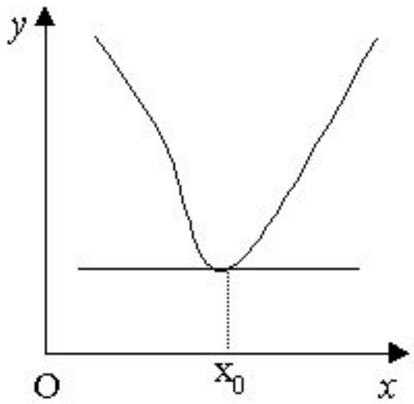
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИЗУЧЕНИЮ ФУНКЦИЙ

1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма: Если дифференцируемая на промежутке X функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0)=0$.

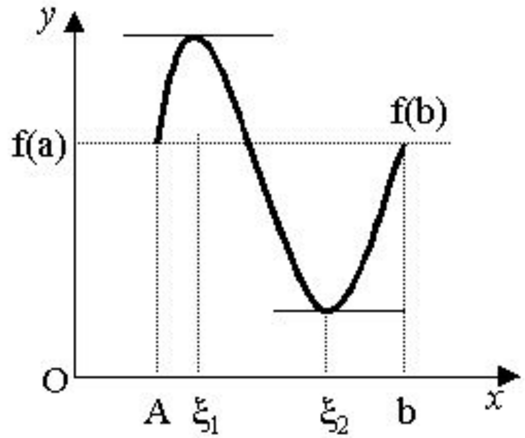


Геометрический смысл теоремы Ферма очевиден: в точке наибольшего и наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка X, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля: Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- дифференцируема на интервале (a, b);
- на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a)=f(b)$.

тогда внутри отрезка существует, по крайней мере одна такая точка $\zeta \in (a, b)$, в которой производная функции равна нулю: $f'(\xi)=0$.



Геометрический смысл теоремы Ролля: найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс; в этой точке производная и будет равна нулю (на рис. таких точек две - ξ_1, ξ_2).

Теорема Лагранжа: Пусть функция *y=f(x)* удовлетворяет следующим условиям:

1. непрерывна на отрезке *[a ,b]*;
2. дифференцируема на интервале *(a, b)*.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\zeta \in (a, b)$, в которой производная функции равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке, т.е.

$$f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Формула может быть также переписана в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\zeta)(b - a)$$

2. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя: предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле. То есть, если имеется неопределенность вида 0/0 или ∞/∞, то

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример. Найти предел $y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^x}{1-x}$

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^x}{1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-x^x\right)'}{\left(1-x\right)'}=\lim_{x\to 1}\left(x^x\right)'=\lim_{x\to 1}x^x\left(1+\ln x\right)=1$$

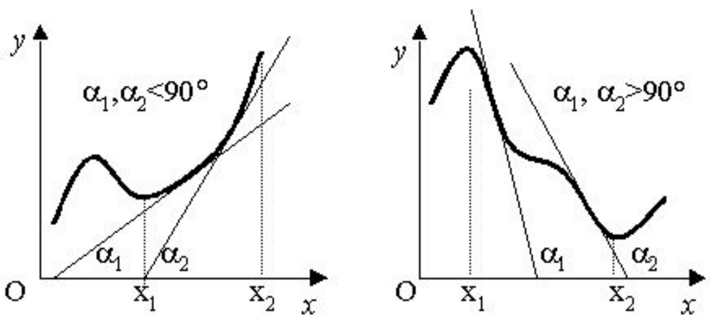
Здесь для вычисления производной от функции x^x мы использовали формулу производной степенно-показательной функции $y=f(x)^{\phi(x)}$.

3. Возрастание и убывание функций

Функция *y=f(x)* называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ верно неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) > f(x_1)$).

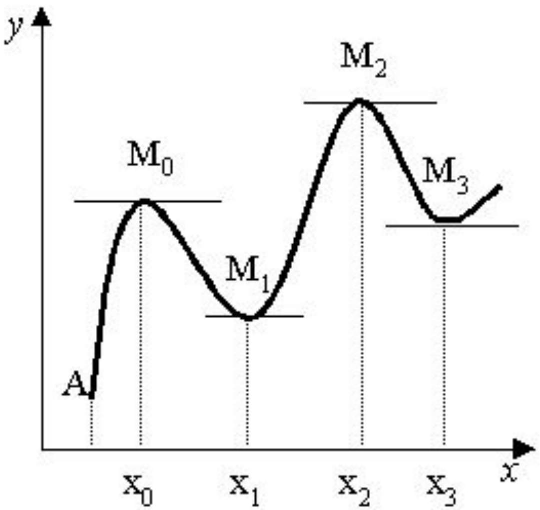
Теорема (*достаточное условие возрастания функции*): если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка X, то она возрастает на этом промежутке.

Теорема (*достаточное условии убывания функции*): если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка X, то она убывает на этом промежутке.



Необходимое условие монотонности: если функция возрастает (убывает) на некотором промежутке X, то можно лишь утверждать, что производная неотрицательна (неположительна) на этом промежутке: $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), *т.е. в отдельных точках производная монотонной функции может равняться нулю.*

4. Экстремум функции



Рассмотрим график некоторой функции *f(x)*. На этом графике мы имеем последовательное чередование промежутков возрастания и убывания функции. Точки кривой, которые отделяют промежутки возрастания от промежутков убывания, называются вершинами кривой.

Точка x_0 называется ***точкой максимума функции*** *f(x)*, если значение *f(x)* в этой точке больше всех ее значений в ближайших точках, т.е. выполняется неравенство $f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$, для всяких Δx как положительных, так и отрицательных, достаточно малых по абсолютному значению.

Точка x_1 называется ***точкой минимума функции*** *f(x)*, если значение *f(x)* в этой точке меньше всех ее значений в ближайших точках, т.е. выполняется неравенство $f(x_1+\Delta x)>f(x_1)$, для всяких Δx как положительных, так и отрицательных, достаточно малых по абсолютному значению.

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно ***максимумом и минимумом функции***. Максимумы и минимумы функции объединяются общим понятием ***экстремума функции***. Точки M_0, M_1, M_2, M_3 – экстремумы функции $f(x)$.

Поэтому ***необходимое условие экстремума***:

Для того чтобы функция $y=f(x)$ имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю $f'(x_0)=0$ или не существовала.

Точка $x \in X$, в которой выполнено необходимое условие экстремума: производная равна нулю называется ***стационарной,*** не существует - ***критической***. При этом критическая точка вовсе не обязательно является точкой экстремума.

Достаточное условие экстремума.

Теорема 1: если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции $y=f(x)$, а если с минуса на плюс, то точка минимума.

Теорема 2: если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции $f(x)$ равна нулю в некоторой точке x_0, а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то точка x_0 есть точка минимума функции; если $f''(x_0)$ отрицательна, то x_0 – точка максимума.

Схема исследования функции $y=f(x)$ на экстремум:

1. Найти производную $y'=f'(x)$.
2. Найти критические точки функции, в которых производная $f'(x)=0$ или не существует.
3. Найти вторую производную $f''(x)$ и определить ее знак в каждой критической точке. Либо: исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции.
4. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Пример. Найти экстремумы функции $y=x^3-3x^2-4$.

Решение. 1. Находим первую производную $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$.

2. Находим критические точки из условия $y'=3x(x-2)=0$: $x_1=0$, $x_2=2$.

3. Находим $y''=6x-6$. Значения второй производной в критических точках: $y''(x=0)=-6<0$, $y''(x=2)=6>0$. Следовательно, в точке $x=0$ локальный максимум, а в точке $x=2$ – минимум.

4. Находим $y_{max}(0)=-4$, $y_{min}(2)=-8$.

Пример. Капитал в 1 млн. руб. может быть размещен в банке по *50%* годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере *100%*, а издержки задаются квадратичной зависимостью. Прибыль облагается налогом в *p%*. При каких значениях *p* вложение в производство является более эффективным, нежели чистое размещение капитала в банке?

Решение. Пусть *x* (млн. руб.) инвестируется в производство, а 1-*x* – размещается под проценты. Тогда капитал, размещенный в банке, через год станет равным $(1\text{-}x)(1+50/100)=1.5(1\text{-}x)$, а капитал, вложенный в производство: $x(1+100/100)=2x$. Издержки составят ax^2, т.е. прибыль от вложения в производство $C=2x\text{-}ax^2$. Налоги составят $(2x\text{-}ax^2)p/100$, т.е. чистая прибыль окажется равной $(1\text{-}p/100)(2x\text{-}ax^2)$. Общая сумма через год составит

$$A(x)=1.5-1.5x+\left(1+\frac{p}{100}\right)(2x-ax^2)=1.5+\left[2\left(1-\frac{p}{100}\right)-1.5\right]x-a\left(1-\frac{p}{100}\right)x^2$$

требуется найти максимальное значение этой функции на отрезке *[0, 1]*. Имеем

$$A'(x)=2\left(1-\frac{p}{100}\right)-1.5-2a\left(1-\frac{p}{100}\right)x=0 \text{ при } x_0=\frac{2\left(1-\frac{p}{100}\right)-1.5}{2a\left(1-\frac{p}{100}\right)}$$

$$A''(x)=-2a\left(1-\frac{p}{100}\right)<0$$

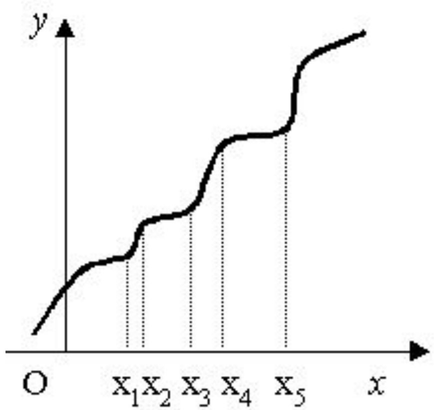
, т.е. точка x_0 – точка максимума. Чтобы x_0 принадлежала отрезку *[0, 1]*, необходимо выполнение условия

$$0<2\left(1-\frac{p}{100}\right)-1.5<1$$

или $p<25$.

Таким образом, если $p>25$, то выгодно ничего не вкладывать в производство и разместить весь капитал в банк.

5. Выпуклость функции и точки перегиба

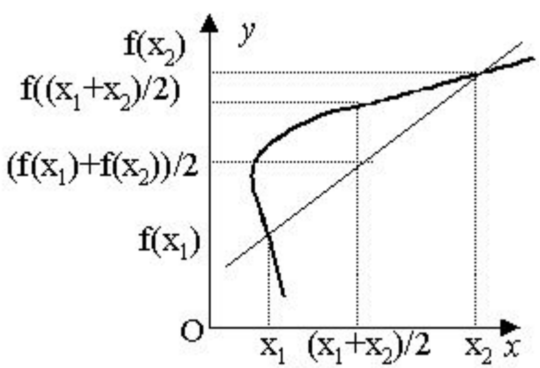


Точки экстремума во многом определяют структура графика функции. Определим теперь другие точки функции, которые также следует найти, чтобы качественно построить ее график.

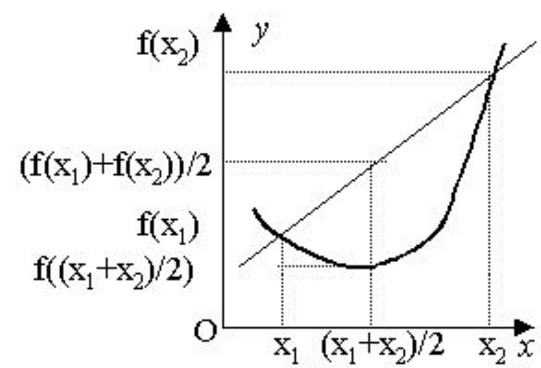
Функция $f(x)$ возрастает на всей числовой оси и не имеет экстремумов. Вместе с тем, в точках x_1, x_2, x_3, x_4 график как бы перегибается. Такие точки называют *точками перегиба*.

Функция $y=f(x)$ называется ***выпуклой вверх*** (**выпуклой вниз**) на промежутке X, если для любых двух значений x_1, $x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство

$$\boxed{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}} \qquad \boxed{\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)}$$



если функция выпукла вниз, то отрезок, соединяющий любые две точки графика, целиком лежит над графиком, если – выпукла вверх, то весь отрезок целиком лежит под графиком функции.



Достаточное условие выпуклости функции вниз (вверх) диктуется следующей ***теоремой***:

Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка X, то функция выпукла вниз (вверх) на этом промежутке.

Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх.

Из вышесказанного следует, что точки перегиба – это точки экстремума первой производной. Отсюда вытекает *необходимое условие перегиба*: вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции $f(x)$ в точке перегиба x_0 равна нулю: $f''(x)=0$.

Достаточное условие перегиба: если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции $f(x)$ при переходе через некоторую точку x_0 меняет свой знак, то x_0 есть точка перегиба ее графика.

Схема исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

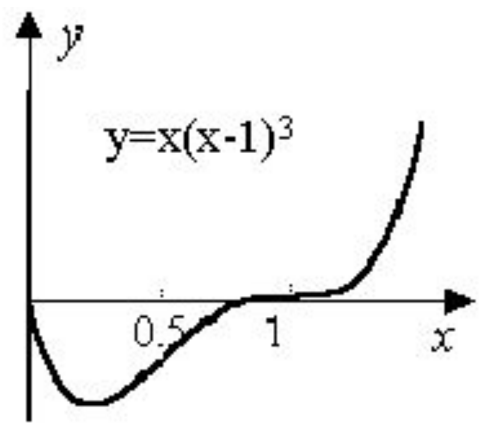
1. Найти вторую производную функции $f''(x)$.
2. Найти точки, в которых вторая производная равна нулю $f''(x)=0$ или не существует.
3. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и наличия точек перегиба.
4. Найти значения функции в точках перегиба.

Пример. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y=x(x-1)^3$.

Решение. 1. Найдем $y'=(x-1)^2(4x-1)$, $y''=2(x-1)(4x-1)+4(x-1)^2=12(x-0.5)(x-1)$

2. $y''=12(x-0.5)(x-1)=0$ в точках $x_1=0.5$ и $x_2=1$.

3. Для исследования знака второй производной на интервале $(-\infty, 0.5)$ выберем $x=-1$. $y''(-1)=36>0$. Следовательно, на этом интервале функция выпукла вниз. Аналогично, функция на интервале $(1, \infty)$ также выпукла вниз. На интервале $(0.5, 1)$ $y''<0$ и на нем функция выпукла вверх.



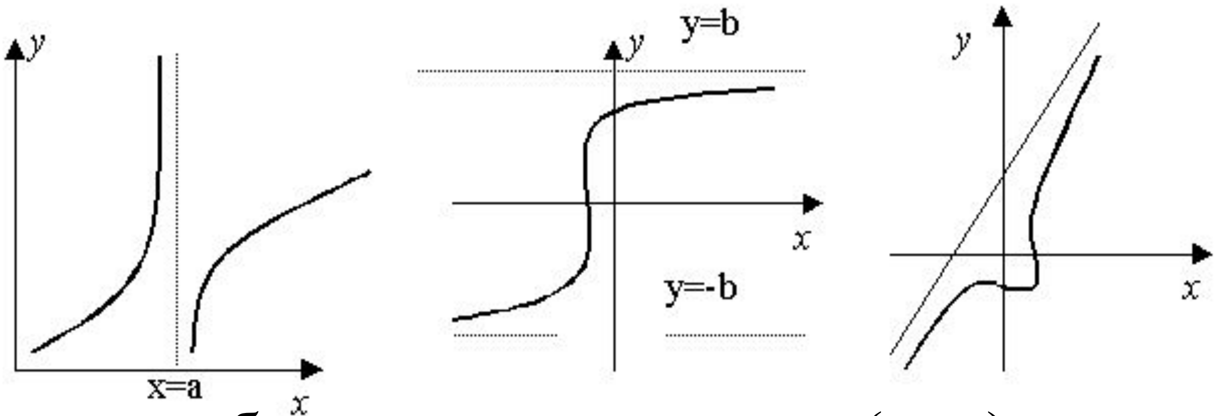
Поскольку y'' при переходе через точку $x=0.5$ меняет знак с плюса на минус и, наоборот, в точке $x=1$ с минуса на плюс, то они и будут являться точками перегиба.

4. Значения функции в точках перегиба $f(0.5)=-1/16$, $f(1)=0$.

График функции приведен на рисунке.

6. Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции *y=f(x)* называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки *(x, f(x))* до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.



Асимптоты могут быть вертикальными (*x=a*), горизонтальными (*y=b*, *y=-b*) и наклонными см. рисунок.

Теорема 1. Пусть функция *y=f(x)* определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, возможно, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции при $x\to x_0-0$ (слева) или при $x\to x_0-0$ (справа) – равен бесконечности, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$

Тогда прямая $x=x_0$ является ***вертикальной асимптотой графика функции*** *y=f(x)*.

Теорема 2. Пусть функция *y=f(x)* определена при достаточно больших *x* и существует конечный предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

Тогда прямая *y=b* есть ***горизонтальная асимптота графика функции*** *y=f(x)*.

Если конечен только один из пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b_л$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b_п$ то функция имеет лишь левостороннюю $y=b_л$ или правостороннюю $y=b_п$ горизонтальную асимптоту.

Теорема 3. Пусть функция *y=f(x)* определена при достаточно больших *x* и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = b$

и $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$

Тогда прямая *y=kx+b* является ***наклонной асимптотой графика функции*** *y=f(x)*.

Наклонная асимптота, так же как и горизонтальная, может быть правосторонней или левосторонней.

Пример. Найти асимптоты графика дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},\ c \neq 0,\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Решение. Из области определения выпадает точка $x = -\frac{d}{c}$. Найдем пределы функции *f(x)* при $x \to -\frac{d}{c}$

$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = \pm\infty$$ и прямая $x = -\frac{d}{c}$ является вертикальной асимптотой. Далее

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} = \frac{a}{c}$$

Отсюда следует, что прямая $y = \frac{a}{c}$ является горизонтальной асимптотой. Так, например, асимптотами функции $y = \frac{3-2x}{x+1}$ являются прямые *x*=-1 и *y*=-2.

7. Общая схема исследования функций

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции и точки пересечения ее графика с осями координат.
2. Исследовать функцию на четность-нечетность.
3. Исследовать функцию на периодичность.
4. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Исследовать функцию на экстремум, найти интервалы монотонности функции.
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.
8. Построить график и найти область значений.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

Решение.

1. Область определения функции: $x \neq \pm 1$. Точки пересечения с осью Ox находим из условия $y=0$: $x^3+x^2-3x+1=0$. Делитель свободного члена равен 1. Следовательно, корень $x_1=1$. Разделим наше уравнение на $x-x_1$:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x - 3x + 1 & \underline{x-1} \\ x^3 - x^2 & x^2 + 2x - 1 \\ \quad 2x^2 - 3x + 1 & \\ \qquad -x + 1 & \end{array}$$

Таким образом, $x^3+x^2-3x+1=(x-1)(x^2+2x-1)$. Найдем корни уравнения второй степени $x^2+2x-1=0$ и окончательно получим $x_1=1$, $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Точки пересечения с осью Oy найдем из условия $x=0$: $y=-0.5$.

.Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку $f(x) \neq f(-x)$ и $f(x) \neq -f(-x)$.

.Функция не является периодической.

Функция имеет разрыв в точках $x \neq \pm 1$. Исследуем характер разрыва точек.

Возьмем $x=-1$

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1-0} \frac{(x-1)(x^2 + 2x - 1)}{(x-1)(x+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3+x^2-3x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1+0}\frac{(x-1)(x^2+2x-1)}{(x-1)(x+1)}=-\infty$$

Точка x=-1 является точкой разрыва второго рода. Возьмем x=1

$$\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{x^3+x^2-3x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{(x-1)(x^2+2x-1)}{(x-1)(x+1)}=1$$

Точка x=1 – точка устранимого разрыва.

4. Найдем асимптоты. Поскольку предел функции при x→-1 равен бесконечности, то прямая x=-1 является вертикальной асимптотой графика. Найдем наклонные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-3x+1}{\left(x^2-1\right)x}=\lim_{x\to\infty}=\frac{x^3+x^2-3x+1}{x^3-x}=1$$

где для вычисления предела мы разделили числитель и знаменатель на x^3. И

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+x^2-3x+1}{\left(x^2-1\right)}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-3x+1-x^3+x}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-1\right)^2}{(x-1)(x+1)}=1$$

Таким образом уравнение наклонной асимптоты y=kx+b=x+1.

5. Для нахождения экстремумов найдем первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(3x^2 + 2x - 3)(x^2 - 1) - (x^3 + x^2 - 3x + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{(x^2 + 2x + 3)}{(x+1)^2}$$

Здесь опять использовано разложение многочлена x^3+x^2+x-3 путем его деления *на* x-1. Видим, что ни при каких *x* $y'(x)\neq 0$ и, следовательно, критических точек функция не имеет. При x=-1 $y'(x)$ не существует.

Таким образом, вся область допустимых значений x разбивается на интервалы (-∞, -1), (-1, ∞). Исследуем знак производной в каждом из этих интервалов, выбирая соответствующее значение переменной *x* в результате чего заполним таблицу:

Значения функции	Допустимые значения *x*		
	(-∞, -1)	-1	(-1, ∞)
y'(x)	+	Не существует	+
Рисунок	Возрастает		Возрастает

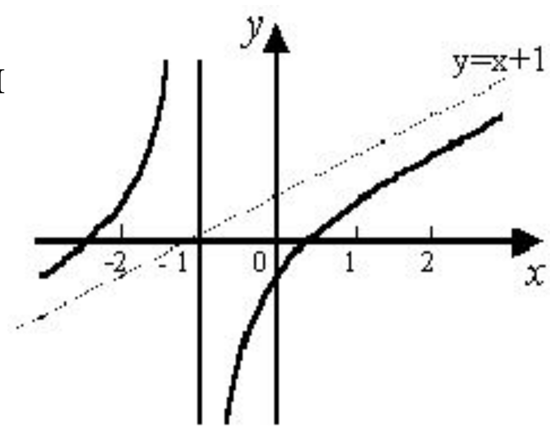
6. Найдем точки перегиба, участки выпуклости вверх и вниз. Для этого вычислим вторую производную

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \left(\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x+3)2(x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

Ни при каких x $y''(x) \neq 0$. Следовательно, вся область допустимых значений разобьется на интервалы (-∞, -1), (-1, ∞), где функция имеет выпуклости. Исследуем знак второй производной на этих интервалах, выбирая соответствующие значения x, и занесем результаты в таблицу:

X	(-∞, -1)	-1	(-1, ∞)
y''(x)	+	Не существует	-
Рисунок	Выпуклость вниз		Выпуклость вверх

Окончательно, нарисуем график этой функции



Пример. Исследовать функцию $y = x + \ln(x^2 - 1)$

1. Функция определена при всех значениях *x*, для которых $x^2-1>0$, т.е. на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$. Точки пересечения с осью *Ox* находим из условия $y=0$: $x\approx1.25$. С осью *Oy* функция не пересекается.
2. Функция не является ни четной, ни нечетной.
3. Функция не является периодической.
4. На интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ функция непрерывна.
5. Найдем асимптоты. Поскольку предел функции *при* $x\to\pm1$ равен плюс-минус бесконечности, то прямые $x=\pm1$ являются вертикальными асимптотами графика. Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\ln(x^2-1)}{x} = 1,\ b = \lim_{x\to\pm\infty}\ln(x^2-1) = \infty$$

следовательно, ни наклонных, ни горизонтальных асимптот нет.

6. Для нахождения экстремумов найдем первую производную функции:

$$y' = 1 + \frac{2x}{x^2-1}$$

Производная существует и конечна во всех точках области определения функции. Найдем критические точки из условия $y'(x)=0$. Решая квадратное уравнение $x^2+2x-1=0$ получим $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

В точке $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ функция не определена. Следовательно, имеется только одна критическая точка $x_1 = -1 - \sqrt{2}$

принадлежащая области определения функции. Вся область допустимых значений x разбивается на интервалы $\left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right)$ $\left(-1-\sqrt{2}, -1\right)$ $(1, \infty)$

Исследуем знак производной в каждом из этих интервалов, выбирая соответствующее значение переменной x. В интервале

$\left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right)$ производная положительна, а в интервале

$\left(-1-\sqrt{2}, -1\right)$ - отрицательна, следовательно, точка

$x_1 = -1 - \sqrt{2}$ - точка максимума и значение функции в ней равно ≈0.84. В интервале

$\left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right)$ функция возрастает, а в интервале

$\left(-1-\sqrt{2}, -1\right)$ - убывает. В интервале

$(1, \infty)$ производная больше нуля и функция возрастает.

7. Найдем точки перегиба, участки выпуклости вверх и вниз. Для этого вычислим вторую производную

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \frac{2x^2 + 2}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$

Вторая производная всегда положительная. Это означает, что кривая везде выпукла и точек перегиба не имеет. Окончательно, нарисуем график этой функции.