Методы подобия физических процессов

д.т.н. профессор

Сапожников В.Б.

Тел. +7 (916) 125 57 39, e-mail sapojnikov47@mail.ru

Анализ размерностей
Понятие размерностей. Первичные и вторичные размерности в различных системах измерений. Эталоны единиц измерений.

Единицы измерения производных величин и единицы измерения основных величин связаны друг с другом формулой размерности, которая имеет вид степенных одночленов. Так, например, при трех основных единицах измерения α, β и γ производная единица

$$\varphi = \alpha^{a} \cdot \beta^{b} \cdot \gamma^{c}.$$

В основе этого метода лежит так называемая Пи-теорема, или теорема Бэкингема, которая заключается в следующем: ***функциональная зависимость между n физическими размерными величинами всегда может быть преобразована в уравнение, содержащее m безразмерных комбинаций тех же физических величин (так называемых чисел π), причем m всегда меньше n. Разность n-m=z представляет собой число первичных (основных) единиц, например в механике и гидромеханике – единицы длины, времени и массы, т. е. z = 3, а в теплотехнике к перечисленным единицам добавляется еще температура, следовательно z = 4.***

Рассмотрим получение формулы Дарси – Вейсбаха.

Очевидно, что на потерю давления на трение в трубе $P_{тр} = h_{тр}\,\rho g$ влияют (или могут влиять) следующие факторы: длина l и диаметр d трубы, средняя скорость течения v, свойства жидкости ρ и μ и средняя высота бугорков шероховатости Δ на стенках трубы.

Запишем интересующую функцию в виде

$$P_{тр} = f_1\,(l, d, v, \rho, \mu, \Delta).$$

Число переменных $n = 7$, следовательно, в соответствии с Пи-теоремой $m = n\text{-}z = 7\text{-}3 = 4$ и вместо предыдущего можем записать

$$\pi = \varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3),$$

где π, π_1, π_2 и π_3 - безразмерные комплексы, вид которых найдем следующим путем.

Из числа n переменных выберем три с независимыми размерностями, включающими в себя три основные единицы (длины L, времени T и массы M), например d, v и ρ; их размерности в системе LTM таковы:

$$[d] = L,$$

$$[v] = LT^{-1},$$

$$[\rho] = ML^{-1}.$$

Выразим числа π, π_1, π_2 и π_3 делением на выбранные три переменные в некоторых степенях x, y и z (с соответствующими индексами) остальных четырех переменных, а именно: p_{Tp}, l, μ и Δ , которые имеют следующие размерности:

$$[p] = M / LT^2,$$
$$[l] = L, [\Delta] = L,$$
$$[\mu] = M / LT.$$

Таким образом, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \pi &= \frac{p_{Tp}}{d^x \cdot v^y \cdot \rho^z}; \qquad \pi_1 = \frac{l}{d^{x_1} \cdot v^{y_1} \cdot \rho^{z_1}}; \\ \pi_2 &= \frac{\mu}{d^{x_2} \cdot v^{y_2} \cdot \rho^{z_2}}; \qquad \pi_3 = \frac{\Delta}{d^{x_3} \cdot v^{y_3} \cdot \rho^{z_3}}. \end{aligned}\right\}$$

Найдем все 12 показателей степеней из условия безразмерности всех чисел π, т. е. сравнением размерностей при L, T и M во всех четырех выражениях, а именно:

показатели степени при L:

$-1=x+y-3z;\quad 1=x_1+y_1-3z_1;$

$-1 = x_2 + y_2 -3z_2;\quad 1= x_3+y_3 -3z_3;$

показатели степени при T:

$-2=-y;\quad 0=-y_1;\quad -1=-y_2;\quad 0=-y_3;$

показатели степени при M:

$1 = z;\quad 0 = z_1,\quad 1 = z_2;\quad 0 = z_3.$

Решая совместно полученные уравнения, получаем:

$x=0;\quad y=2;\quad z=1;$

$x_1=1;\ y_1=0;\ z_1=0;$

$x_2=1;\ y_2=1;\ z_2=1;$

$x_3=1;\ y_3=0;\ z_3=0.$

Таким образом, теперь мы можем записать

$$\frac{p_{тр}}{\rho v^2} = \varphi\left(\frac{l}{d};\ \frac{\mu}{dv\rho};\ \frac{\Delta}{d}\right)$$

или, учитывая пропорциональность между $p_{тр}$ и l/d и выражение числа Рейнольдса, находим:

$$h_{тр} = \frac{p_{тр}}{\rho g} = \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\varphi_1\left(\mathrm{Re}, \Delta/d\right).$$

Обозначив функцию φ_1 через λ_T, окончательно получим:

$$h_{TP} = \lambda_T \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

где $\lambda_T = \varphi_1 \left(\mathrm{Re}, \frac{\Delta}{d} \right)$.

Таким образом, получили формулу Дарси-Вейсбаха, а также информацию о том, какими факторами определяется коэффициент Дарси λ_T.

Соотношение между теорией подобия и анализом

С помощью аппарата анализа размерностей задача о структуре обобщенных переменных решается по следующей схеме:

1. Определяется тип задачи и выбирается система размерностей.

2. Составляется перечень величин, существенных для процесса (включая размерные постоянные).

3. Определяется число обобщенных переменных (как разность между общим числом величин и числом первичных величин).

4. Формулы размерности преобразуются в степенные комплексы.

5. Исключаются первичные величины, не входящие в перечень величин, существенных для процесса.

На этом заканчивается стадия решения, связанная с применением аппарата размерностей. Все остальные операции (выделение комплексов-аргументов и комплексов-функций, построение параметрических критериев) основаны на соображениях, не соприкасающихся с понятием размерности.

В этой схеме принципиальное значение имеют два момента:

1. Определение типа задачи (соответственно выбор системы размерностей).

Из-за неправильного понимания физического содержания задачи будет неверно определена совокупность первичных величин.

2. Составление перечня существенных величин.

Возможно искажение анализа протекания процесса при недостатке существенных величин либо при их избытке.

Различие двух форм обобщенного анализа – теории подобия и анализа размерностей – это прежде всего различие в объеме предварительных знаний.

Применимость теории подобия существенным образом зависит от возможности правильно (в аналитическом смысле) поставить задачу или, по крайней мере, составить систему основных уравнений и на основании физических соображений сформулировать условия единственности решения. Обработка этих уравнений позволяет найти обобщенные переменные в виде комплексов величин, объединяемых в одно целое именно теми связями, которые заложены уже в самой модели процесса и в неявной форме выражены в уравнениях.

Предпосылки применимости анализа размерностей существенно слабее. Важная особенность анализа размерностей заключается в том, что он опирается на аппарат, не требующий привлечения уравнений задачи. Для его применения достаточно знать, в какой системе общих соотношений выступают величины, существенные для процесса.

Сущность различия между теорией подобия и анализом размерностей заключается в том, что аппарат теории подобия применяется к уравнениям процесса, а аппарат анализа размерностей – к определительным уравнениям (формулам размерности). Если уравнения процесса неизвестны, то применение анализа размерностей становится неизбежным.

ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

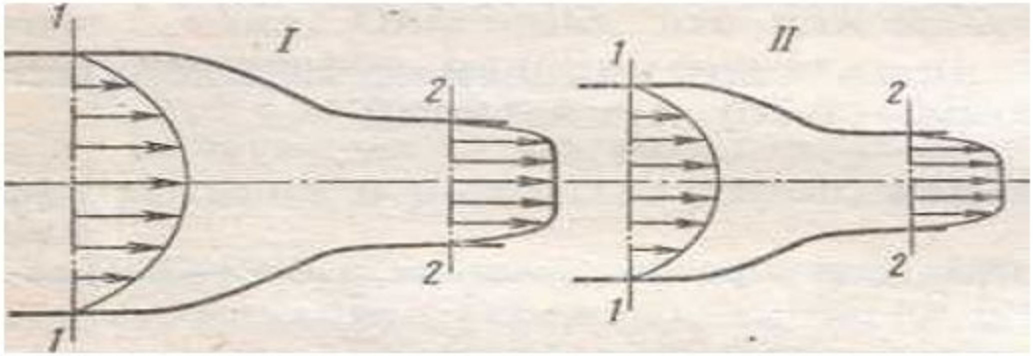
Условия гидродинамического подобия.

При изучении движения реальных жидкостей встречается много трудностей, потому что на характер движения и происходящие при этом процессы влияют многие факторы. Важный этап этого изучения - отбор определяющих для изучаемого процесса факторов. Следующий этап изучения - это установление зависимости интересующей величины от системы выбранных определяющих факторов. Этот этап может выполняться двумя путями: аналитическим, основанным на законах механики и физики, и экспериментальным. Первый путь применим для ограниченного числа задач и обычно лишь для упрощенных моделей явлений. Другой путь, экспериментальный, в принципе может учесть многие факторы, но он требует научно обоснованной постановки опытов, планирования эксперимента, ограничения его объема необходимым минимумом и систематизации результатов опытов. При этом должно быть обосновано моделирование явлений.

Эти задачи позволяет решать так называемая теория ***гидродинамического подобия,*** т. е. подобия потоков несжимаемой жидкости.

Гидродинамическое подобие складывается из трех составляющих: геометрического подобия, кинематического и динамического.

Геометрическое подобие, как известно из геометрии, представляет собой пропорциональность сходственных размеров и равенство соответствующих углов. В гидравлике под геометрическим подобием понимают подобие тех поверхностей, которые ограничивают потоки, т. е. подобие русел (или каналов). При этом предполагают подобными не только рассматриваемые участки русел, но и расположенные непосредственно перед ними и за ними, которые влияют на характер течения в рассматриваемых участках.



Подобные потоки

Отношение двух сходственных размеров подобных русел (см. рисунок) назовем линейным масштабом и обозначим через κ_L. Эта величина одинакова (idem) для подобных русел I и II, т. е.

$$\kappa_L = L_I / L_{II} = idem.$$

Кинематическое подобие означает пропорциональность местных скоростей в сходственных точках и равенство углов, характеризующих направление этих скоростей

$$\frac{v_{\text{I}}}{v_{\text{II}}}=\frac{v_x}{v_{x\text{II}}}=\frac{v_{y\text{I}}}{v_{y\text{II}}}=\frac{v_{z\text{I}}}{v_{z\text{II}}}=k_v=idem,$$

где k_v - масштаб скоростей, одинаковый при кинематическом подобии.

Так как $v = L / T$, $k_v = k_L / k_T$ (где T - время, k_T - масштаб времени), из кинематического подобия вытекает геометрическое подобие линий тока. Очевидно, что для кинематического подобия требуется геометрическое подобие русел.

Динамическое подобие – это пропорциональность сил, действующих на сходственные объемы в кинематически подобных потоках, и равенство углов, характеризующих направление этих сил.

В потоках жидкостей обычно действуют разные силы: силы давления, вязкости (трения), тяжести и др. Соблюдение их пропорциональности означает полное гидродинамическое подобие. Осуществление на практике полного гидродинамического подобия оказывается весьма затруднительным, поэтому обычно имеют дело с частичным (неполным) подобием, при котором соблюдается пропорциональность лишь основных, главных сил.

Для напорных течений в закрытых руслах, т.е. для потоков в трубах, в гидромашинах и тому подобных, такими силами, как показывает анализ, являются силы давления, вязкости и силы инерции. На жидкость действует также сила тяжести, но в напорных потоках ее действие проявляется через давление, т. е. оно сводится к соответствующему изменению давления. Поэтому, рассматривая так называемое приведенное давление $p_{пр} = p + pgz$, тем самым учитываем силу тяжести.

Силы инерции определяются произведением массы на ускорение, т. е. $F = ma$, а их отношение в подобных потоках равно масштабу сил

$$k_F = \frac{F_{\mathrm{I}}}{F_{\mathrm{II}}} = \frac{(m \cdot a)_{\mathrm{I}}}{(m \cdot a)_{\mathrm{II}}} = \frac{k_\rho \cdot k_L^3 \cdot k_L}{k_T^2} = k_\rho \cdot k_L^3 \cdot k_v ,$$

где k_ρ - масштаб плотностей.

Таким образом, силы инерции пропорциональны плотности, скорости во второй степени и размеру L во второй степени, который, в свою очередь, пропорционален площади S

$$F_{ин} \approx \rho \cdot S \cdot v^2 .$$

Заметим, что этому же произведению $\rho \cdot S \cdot v^2$ пропорциональны силы, с которыми поток воздействует (или способен воздействовать) на преграды, лопасти гидромашин, обтекаемые тела. Примем силы инерции за основу и будем другие силы, действующие на жидкость, сравнивать с инерционными, т. е. с выражением $\rho \cdot S \cdot v^2$.

Таким образом, для гидродинамических подобных потоков I и II имеем

$$\left(\frac{F}{\rho \cdot S \cdot v^2}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{F}{\rho \cdot S \cdot v^2}\right)_{\mathrm{II}} = Ne = idem. \qquad (2.1)$$

Это отношение, одинаковое для подобных потоков, называют числом Ньютона. Здесь под F подразумевается основная сила: сила давления, вязкости, тяжести или др. Следовательно, соотношение представляет собой общий вид закона гидродинамического подобия. Рассмотрим три характерных случая воздействия на движущуюся жидкость основных сил и найдем условия подобия потоков.

1. На жидкость действуют лишь силы давления и инерции. Тогда $F = \Delta pS \sim \Delta pL^2$ и условие (2.1) примет вид

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho v^2}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\Delta p}{\rho v^2}\right)_{\mathrm{II}} = Eu = idem,$$

где Δp – некоторая разность давлений (или просто давление); Eu – безразмерный критерий, называемый числом Эйлера.

Следовательно, условием гидродинамического подобия геометрически подобных потоков в данном случае является равенство для них чисел Эйлера.

Из предыдущего ясен ***физический смысл числа Эйлера: это есть величина, пропорциональная отношению сил давления к силам инерции.***

2. На жидкость действуют силы вязкости, давления и инерции. Тогда

$$F = \mu\,(dv/dy)\,S \sim v{\cdot}p\,(v/L)\,L^2 \sim v{\cdot}p{\cdot}v{\cdot}L$$

и условие (2.1) после деления последнего выражения на $p\cdot v^2\cdot L^2$ примет вид

$$\left(\frac{v}{\upsilon\cdot L}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{v}{\upsilon\cdot L}\right)_{\mathrm{II}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\upsilon\cdot L}{v}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\upsilon\cdot L}{v}\right)_{\mathrm{II}} = Re = idem.$$

Следовательно, условием гидродинамического подобия геометрически подобных потоков в рассматриваемом случае будет равенство чисел Рейнольдса, подсчитанных для сходственных сечений потоков. Последнее условие считается особенно важным в данном курсе, так как им устанавливается основной критерий подобия напорных потоков - число Рейнольдса. За характерный размер L при подсчете числа Рейнольдса должен приниматься поперечный размер потока, например, диаметр сечения.

Из предыдущего ясен ***физический смысл числа Рейнольдса: это есть величина, пропорциональная отношению сил вязкости к силам инерции.***

3. На жидкость действуют силы тяжести, давления и инерции. Тогда $F \sim p \cdot g \cdot L^3$ и условие (2.1) принимает вид

$$\left(\frac{\rho \cdot d \cdot L^3}{\rho \cdot \upsilon^2 \cdot L^3}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\rho \cdot d \cdot L^3}{\rho \cdot \upsilon^2 \cdot L^3}\right)_{\mathrm{II}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\upsilon^2}{g \cdot L}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\upsilon^2}{g \cdot L}\right)_{\mathrm{II}} = Fr = idem, \quad (2.2)$$

где Fr – безразмерный критерий, называемый числом Фруда.

Следовательно, условием гидродинамического подобия геометрически подобных потоков в данном случае является равенство чисел Фруда.

Из предыдущего ясно, что ***число Фруда – это величина, пропорциональная отношению сил инерции к силам тяжести.***

Критерий Фруда важен при рассмотрении безнапорных течений в открытых руслах, для напорных течений его можно не учитывать.

Для установления связи между гидродинамическим подобием и основным уравнением гидравлики - уравнением Бернулли - рассмотрим два напорных потока I и II, которые подобны друг другу гидродинамически (см. рисунок), и отметим на них сходственные сечения 1-1 и 2-2.

Запишем уравнение Бернулли для тех же сечений 1-1 и 2-2 одного из напорных потоков вязкой жидкости, подобных гидродинамически. Будем иметь

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \varsigma_1 \frac{v_2^2}{2g}.$$

После приведения этого уравнения к безразмерному виду подобно предыдущему получим

$$2(p_1 - p_2)/\left(\rho v_2^2\right) = 2Eu = \alpha_2 - \alpha_1 (S_2^2 / S_1^2) + \zeta.$$

Число Eu одинаково для рассматриваемых подобных потоков вследствие их динамического подобия; коэффициенты Кориолиса a_1 и a_2 одинаковы из-за кинематического подобия, следовательно, одинаковым будет и коэффициент потерь ζ, а также все уравнение.

Если же рассматривать подобные потоки в трубах постоянного сечения, то одинаковым будет коэффициент потерь на трение по длине (λ).

Итак, в подобных напорных потоках имеем равенство безразмерных коэффициентов и чисел a, ζ, λ, *Eu*, *Re* и некоторых других, которые будут введены в рассмотрение ниже. Изменение числа *Re* означает, что изменяется соотношение основных сил в потоке, в связи с чем указанные коэффициенты могут также несколько измениться. Поэтому все коэффициенты следует рассматривать как функции основного и определяющего критерия для напорных потоков вязкой жидкости - числа Рейнольдса *Re* (хотя в некоторых интервалах числа *Re* эти коэффициенты могут оставаться постоянными).

При экспериментальных исследованиях и моделировании напорных течений в лабораторных условиях необходимо, во-первых, обеспечить геометрическое подобие модели (I) и натуры (II), включая условия входа и выхода, и, во-вторых, соблюсти равенство чисел Рейнольдса: $Re_{\mathrm{I}} = Re_{\mathrm{II}}$. Из второго условия получаем необходимую скорость потока при эксперименте

$$\upsilon_{\mathrm{I}} = \upsilon_{\mathrm{II}}(L_{\mathrm{II}} \cdot \nu_{\mathrm{I}})/(L_{\mathrm{I}} \cdot \nu_{\mathrm{II}}).$$

В частном случае при $\nu_{\mathrm{I}} = \nu_{\mathrm{II}}$ скорость при эксперименте должна быть больше натурной в $L_{\mathrm{II}}/L_{\mathrm{I}}$ раз. Применяя менее вязкую жидкость (или ту же жидкость, но при повышенной температуре), можно снизить скорость ν_{I}.

Помимо перечисленных основных критериев подобия (*Eu, Re, Fr*), в гидравлике применяют и другие критерии для особых случаев течения жидкости. Так, при рассмотрении течений, связанных с поверхностным натяжением (например при распаде струи на капли, при впрыскивании топлива в ДВС), вводят критерий Вебера (*We*), равный отношению сил поверхностного натяжения к силам инерции. Для этого случая условие (2.1) принимает вид

$$We = \sigma \cdot L/(p \cdot v^2 \cdot L^2) = \sigma/(p \cdot v^2 \cdot L) = idem.$$

При рассмотрении неустановившихся (нестационарных) периодических течений с периодом T (например, течений в трубопроводе, присоединенном к поршневому насосу) вводят критерий Струхаля (*Sh*), учитывающий силы инерции от нестационарности, называемые локальными. Последние пропорциональны массе (pL^3) и ускорению dv/dt, которое, в свою очередь, пропорционально v/T. Следовательно, условие (2.1) для этого случая принимает вид

$$p \cdot L^3 \cdot v/(p \cdot v^2 \cdot L^2 \cdot T) = L/(v \cdot T) = idem \quad \text{или} \quad Sh = v \cdot (T/L) = idem.$$

При рассмотрении движений жидкости с учетом ее сжимаемости (например движений эмульсий) вводят критерий Маха (M), учитывающий силы упругости. Последние пропорциональны площади (L^2) и объемному модулю упругости $K = p \cdot c^2$. Поэтому силы упругости пропорциональны pc^2L^2 и условие (2.1) принимает вид

$$P \cdot c^2 \cdot L^2/(p \cdot v^2 \cdot L^2) = c^2/(v^2) = idem \text{ или } M = v/c = idem.$$

Критерий Маха имеет очень большое значение при рассмотрении движений газа. Чем ближе число M к единице, тем больше влияние сжимаемости газа при его движении.