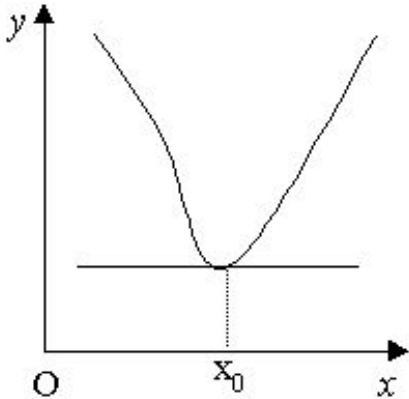


**ВВЕДЕНИЕ В
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ**

**ПРИЛОЖЕНИЕ ПОНЯТИЯ
ПРОИЗВОДНОЙ К ИЗУЧЕНИЮ
ФУНКЦИЙ**

1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма: Если дифференцируемая на промежутке X функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0)=0$.

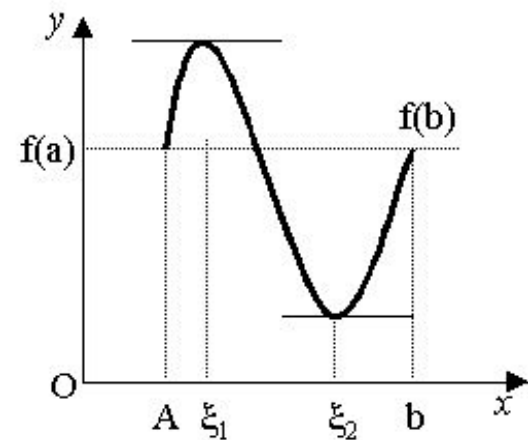


Геометрический смысл теоремы Ферма очевиден: в точке наибольшего и наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка X , касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля: Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- дифференцируема на интервале (a, b) ;
- на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a)=f(b)$.

тогда внутри отрезка существует, по крайней мере одна такая точка $\zeta \in (a, b)$, в которой производная функции равна нулю: $f'(\zeta)=0$.



Геометрический смысл теоремы Ролля: найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс; в этой точке производная и будет равна нулю (на рис. таких точек две - ξ_1, ξ_2).

Теорема Лагранжа: Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2. дифференцируема на интервале (a, b) .

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\zeta \in (a, b)$, в которой производная функции равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке, т.е.

$$f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Формула может быть также переписана в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\zeta)(b - a)$$

2. Правило Лопитала

Правило Лопитала: предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения из производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле. То есть, если имеется неопределенность вида $0/0$ или ∞/∞ , то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример. Найти предел $y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^x}{1 - x}$

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$

Применим правило Лопитала:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^x}{1 - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x^x)'}{(1 - x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^x)' = \lim_{x \rightarrow 1} x^x (1 + \ln x) = 1$$

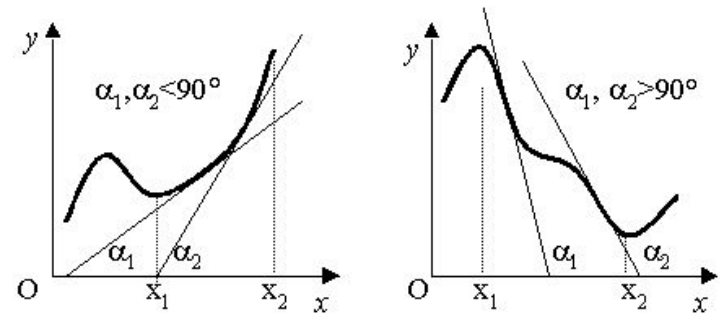
Здесь для вычисления производной от функции x^x мы использовали формулу производной степенно-показательной функции $y = f(x)^{\phi(x)}$.

3. Возрастание и убывание функций

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке X , если для любых $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1$ верно неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

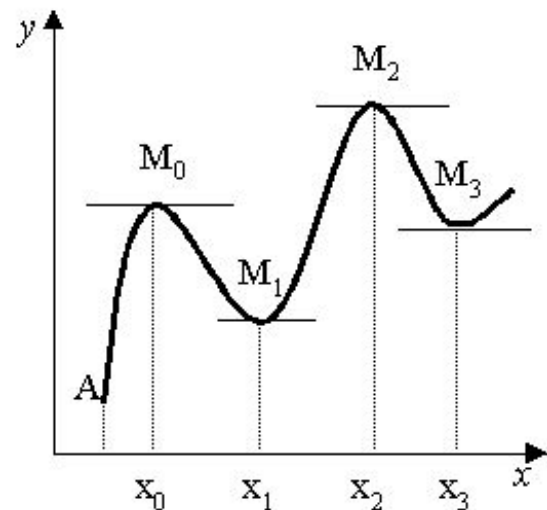
Теорема (*достаточное условие возрастания функции*): если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка X , то она возрастает на этом промежутке.

Теорема (*достаточное условия убывания функции*): если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка X , то она убывает на этом промежутке.



Необходимое условие монотонности: если функция *возрастает* (*убывает*) на некотором промежутке X , то можно лишь утверждать, что производная *неотрицательна* (*неположительна*) на этом промежутке: $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), т.е. в отдельных точках производная монотонной функции может равняться нулю.

4. Экстремум функции



Рассмотрим график некоторой функции $f(x)$. На этом графике мы имеем последовательное чередование промежутков возрастания и убывания функции. Точки кривой, которые отделяют промежутки возрастания от промежутков убывания, называются вершинами кривой.

Точка x_0 называется **точкой максимума функции** $f(x)$, если значение $f(x)$ в этой точке больше всех ее значений в ближайших точках, т.е. выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, для всяких Δx как положительных, так и отрицательных, достаточно малых по абсолютному значению.

Точка x_1 называется **точкой минимума функции** $f(x)$, если значение $f(x)$ в этой точке меньше всех ее значений в ближайших точках, т.е. выполняется неравенство $f(x_1 + \Delta x) > f(x_1)$, для всяких Δx как положительных, так и отрицательных, достаточно малых по абсолютному значению.

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно **максимумом и минимумом функции**. Максимумы и минимумы функции объединяются общим понятием **экстремума функции**. Точки M_0, M_1, M_2, M_3 – экстремумы функции $f(x)$.

Поэтому **необходимое условие экстремума**:

Для того чтобы функция $y=f(x)$ имела экстремум в точке x_0 , необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю $f'(x_0)=0$ или не существовала.

Точка $x \in X$, в которой выполнено необходимое условие экстремума: производная равна нулю называется **стационарной**, не существует - **критической**. При этом критическая точка вовсе не обязательно является точкой экстремума.

Достаточное условие экстремума.

Теорема 1: если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции $y=f(x)$, а если с минуса на плюс, то точка минимума.

Теорема 2: если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции $f(x)$ равна нулю в некоторой точке x_0 , а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то точка x_0 есть точка минимума функции; если $f''(x_0)$ отрицательна, то x_0 — точка максимума.

Схема исследования функции $y=f(x)$ на экстремум:

1. Найти производную $y'=f'(x)$.
2. Найти критические точки функции, в которых производная $f'(x)=0$ или не существует.
3. Найти вторую производную $f''(x)$ и определить ее знак в каждой критической точке. Либо: исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции.
4. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Пример. Найти экстремумы функции $y=x^3-3x^2-4$.

Решение. 1. Находим первую производную $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$.

2. Находим критические точки из условия $y'=3x(x-2)=0$: $x_1=0$, $x_2=2$.

3. Находим $y''=6x-6$. Значения второй производной в критических точках: $y''(x=0)=-6<0$, $y''(x=2)=6>0$. Следовательно, в точке $x=0$ локальный максимум, а в точке $x=2$ – минимум.

4. Находим $y_{\max}(0)=-4$, $y_{\min}(2)=-8$.

Пример. Капитал в 1 млн. руб. может быть размещен в банке по 50% годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере 100%, а издержки задаются квадратичной зависимостью. Прибыль облагается налогом в $p\%$. При каких значениях p вложение в производство является более эффективным, нежели чистое размещение капитала в банке?

Решение. Пусть x (млн. руб.) инвестируется в производство, а $1-x$ — размещается под проценты. Тогда капитал, размещенный в банке, через год станет равным $(1-x)(1+50/100)=1.5(1-x)$, а капитал, вложенный в производство: $x(1+100/100)=2x$. Издержки составят ax^2 , т.е. прибыль от вложения в производство $C=2x-ax^2$. Налоги составят $(2x-ax^2)p/100$, т.е. чистая прибыль окажется равной $(1-p/100)(2x-ax^2)$. Общая сумма через год составит

$$A(x) = 1.5 - 1.5x + \left(1 + \frac{p}{100}\right)(2x - ax^2) = 1.5 + \left[2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - 1.5\right]x - a\left(1 - \frac{p}{100}\right)x^2$$

требуется найти максимальное значение этой функции на отрезке $[0, 1]$. Имеем

$$A'(x) = 2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - 1.5 - 2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)x = 0 \text{ при } x_0 = \frac{2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - 1.5}{2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)}$$

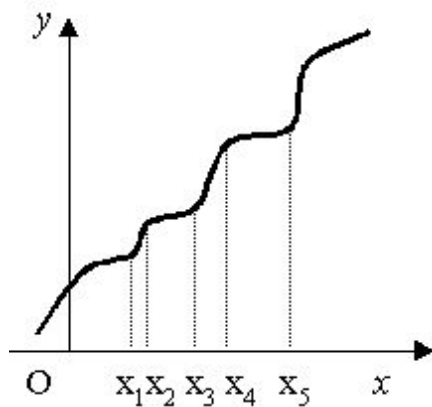
$$A''(x) = -2a\left(1 - \frac{p}{100}\right) < 0, \text{ т.е. точка } x_0 \text{ — точка максимума.}$$

Чтобы x_0 принадлежала отрезку $[0, 1]$, необходимо

$$\text{выполнение условия } 0 < 2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - 1.5 < 1 \text{ или } p < 25.$$

Таким образом, если $p > 25$, то выгодно ничего не вкладывать в производство и разместить весь капитал в банк.

5. Выпуклость функции и точки перегиба



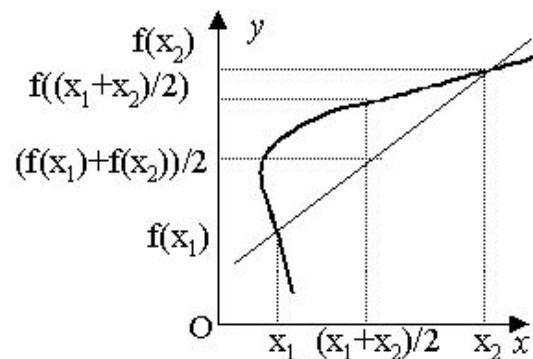
Точки экстремума во многом определяют структура графика функции. Определим теперь другие точки функции, которые также следует найти, чтобы качественно построить ее график.

Функция $f(x)$ возрастает на всей числовой оси и не имеет экстремумов. Вместе с тем, в точках x_1, x_2, x_3, x_4 график как бы перегибается. Такие точки называют *точками перегиба*.

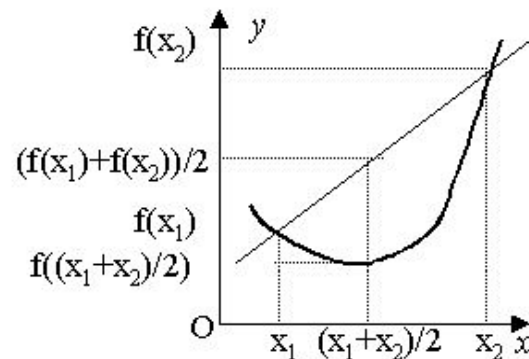
Функция $y=f(x)$ называется **выпуклой вверх** (**выпуклой вниз**) на промежутке X , если для любых двух значений $x_1, x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$$\left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right)$$



если функция выпукла вниз, то отрезок, соединяющий любые две точки графика, целиком лежит над графиком, если — выпукла вверх, то весь отрезок целиком лежит под графиком функции.



Достаточное условие выпуклости функции вниз (вверх) диктуется следующей *теоремой*:

Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка X , то функция выпукла вниз (вверх) на этом промежутке.

Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх.

Из вышесказанного следует, что точки перегиба – это точки экстремума первой производной. Отсюда вытекает *необходимое условие перегиба*: вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции $f(x)$ в точке перегиба x_0 равна нулю: $f''(x) = 0$.

Достаточное условие перегиба: если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции $f(x)$ при переходе через некоторую точку x_0 меняет свой знак, то x_0 есть точка перегиба ее графика.

Схема исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

1. Найти вторую производную функции $f''(x)$.
2. Найти точки, в которых вторая производная равна нулю $f''(x)=0$ или не существует.
3. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и наличия точек перегиба.
4. Найти значения функции в точках перегиба.

Пример. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y=x(x-1)^3$.

Решение. 1. Найдем $y'=(x-1)^2(4x-1)$, $y''=2(x-1)(4x-1)+4(x-1)^2=12(x-0.5)(x-1)$

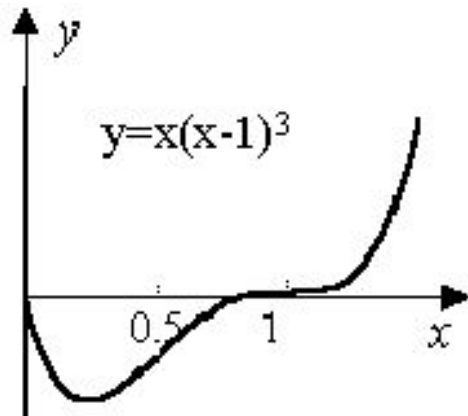
2. $y''=12(x-0.5)(x-1)=0$ в точках $x_1=0.5$ и $x_2=1$.

3. Для исследования знака второй производной на интервале $(-\infty, 0.5)$ выберем $x=-1$. $y''(-1)=36>0$. Следовательно, на этом интервале функция выпукла вниз. Аналогично, функция на интервале $(1, \infty)$ также выпукла вниз. На интервале $(0.5, 1)$ $y''<0$ и на нем функция выпукла вверх.

Поскольку y'' при переходе через точку $x=0.5$ меняет знак с плюса на минус и, наоборот, в точке $x=1$ с минуса на плюс, то они и будут являться точками перегиба.

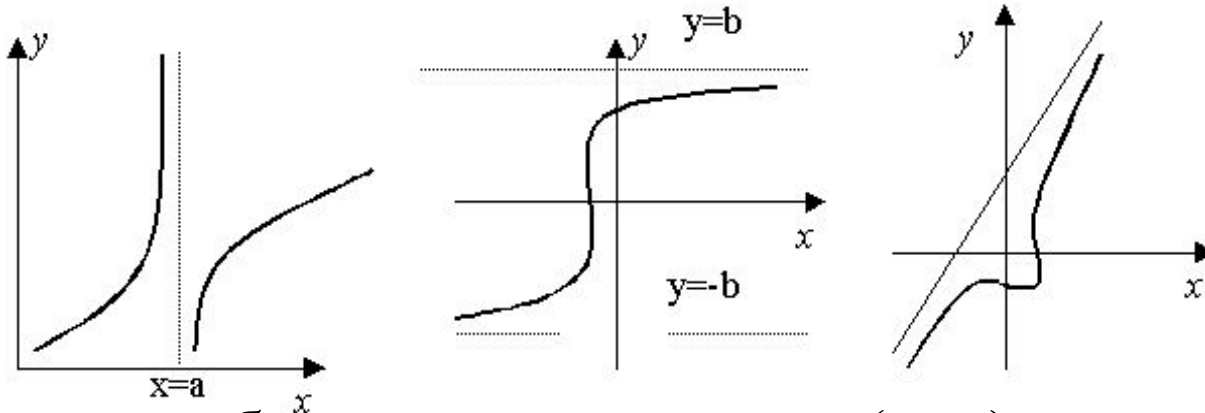
4. Значения функции в точках перегиба $f(0.5)=-1/16$, $f(1)=0$.

График функции приведен на рисунке.



6. Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.



Асимптоты могут быть вертикальными ($x=a$), горизонтальными ($y=b, y=-b$) и наклонными см. рисунок.

Теорема 1. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, возможно, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции при $x \rightarrow x_0 - 0$ (слева) или при $x \rightarrow x_0 + 0$ (справа) – равен бесконечности, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$

Тогда прямая $x=x_0$ является **вертикальной асимптотой графика функции** $y=f(x)$.

Теорема 2. Пусть функция $y=f(x)$ определена при достаточно больших x и существует конечный предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

Тогда прямая $y=b$ есть **горизонтальная асимптота графика функции** $y=f(x)$.

Если конечен только один из пределов $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b_l$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b_n$ то функция имеет лишь левостороннюю $y=b_l$ или правостороннюю $y=b_n$ горизонтальную асимптоту.

Теорема 3. Пусть функция $y=f(x)$ определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$

Тогда прямая $y=kx+b$ является **наклонной асимптотой графика функции** $y=f(x)$.

Наклонная асимптота, так же как и горизонтальная, может быть правосторонней или левосторонней.

Пример. Найти асимптоты графика дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Решение. Из области определения выпадает точка

$$x = -\frac{d}{c}. \text{ Найдем пределы функции } f(x) \text{ при } x \rightarrow -\frac{d}{c}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{ax + b}{cx + d} = \pm\infty \quad \text{и прямая } x = -\frac{d}{c} \text{ является вертикальной асимптотой. Далее}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} = \frac{a}{c}$$

Отсюда следует, что прямая $y = \frac{a}{c}$ является горизонтальной асимптотой. Так, например, асимптотами функции

$$y = \frac{3 - 2x}{x + 1} \text{ являются прямые } x = -1 \text{ и } y = -2.$$

7. Общая схема исследования функций

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции и точки пересечения ее графика с осями координат.
2. Исследовать функцию на четность-нечетность.
3. Исследовать функцию на периодичность.
4. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Исследовать функцию на экстремум, найти интервалы монотонности функции.
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.
8. Построить график и найти область значений.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$
 Решение.

1. Область определения функции: $x \neq \pm 1$. Точки пересечения с осью Ox находим из условия $y=0$: $x^3+x^2-3x+1=0$. Делитель свободного члена равен 1. Следовательно, корень $x_1=1$. Разделим наше уравнение на $x-x_1$:

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 3x + 1 \mid x - 1 \\ x^3 - x^2 \\ \hline 2x^2 - 3x + 1 \\ - x + 1 \end{array}$$

Таким образом, $x^3+x^2-3x+1=(x-1)(x^2+2x-1)$. Найдем корни уравнения второй степени $x^2+2x-1=0$ и окончательно получим $x_1=1$, $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Точки пересечения с осью Oy найдем из условия $x=0$: $y=-0.5$.

.Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку $f(x) \neq f(-x)$ и $f(x) \neq -f(-x)$.

.Функция не является периодической.

Функция имеет разрыв в точках $x \neq \pm 1$. Исследуем характер разрыва точек.

Возьмем $x=-1$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{(x-1)(x^2 + 2x - 1)}{(x-1)(x+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{(x-1)(x^2 + 2x - 1)}{(x-1)(x+1)} = -\infty$$

Точка $x=-1$ является точкой разрыва второго рода. Возьмем $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1\pm 0} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1\pm 0} \frac{(x-1)(x^2 + 2x - 1)}{(x-1)(x+1)} = 1$$

Точка $x=1$ – точка устранимого разрыва.

4. Найдем асимптоты. Поскольку предел функции при $x \rightarrow -1$ равен бесконечности, то прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой графика. Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{(x^2 - 1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^3 - x} = 1$$

где для вычисления предела мы разделили числитель и знаменатель на x^3 . И

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{(x^2 - 1)} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1 - x^3 + x}{x^2 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = 1$$

Таким образом уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b=x+1$.

5. Для нахождения экстремумов найдем первую производную функции:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(3x^2 + 2x - 3)(x^2 - 1) - (x^3 + x^2 - 3x + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \\
 &= \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{(x - 1)(x^2 + 2x + 3)}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{(x^2 + 2x + 3)}{(x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

Здесь опять использовано разложение многочлена $x^3 + x^2 + x - 3$ путем его деления на $x - 1$. Видим, что ни при каких x $y'(x) \neq 0$ и, следовательно, критических точек функция не имеет. При $x = -1$ $y'(x)$ не существует.

Таким образом, вся область допустимых значений x разбивается на интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$. Исследуем знак производной в каждом из этих интервалов, выбирая соответствующее значение переменной x в результате чего заполним таблицу:

Значения функции	Допустимые значения x		
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
$y'(x)$	+	Не существует	+
Рисунок	Возрастает		Возрастает

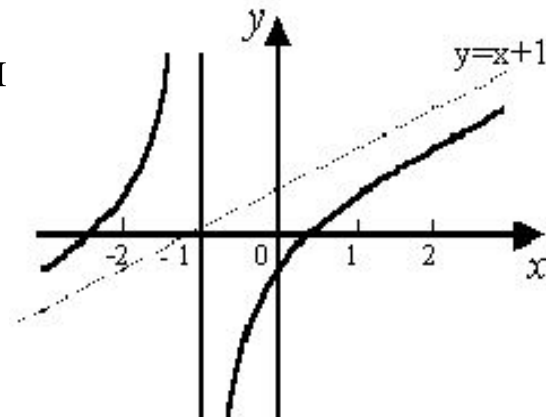
6. Найдем точки перегиба, участки выпуклости вверх и вниз. Для этого вычислим вторую производную

$$y''(x) = (y'(x))' = \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \right)' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2 + 2x + 3)2(x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

Ни при каких x $y''(x) \neq 0$. Следовательно, вся область допустимых значений разобьется на интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$, где функция имеет выпуклости. Исследуем знак второй производной на этих интервалах, выбирая соответствующие значения x , и занесем результаты в таблицу:

X	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
$y''(x)$	$+$	Не существует	$-$
Рисунок	Выпуклость вниз		Выпуклость вверх

Окончательно, нарисуем график этой функции



Пример. Исследовать функцию $y = x + \ln(x^2 - 1)$

1. Функция определена при всех значениях x , для которых $x^2 - 1 > 0$, т.е. на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$. Точки пересечения с осью Ox находим из условия $y=0$: $x \approx 1.25$. С осью Oy функция не пересекается.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Функция не является периодической.

4. На интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ функция непрерывна.

5. Найдем асимптоты. Поскольку предел функции *при* $x \rightarrow \pm 1$ равен плюс-минус бесконечности, то прямые $x = \pm 1$ являются вертикальными асимптотами графика. Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \ln(x^2 - 1)}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = \infty$$

следовательно, ни наклонных, ни горизонтальных асимптот нет.

6. Для нахождения экстремумов найдем первую производную функции:

$$y' = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Производная существует и конечна во всех точках области определения функции.

Найдем критические точки из условия $y'(x) = 0$. Решая квадратное уравнение

$x^2 + 2x - 1 = 0$ получим $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

В точке $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ функция не определена. Следовательно, имеется только одна критическая точка $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ принадлежащая области определения функции. Вся область допустимых значений x разбивается на интервалы $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ $(-1 - \sqrt{2}, -1)$ $(1, \infty)$

Исследуем знак производной в каждом из этих интервалов, выбирая соответствующее значение переменной x . В интервале

$(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ производная положительна, а в интервале

$(-1 - \sqrt{2}, -1)$ - отрицательна, следовательно, точка

$x_1 = -1 - \sqrt{2}$ - точка максимума и значение функции в ней равно ≈ 0.84 . В интервале

$(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ функция возрастает, а в интервале

$(-1 - \sqrt{2}, -1)$ - убывает. В интервале

$(1, \infty)$ производная больше нуля и функция возрастает.

7. Найдем точки перегиба, участки выпуклости вверх и вниз. Для этого вычислим вторую производную

$$y''(x) = (y'(x))' = \frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

Вторая производная всегда положительная. Это означает, что кривая везде выпукла и точек перегиба не имеет. Окончательно, нарисуем график этой функции.

