

Непрерывность функций

Непрерывность

Определение.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной*, в точке $x = a$, если соблюдается следующие условия:

1. При $x = a$ функция $f(x)$ имеет определенное значение b .
2. При $x \rightarrow a$ функция имеет предел, тоже равный b .

При нарушении хотя бы одного из этих условий функция называется *разрывной* в точке $x = a$.

Условие непрерывности

Существование $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ равносильно тому,

что существуют равные друг другу левосторонний и правосторонний пределы функции при $x \rightarrow x_0$, равные к тому же и значению функции в точке, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Пример 1.

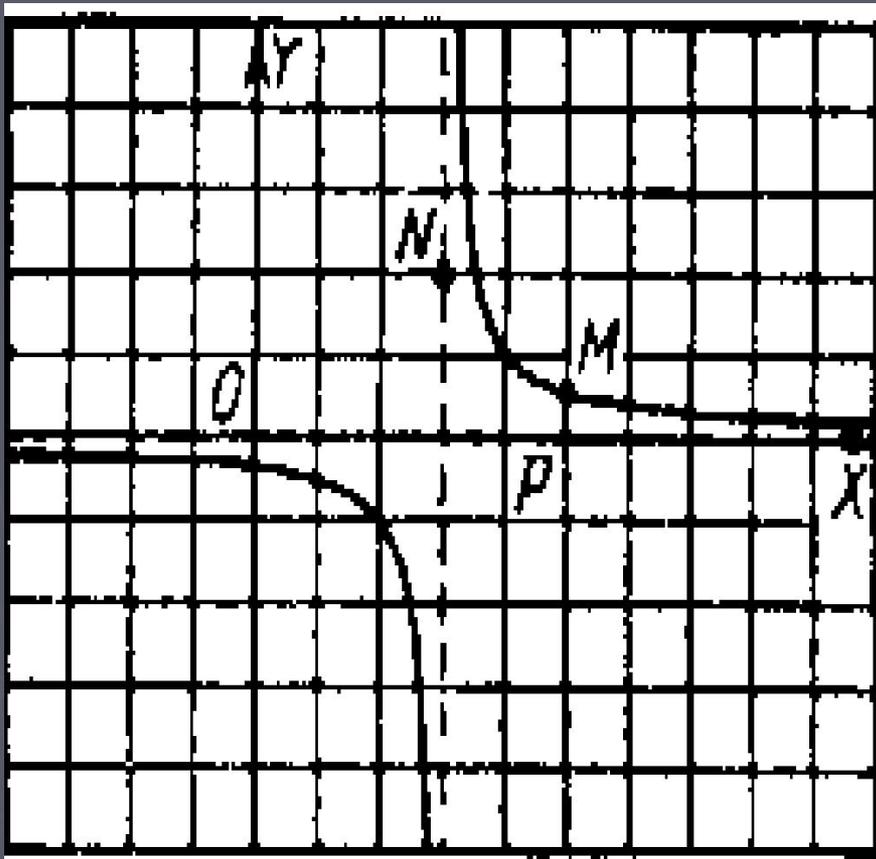


Рис 1.

Функция $f(x) = 1/(x-3)$
непрерывная в точке $x = 5$
(M на рис. 1), ибо :

- 1) При $x = 5$ она имеет определенное значение $f(5) = 1/2$;
- 2) При $x \rightarrow 5$ она имеет предел, тоже равный $1/2$.
- 3) Функция разрывна в точке $x = 3$; здесь не выполнено первое условие(функция не имеет определенного значения). Второе условие тоже не выполняется.

Свойство функций, непрерывных в точке.

Свойство 1.

Сумма, разность и произведение двух функций, непрерывных в точке $x = a$, непрерывны в этой точке. Частное u/U двух функций, непрерывных в точке $x = a$, непрерывно, если делитель U не обращается в нуль при $x = a$.

Свойства 2.

Если функция $f(x)$ непрерывна при некоторой значении x , то приращение функции бесконечно мало при бесконечно малом приращение аргумента.

Пример 2.

Функция $f(x) = 1/(x - 3)$ непрерывна в точке $x = 5$, причем $f(5) = 1/2$ (пример 1).

При $x = 5 + \Delta x$.

Функция получает значение

$$f(5 + \Delta x) = 1/(2 + \Delta x).$$

Приращение функции равно

$$f(5 + \Delta x) - f(5) = -\Delta x / (2(2 + \Delta x))$$

Оно бесконечно мало при бесконечно малом Δx .

Непрерывность на множестве

Говорят, что функция ***непрерывна на множестве X*** , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если функция непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, то говорят, что она ***непрерывна на этом отрезке***, причем непрерывность в точке a понимается как непрерывность справа, а непрерывность в точке b – как непрерывность слева.

Непрерывность

Теорема. Функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда бесконечно **малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции** в этой точке, то есть если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Теоремы о непрерывных функциях

Теорема (о непрерывности сложной функции). Пусть функция

$y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $z = f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $z = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0

Разрывы функций

Дадим теперь **классификацию точек разрыва функций**. Возможны следующие случаи.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ существуют и конечны, но не равны x_0 друг другу, то точку называют **точкой разрыва первого рода**. При этом величину $[f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]$ называют скачком функции в точке x_0 .

Разрывы функций

2. Если в точке x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$, но в точке x_0 функция либо не определена, либо $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то эта точка является **точкой устранимого разрыва**. Последнее объясняется тем, что если в этом случае **доопределить** или **видоизменить** функцию, положив

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x),$$

то получится непрерывная в точке функция.

Разрывы функций

3. Точка разрыва функции, не являющаяся точкой разрыва первого рода или точкой устранимого разрыва, является **точкой разрыва второго рода**.

Очевидно, что точки разрыва второго рода - это точки, в которых функция стремится к бесконечности. Например, $y = \frac{1}{x-1}$ в точке $x=1$ имеет разрыв 2-го рода.

Непрерывность функции на замкнутом промежутке

Определение.

Функция называется **непрерывной на замкнутом промежутке**, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка, включая оба конца.

*Аналогично определяется непрерывность функции в **незамкнутых промежутках.***

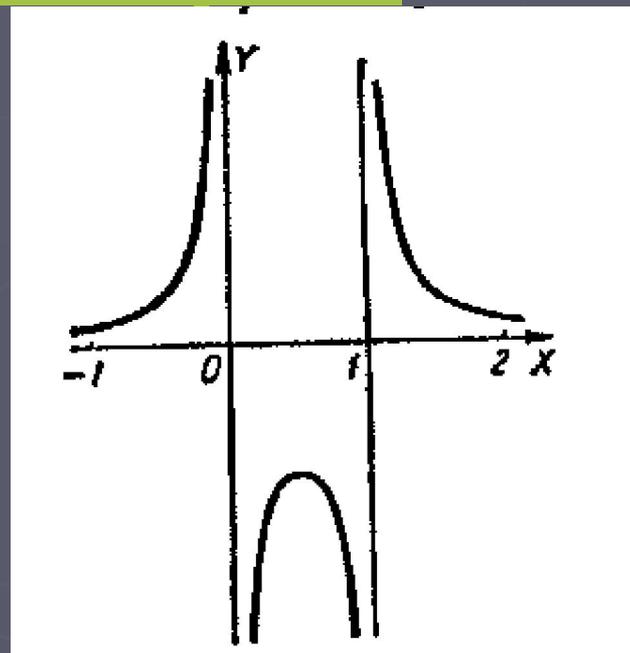


Рис 2.

Пример.

Рассмотрим функцию $1/(4x(x-1))$ (рис. 2). Она непрерывна на замкнутом промежутке $(0;1)$, ибо оба конца $x = 0$ и $x = 1$ – точки разрыва. Она разрывна и на замкнутом промежутке $(1;2)$, ибо один конец $x=1$ – точка разрыва. Она разрывна также на замкнутом промежутке $(1/2;2)$, ибо внутри промежутка лежит точка разрыва ($x=1$).

Свойство функций, непрерывных на замкнутом промежутке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке (a,b) .

Тогда она обладает следующими свойствами.

1. Среди значений, которые функция принимает в точках данного промежутка, имеется самое большое и самое малое.

Замечание 1. Среди значений, которые принимает функция $f(x)$ в точке незамкнутого промежутка (a,b) , может не быть самого большого или самого малого.

Так, в незамкнутом промежутке $(1,3)$ функция $2x$ не обладает ни наименьшим значением, ни наибольшим (она могла бы принять эти значения на концах $x=1$ и $x=3$, но из незамкнутого промежутка концы исключены).

Свойство функций, непрерывных на замкнутом промежутке

2. Если m есть значение функции $f(x)$ при $x = a$ и n — значение $f(x)$ при $x = b$, то функция $f(x)$ принимает внутри промежутка (a, b) по крайней мере по одному разу всякое значение p , заключенное между m и n .

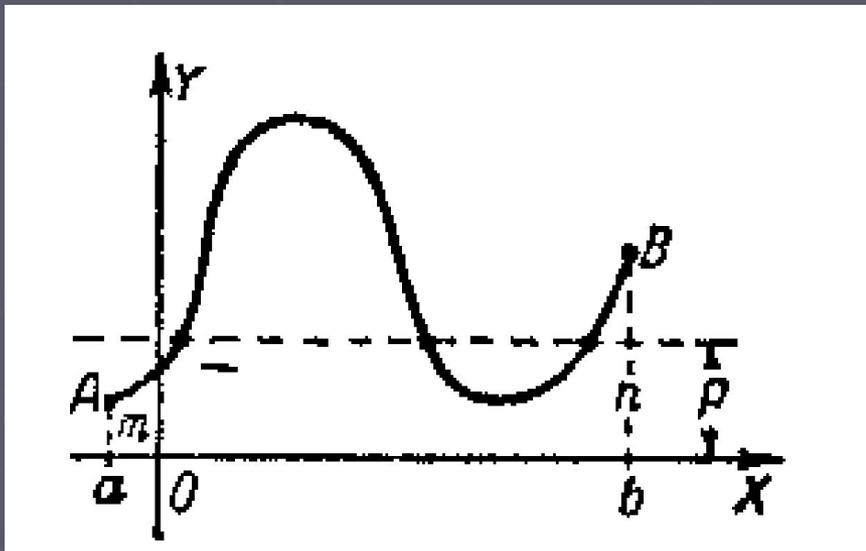


Рис. 3

Геометрически: всякая прямая, проведенная параллельно оси абсцисс выше A , но ниже точки B (рис. 3), встретит по крайней мере один раз графи AB (на рис. 3 — три раза).

Замечание 2. Разрывная функция может не обладать свойством 2.

Замечание 2. Разрывная функция может не обладать свойством 2. (Рис. 4 и 5)

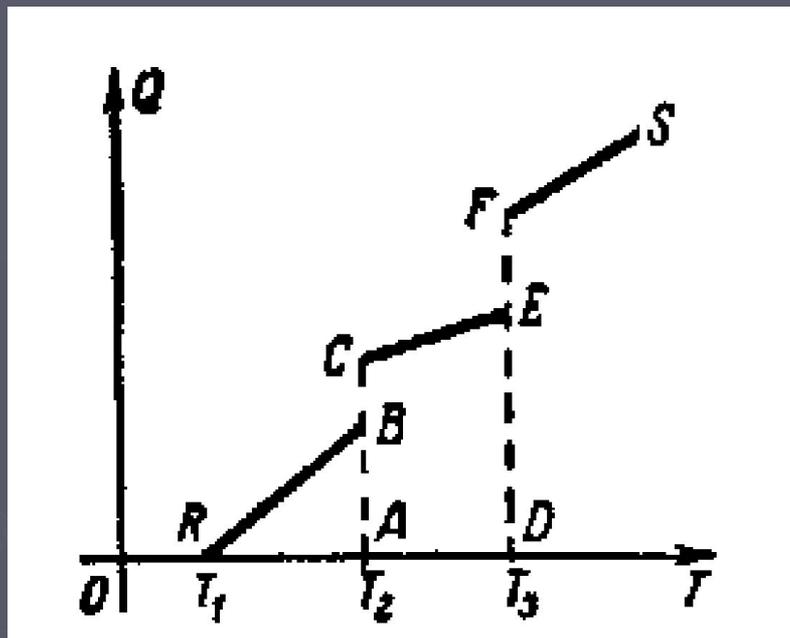


Рис. 4

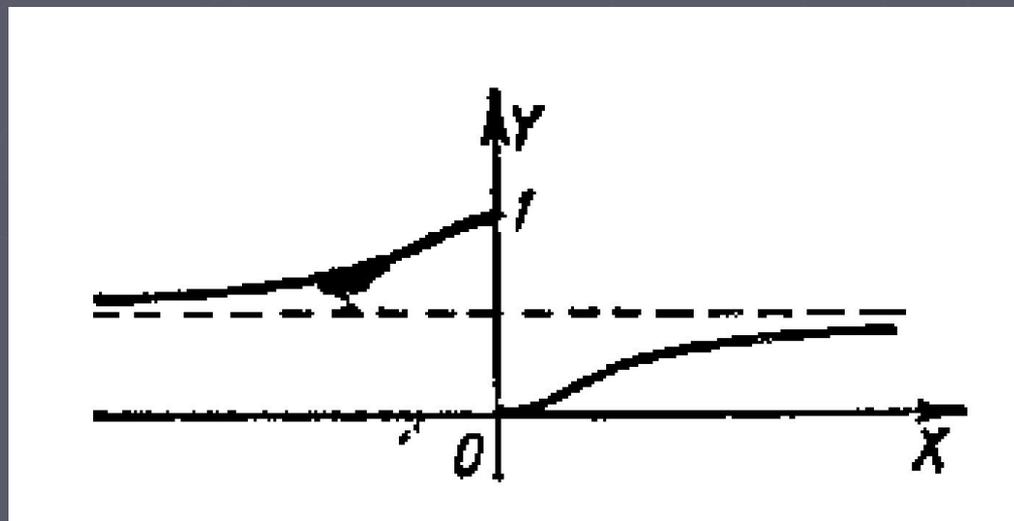


Рис. 5

Свойство функций, непрерывных на замкнутом промежутке

2а. В частности, если на одном конце промежутка функция имеет положительное, а на другом отрицательное значение, то внутри промежутка она по крайней мере один раз обращается в нуль.

Геометрически: если одна из точек A, B (рис. 6) лежит выше Ox , а другая ниже, то график AB по крайней мере один раз встречается Ox (на рис. 6 – два раза)

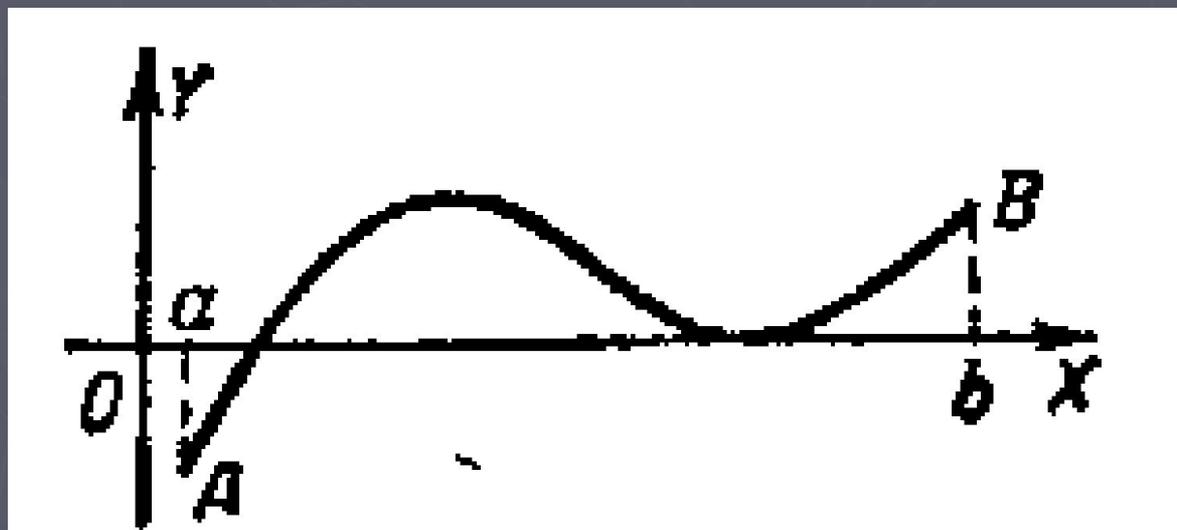


Рис. 6

Свойство функций, непрерывных на замкнутом промежутке

3. Если переменные x и x' изменяются так, что разность $x - x'$ бесконечно мала, то разность $f(x) - f(x')$ тоже бесконечно мала.

Замечание 3. Если x' есть постоянная величина c , то разность $f(x) - f(c)$ является бесконечно малой по свойству 2. В силу свойства 3 при бесконечной малости $x - x'$ разность $f(x) - f(x')$ бесконечно мала не только тогда, когда x' постоянна, но и тогда, когда x' переменна.

Замечание 4. При непрерывности функции в незамкнутом промежутке свойства 3 может не иметь места. Так, функция $1/x$ непрерывна в промежутке $(0,1)$, лишенном конца $x = 0$. Пусть x и x' изменится так, что $x' = 2x$ и $x \rightarrow 0$. Тогда разность $x - x'$ бесконечно мала, но разность $f(x) - f(x') = 1/x - 1/2x$ бесконечно велика.

Свойства непрерывных на отрезке функций

Первая теорема Больцано - Коши об обращении функции в нуль. Пусть

функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения различных знаков, т. е.

$f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда существует точка

$c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Свойства непрерывных на отрезке функций

Вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении функции.

Пусть функция определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает неравные значения

. Тогда, каково бы ни было число μ между числами $f(a) \neq f(b)$, найдется точка c такая, что

$$c \in (a, b) \quad f(c) = \mu$$

Свойства непрерывных на отрезке функций

Теорема 1 Вейерштрасса.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке ограничена, то есть существуют числа m и M такие, что $m \leq f(x) \leq M$ для любого $x \in [a, b]$.

Свойства непрерывных на отрезке функций

Теорема 2 Вейерштрасса.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих наименьшего и наибольшего значений (то есть существуют такие x_1 и x_2 на отрезке $[a, b]$, что для любого $x \in [a, b]$, т.е. для $a \leq x \leq b$, выполняется условие

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$