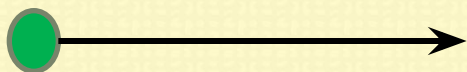
# Первообразная

*11 класс*

## *Вспомним физический смысл производной.*

Если материальная точка движется прямолинейно и её координата изменяется по закону  $s(t)$ , то скорость её движения  $v(t)$  в момент времени  $t$  равна производной  $s'(t)$ :

*материальная  
точка*



*скорость*

*движения  $v(t)$*



*$s(t)$  закон  
движения*

$$v(t) = s'(t)$$

**Задача:** Точка движется прямолинейно по закону  $s(t) = t^3 + 2t$  ( где  $s(t)$  – измеряется в м). Найдите скорость точки в момент времени  $t=2$ с.

**Решение:**

$$v(t) = s'(t).$$

$$v(t) = 3t^2 + 2$$

$$v(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14 \text{ м/с}$$

**В математике часто приходится решать обратную задачу:  
зная скорость найти закон движения.**

**Задача:** По прямой движется материальная точка, скорость которой в момент времени  $t$  задается формулой  $v(t) = 3t^2$ . Найдите закон движения.

**Решение:** Пусть  $s(t)$  – закон движения

так как  $v(t) = s'(t)$

$$s'(t) = 3t^2, \quad s(t) = t^3.$$

надо найти функцию, производная которой равна  $3t^2$ .

Эта задача решена верно, но не полно.

Эта задача имеет бесконечное множество решений.

$$s(t) = t^3$$

$$s'(t) = 3t^2$$

$$s(t) = t^3 + 2$$

$$s'(t) = 3t^2$$

$$s(t) = t^3 + 5$$

$$s'(t) = 3t^2$$

$$s(t) = t^3 + \frac{1}{2}$$

$$s'(t) = 3t^2$$

можно сделать вывод, что любая функция вида  $s(t) = t^3 + C$  является решением данной задачи, где  $C$  любое число.

При решении задачи, мы, зная производную функции, восстановили ее первичный образ.

Эта операция восстановления - операция **интегрирования**.

Восстановленная функция – **первообразная**  
( первичный образ функции)

Операция  
дифферен-  
цирования



функция  $y = F(x)$   
(первообразная)

$y = f(x)$

производная

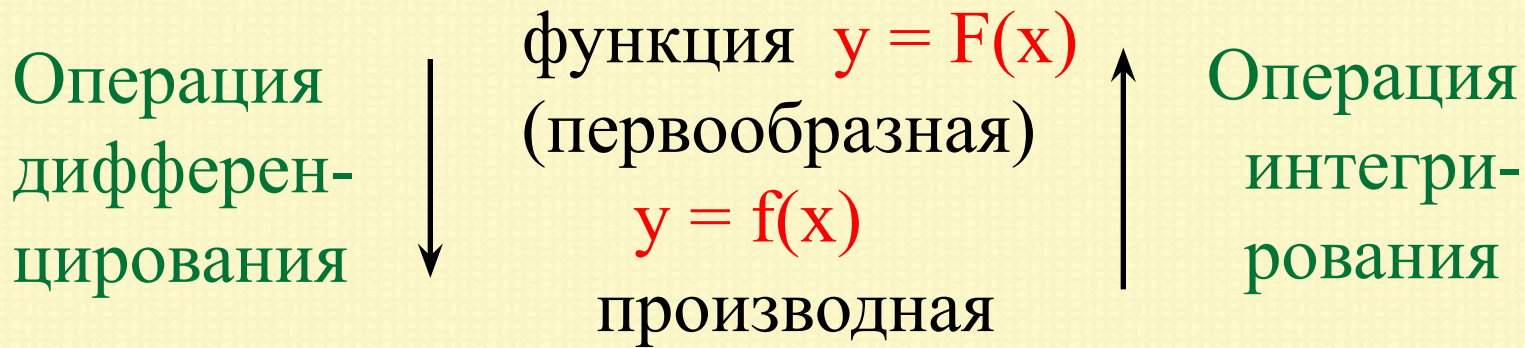


Операция  
интегри-  
рования

# Определение первообразной

$y = F(x)$  называют первообразной для  $y = f(x)$  на промежутке  $X$ , если при  $x \in X$

$$F'(x) = f(x)$$



В математике много операций которые являются обратными

$$3^2 = 9$$

$$? \sqrt{9} = 3$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$? \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Сегодня мы познакомились с новой операцией  
 интегрирование ? дифференцирование

**Запомните:** Первообразная – это родитель  
производной:  $F'(x)=f(x)$

**Задача:** Докажите, что функция  $y = F(x)$  является  
первообразной для функции  $y = f(x)$ , если:

а)  $F(x) = x^2 + x^3$ ,  $f(x) = 2x + 3x^2$

б)  $F(x) = x^4 - x^{11}$ ,  $f(x) = 4x^3 - 11x^{10}$

в)  $F(x) = -4\cos x$ ,  $f(x) = 4\sin x$

г)  $F(x) = -9\sin x$ ,  $f(x) = -9\cos x$



$f(x)$	$F(x)$
1	

**Задача:**

Найдите все первообразные для функций:

$$f(x)=3$$

$$f(x)=x^2$$

$$f(x)=\cos x$$

$$f(x)=12$$

$$f(x)=x^5$$

# Три правила нахождения первообразных

Если функции  $y=f(x)$  и  $y=g(x)$  имеют на промежутке

первообразные соответственно  $y=F(x)$  и  $y=G(x)$ , то

Функция	Первообразная
$y = f(x) + g(x)$	$y = F(x) + G(x)$
$y = k f(x)$	$y = k F(x)$

## Задача.

Для функции  $y=f(x)$  найдите хотя бы одну первообразную:

а)  $f(x) = 4x^2 + 6x^2$

г)  $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$

б)  $f(x) = -\sin x + 2\cos x$

д)  $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

в)  $f(x) = -13\sin x + \frac{5}{\cos^2 x}$

г)  $f(x) = (4 - 5x)^4$

## Самостоятельно

Для функции  $y=f(x)$  найдите хотя бы одну первообразную:

а)  $f(x) = 3x^4 - 5x^2$

б)  $f(x) = 3\cos x - \sin x$

в)  $f(x) = \cos x + \frac{1}{\sin^2 x}$

г)  $f(x) = \frac{1}{x} - 2e^x$

д)  $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

е)  $f(x) = (3x - 12)^4$