Непрерывность функций

<u>Непрерывность</u>

<u>Определение.</u>

Функция *f(x)* называется *непрерывной* , *в точке x = a* ,
если соблюдается следующие условия:

1. При *x = a* функция *f(x)* *имеет определенное значение b.*

2. *При x —› a функция имеет предел, тоже равный b.*

<u>При нарушение хотя бы одного из этих условий функция называется разрывной в точке x = a</u> .

Условие непрерывности

Существование $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ равносильно тому,

что существуют равные друг другу левосторонний и правосторонний пределы функции при $x \to x_0$, равные к тому же и значению функции в точке, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Пример 1.

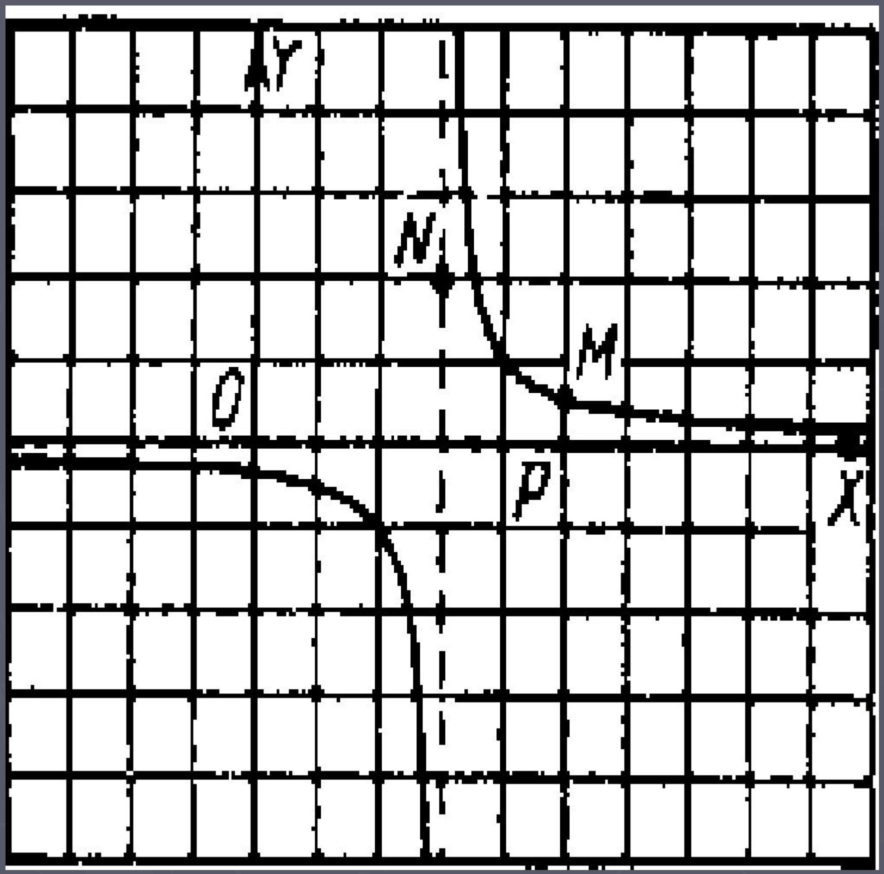

Рис 1.

Функция *f(x) = 1/(x-3)* *непрерывная в точке x = 5 (M на рис. 1), ибо :*

1) *При x = 5 она имеет определенное значение f(5) = 1/2;*
2) При x *—› 5 она имеет предел, тоже равный ½.*
3) *Функция разрывна в точке x = 3 ; здесь не выполнено первое условие(функция не имеет определенного значения). Второе условие тоже не выполняется.*

Свойство функций, непрерывных в точке.

Свойство 1.

Сумма, разность и произведение двух функций, непрерывных в точке $x = a$, непрерывны в этой точке. Частное u/U двух функций, непрерывных в точке

$x = a$, непрерывно , если делитель U не обращается в нуль при $x = a$.

Свойства 2.

Если функция $f(x)$ непрерывна при некоторой значении x, то приращение функции бесконечно мало при бесконечно малом приращение аргумента.

Пример 2.

Функция $f(x) = 1/ (x - 3)$ непрерывна в точке $x = 5$, причем $f(5) = ½$(пример 1).

При $x = 5 + \Delta x$.

Функция получает значение

$f(5 + \Delta x) = 1/(2 + \Delta x)$.

Приращение функции равно

$f(5 + \Delta x) - f(5) = - \Delta x/ (2(2+ \Delta x))$

Оно бесконечно мало при бесконечно малом Δx.

Непрерывность на <u>множестве</u>

Говорят, что функция ***непрерывна на множестве X,*** если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если функция непрерывна в каждой точке отрезка [*a*, *b*], то говорят, что она ***непрерывна на этом отрезке***, причем непрерывность в точке *a* понимается как непрерывность справа, а непрерывность в точке *b* – как непрерывность слева.

Непрерывность

Теорема. Функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда бесконечно ***малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции*** в этой точке, то есть если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Теоремы о непрерывных функциях

Теорема (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $Z=f(y)$ непрерывна в точке $y_0=f(x_0)$. Тогда сложная функция $Z=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0

Разрывы функций

Дадим теперь ***классификацию точек разрыва функций.*** Возможны следующие случаи.

1.Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ существуют и конечны, но не равны друг другу, то точку x_0 называют ***точкой разрыва первого рода.*** При этом величину $\left[f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) \right]$ называют скачком функции в точке x_0.

Разрывы функций

2.Если в точке x_0 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$, но в точке x_0 функция либо не определена, либо $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то эта точка является ***точкой устранимого разрыва.*** Последнее объясняется тем, что если в этом случае ***доопределить*** или ***видоизменить*** функцию , положив

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

то получится непрерывная в точке функция.

Разрывы функций

3. Точка разрыва функции, не являющаяся точкой разрыва первого рода или точкой устранимого разрыва, является ***точкой разрыва второго рода.***

Очевидно, что точки разрыва второго рода - это точки, в которых функция стремится к бесконечности. Например, $y = \frac{1}{x-1}$ в точке x=1 имеет разрыв 2-го рода.

Непрерывность функции на замкнутом промежутке

Определение.

Функция называется непрерывной на замкнутом промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка, включая оба конца.

Аналогично определяется непрерывность функции в незамкнутых промежутках.

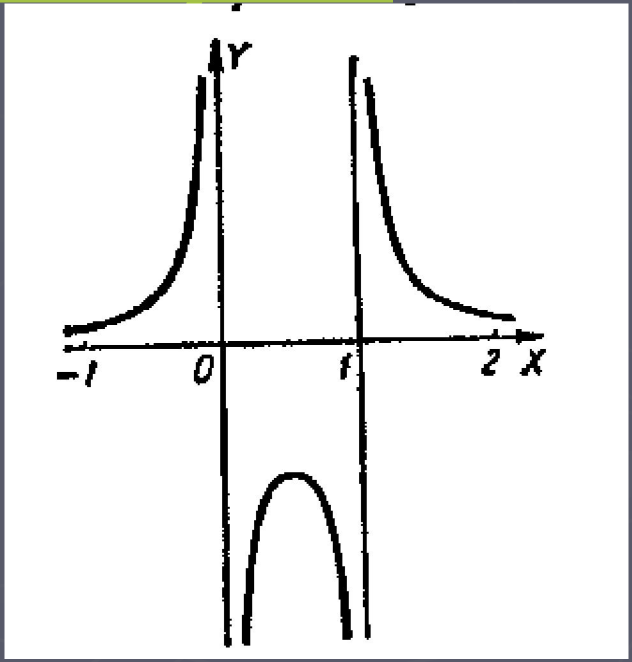

Рис 2.

Пример.

Рассмотрим функцию 1/(4x(x-1)) (рис. 2). Она непрерывна на замкнутом промежутке (0;1), ибо оба конца
x = 0 и x = 1 – точки разрыва. Она разрывна и на замкнутом промежутке (1;2), ибо один конец x=1 – точка разрыва. Она разрывнна также на замкнутом промежутке (1/2;2), ибо внутри промежутка лежит точка разрыва (x=1).

Свойство функций, непрерывных на замкнутом промежутке

Пусть функция f(x) непрерывна на замкнутом промежутке (a,b).

Тогда она обладает следующими свойствами.

1. Среди значений, которые функция принимает в точках данного промежутка, имеется самое большое и самое малое.

Замечание 1. Среди значений, которые принимает функция f(x) в точке незамкнутого промежутка (a,b), может не быть самого большого или самого малого.

Так, в незамкнутом промежутке (1,3) функция 2x не обладает ни наименьшим значением, ни наибольшим (она могла бы принять эти значения на концах x=1 и x=3 , но из незамкнутого промежутка концы исключены).

Свойство функций, непрерывных на замкнутом промежутке

2. Если m есть значение функции f(x) при x = a

и n-значение f(x) при x = b, то функция f(x) принимает внутри промежутка (a,b) по крайней мере по одному разу всякое значение *p,* заключенное между m и n.

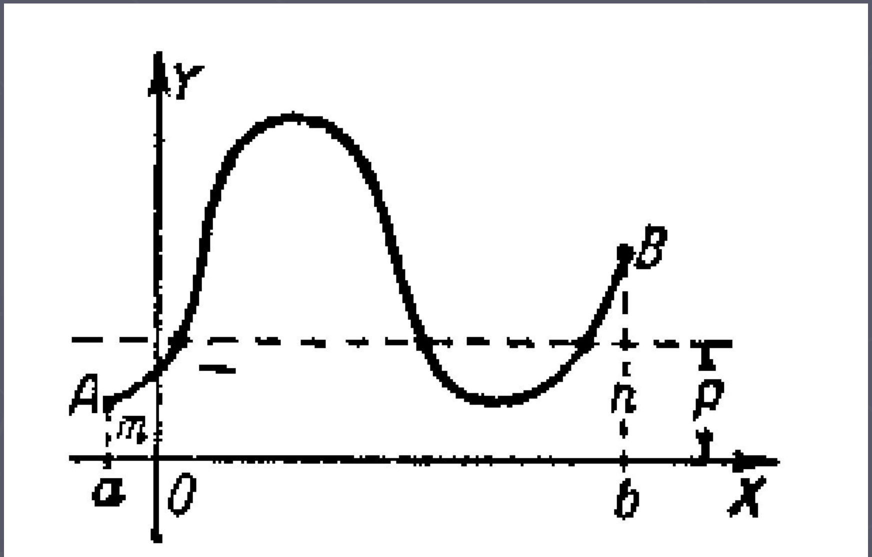

Рис. 3

Геометрически: всякая прямая, проведенная параллельно оси абсцисс выше *A* ,но ниже точки *B* (рис. 3), встретит по крайней мере один раз графи *AB(на рис. 3 – три раза).*

Замечание 2. Разрывная функция может не обладать свойством 2.

Замечание 2. Разрывная функция может не обладать свойством 2.(Рис. 4 и 5)

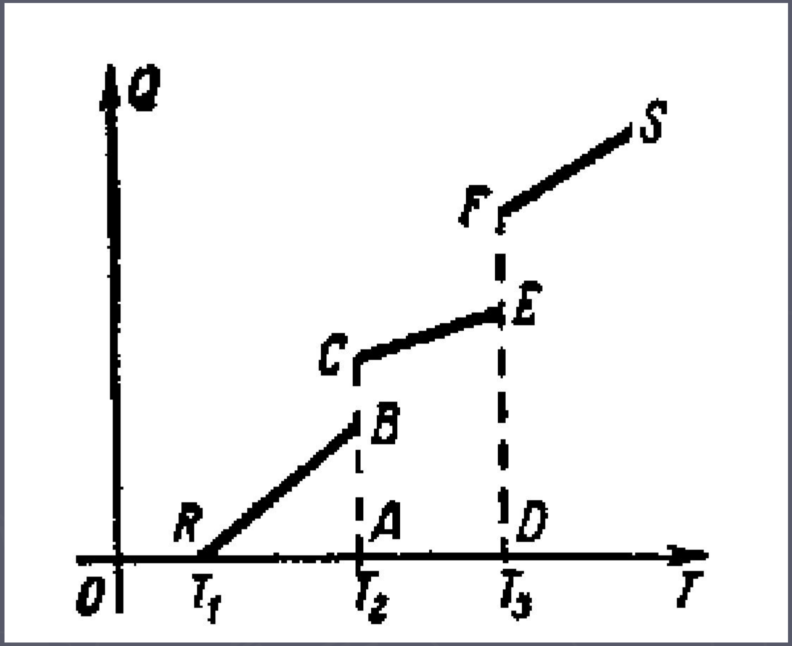

Рис. 4

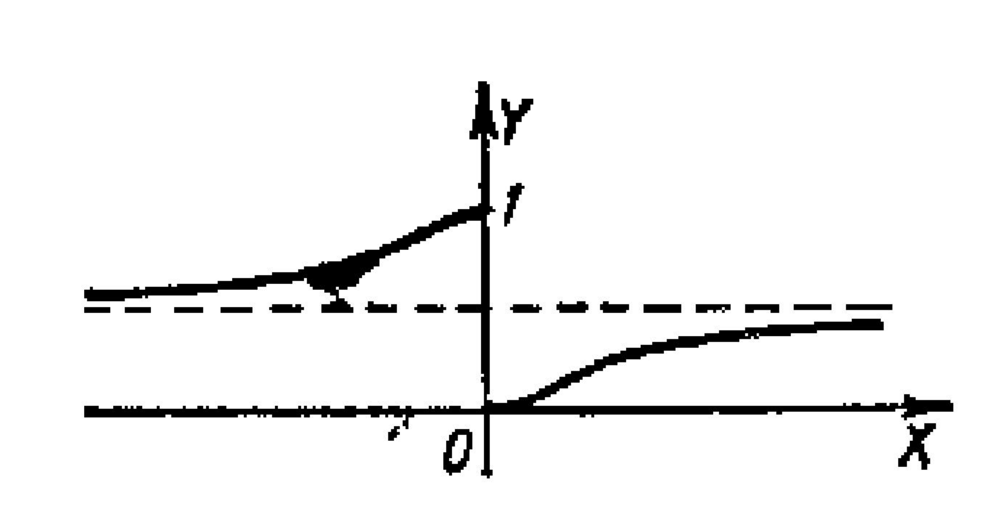

Рис. 5

Свойство функций, непрерывных на замкнутом промежутке

2а. В частности , если на одном конце промежутка функция имеет положительное, а на другом отрицательное значение, то внутри промежутка она по крайней мере один раз обращается в нуль.

Геометрически: если одна из точек A,B (рис. 6) лежит выше OX,а другая ниже , то график AB по крайней мере один раз встречает OX (на рис. 6 – два раза)

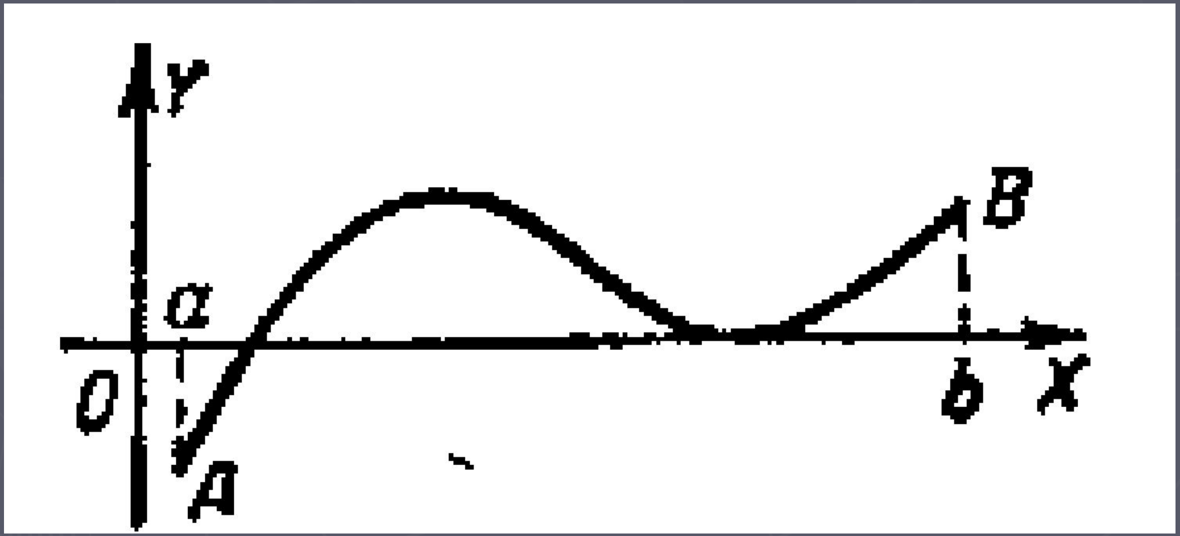

Рис. 6

Свойство функций, непрерывных на замкнутом промежутке

3. Если переменные x и x' изменяются так, что разность $x - x'$ бесконечно мала, то разность $f(x) – f(x')$ тоже бесконечно мала.

Замечание 3. Если x' есть постоянная величина c, то разность $f(x) – f(c)$ является бесконечно малой по свойству 2. В силу свойства 3 при бесконечной малости $x - x'$ разность $f(x) – f(x')$ бесконечно мала не только тогда, когда x' постоянна, но и тогда, когда x' переменна.

Замечание 4. При непрерывности функции в незамкнутом промежутке свойства 3 может не иметь места. Так, функция $1/x$ непрерывна в промежутке $(0,1)$,лишенном конца $x = 0$. Пусть x и x' изменится так, что $x' = 2x$ и $x \to 0$. Тогда разность $x - x'$ бесконечно мала, но разность $f(x) – f(x') = 1/x – 1/2x$ бесконечно велика.

Свойства непрерывных на отрезке функций

Первая теорема Больцано - Коши об обращении функции в нуль. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке [*a*, *b*] и на концах этого отрезка принимает значения различных знаков, т. е.

$f(a)\cdot f(b)<0.$ Тогда существует точка

$c\in(a,b)$ такая, что $f(c)=0.$

Свойства непрерывных на отрезке функций

Вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении функции.

Пусть функция определена и непрерывна на отрезке [*a*, *b*] и на концах этого отрезка принимает неравные значения $f(a) \neq f(b)$. Тогда, каково бы ни было число μ между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = \mu$

Свойства непрерывных на отрезке функций

Теорема 1 Вейерштрасса.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она на этом отрезке ограничена, то есть существуют числа m и M такие, что m $\leq f(x) \leq$ M для любого $x \in [a,b]$.

Свойства непрерывных на отрезке функций

Теорема 2 Вейерштрасса.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке [*a,b*], то она достигает на этом отрезке своих наименьшего и наибольшего значений (то есть существуют такие x_1 *и* x_2 на отрезке [*a,b*], что для любого $x \in [a,b]$, т.е. для $a \leq x \leq b,$ выполняется условие

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$