

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Лекция №7



# Основные понятия

Теория электромагнитного поля изучает физические явления и процессы, происходящие в электромагнитном поле, а также инженерные методы расчета этих процессов. Эти явления и процессы лежат в основе действия большого числа различных электромагнитных и электронных приборов и устройств, широко применяемых на практике. К ним могут быть отнесены: электрические машины и аппараты, электроэнергетические установки для передачи электрической энергии, электромагнитные и электронные элементы автоматики, средства передачи информации, устройства электрометаллургии, а также оборудование, предназначенное для исследования электромагнитных полей биологических объектов, искусственного интеллекта, многое др. Изучение теории электромагнитного поля не только расширяет физические представления о поле, дает возможность проектировать различные практические устройства, но и способствует формированию у студентов современного мировоззрения.



**Теория электромагнитного поля — теоретическая дисциплина, т. е. базисная для целого ряда других дисциплин радиотехники, радиолокации, электрических машин и др. Особенность электромагнитного поля заключается в том, что органы чувств человека не в состоянии его воспринимать непосредственно. Однако оно обладает общими свойствами с веществом — массой, импульсом, моментом импульса, энергией. Особое свойство электромагнитного поля — оказание силового воздействия на заряженные частицы, находящиеся в электромагнитном поле. Энергия электромагнитного поля распространяется в виде электромагнитных волн с конечной скоростью, и она может превращаться в другие виды энергии. Исторически сложилось так, что электрические и магнитные поля рассматривали отдельно, об их взаимосвязи первоначально не подозревали. Теперь мы знаем, что существует единое электромагнитное поле, которое в зависимости от условий проявляется то как электрическое, то как магнитное.**

•

Разделение электромагнитного поля на электрическое и магнитное часто вызывает недоразумения. Применяя эту терминологию, нужно помнить, что в природе существует не смесь двух независимых полей, а одно поле – электромагнитное (дело, конечно не в названии, а в том, что это – единая сущность, а не два разных поля). Разделение его на части столь же условно, как разложение, например, вектора полной скорости тел на составляющие. В строгом смысле, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  должны рассматриваться как равноправные компоненты единого электромагнитного поля, точнее говоря, как компоненты электромагнитного поля, т.е. электромагнитное поле – двухкомпонентное поле  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ , но компонента  $\vec{B}$  носит относительный характер: магнитное поле существует и проявляется только в системе отсчета, относительно которой электрический заряд движется. В частном случае может оказаться, что все  $\vec{E}_i = 0$  или все  $\vec{B}_i = 0$ , тогда поле сводится к чисто магнитному или к чисто электрическому полю.

## 2. Основные векторные величины, характеризующие электростатическое поле

### Закон Кулона

$$F = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

F - сила

k - коэффициент пропорциональности

q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub> - заряды

r - расстояние

### Электрическое поле

$$E = \frac{F}{q}$$

E - электрическое поле

F - сила

q - заряд

### Потенциал электростатического поля вокруг точечного заряда

$$\varphi = \frac{k \cdot q_0}{\varepsilon \cdot r}$$

φ - потенциал

k - коэффициент пропорциональности

q<sub>0</sub> - заряд

ε - диэлектрическая постоянная (проницаемость)

r - расстояние

## Электрическая ёмкость

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

C - электрическая ёмкость

q - заряд

φ – потенциал

Электрическая емкость характеризует способность тела или системы тел накапливать электрические заряды, запасая таким образом энергию электрического поля.

*Конденсатор* - два проводника, разделенные диэлектриком, служащие для накопления электрического заряда. Под зарядом конденсатора понимают модуль заряда одной из его пластин или обкладок.

Иногда в задачах электрический заряд распределен по некоторому телу.

Для описания этого распределения вводятся следующие величины:

**Линейная плотность заряда.** Используется для описания распределения заряда по нити:

$$\tau = \frac{q}{l}$$

где: *l* – длина нити. Измеряется в Кл/м.

Рассмотрим бесконечную нить, несущую заряд, равномерно распределённый по её длине. Заряд, сосредоточенный на бесконечно нити, конечно, тоже бесконечен, и поэтому он не может служить количественной характеристикой степени заряженности нити. В качестве такой характеристики принимается *«линейная плотность заряда»*. Эта величина равна заряду, распределённому на отрезке нити единичной длины:

Выясним, какова напряженность поля, создаваемого заряженной нитью на расстоянии  $r$  от неё.

Заряд, охваченный поверхностью можно найти так:

$$E = \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \epsilon_0}$$

Напряжённость электрического поля, созданного равномерно заряженной нитью, **прямо пропорциональна линейной плотности заряда нити и обратно пропорциональна расстоянию от нити до интересующей нас точки.**



### 3. Метод электрических (зеркальных) изображений.

Рассмотрим метод электрических изображений. Этот метод сводится к подбору таких дополнительных точечных зарядов, которые вместе с заданными зарядами образуют поле, удовлетворяющее граничным условиям и уравнению Лапласа.

В качестве примера рассмотрим поле точечного заряда  $e$  в однородном изотропном диэлектрике. Пусть заряд находится в точке  $Q$  на расстоянии  $a$  от бесконечной плоскости, образующей поверхность некоторого проводника (рис. 37). Пусть потенциал  $\varphi$  равен нулю на поверхности проводника и в бесконечности (граничные условия).

$$\varphi_A = \frac{e}{\epsilon_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

Потенциал на границе проводника равен нулю, граничные условия выполняются.

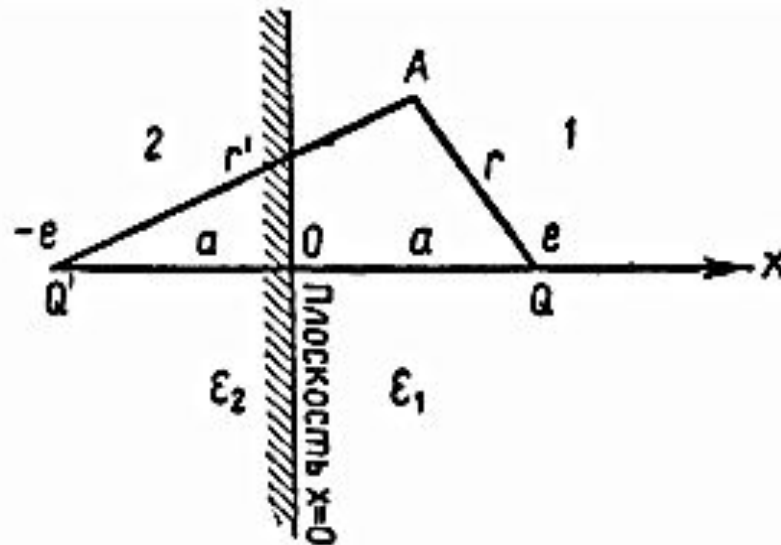


Рис. 37.



Теорема единственности в электростатике обосновывает «метод изображений». Он помогает решать задачи с участием точечного заряда и плоскости (или нескольких плоскостей), точечного заряда и сферы (заземленной и незаземленной) и в ряде других случаев. Задача состоит в следующем: имеется замкнутая область пространства с заданными распределением зарядов и граничными условиями (например, потенциал на границе). Нужно найти электрическое поле (потенциал, а из него напряженность) в этой области. Решение «методом изображений» состоит в подборе фиктивных зарядов вне рассматриваемой области, таких, что их совместное с реальными зарядами поле обеспечивает заданные граничные условия (потенциал на границе). Поскольку внутри области заряды не изменились, найденное поле удовлетворяет уравнению Пуассона (является его решением). Выполняются также граничные условия. По теореме единственности других решений нет.

- 4. Электрическое поле промышленной частоты

Для анализа электрического поля ЛЭП и электроустановок промышленной частоты вообще можно применять законы электростатики. Поле создается, по крайней мере, между двумя электродами (телами), которые несут заряды разных знаков и на которых начинаются и оканчиваются силовые линии. Создаваемое электроустановками поле неравномерно, т.е. напряженность его изменяется вдоль силовых линий несимметрично, поскольку возникает между электродами различной формы, например между токоведущей частью и землей или металлической заземленной конструкцией. Поле ЛЭП можно считать, кроме того, плоскопараллельным, т.е. форма его одинакова в параллельных плоскостях, называемых плоскостями поля. В данном случае плоскости поля перпендикулярны оси линии.

В разных точках пространства вблизи электроустановок промышленной частоты напряженность электрического поля имеет разные значения. Она зависит от ряда факторов: номинального напряжения электроустановки; расстояния между точкой, в которой определяется напряженность поля, и токоведущими частями; высоты размещения над землей токоведущих частей и интересующей нас точки и т.п. Напряженность может быть измерена с помощью специальных приборов. В некоторых случаях, например вблизи ВЛ, она определяется расчетным путем.

В качестве примера рассмотрим порядок определения напряженности электрического поля, создаваемого трехфазной ВЛ с горизонтальным расположением проводов. Для упрощения примем допущение, что линия не имеет грозозащитных тросов или они изолированы от опор, что позволяет использовать их, например, для отбора мощности. В результате тросы не оказывают существенного влияния на электрическое поле проводов. При этом расчетные значения напряженности поля будут завышенными по сравнению с фактическими, что в итоге ужесточает требования безопасности и поэтому допустимо.

Напряженность электрического поля уединенного бесконечно длинного прямолинейного проводника, заряженного равномерно по длине, выражается зависимостью, В/м:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 m},$$

где  $\tau$  – линейная плотность заряда провода, Кл/м;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная;  $m$  – кратчайшее расстояние от провода до точки, в которой определяется напряженность, м.

Известно также, что вектор напряженности электрического поля  $E$  совпадает с линией, соединяющей интересующую нас точку с проводником по кратчайшему расстоянию. При этом, если проводник несет положительный заряд, то вектор напряженности  $E$  направлен от проводника, а при отрицательном заряде – к проводнику.

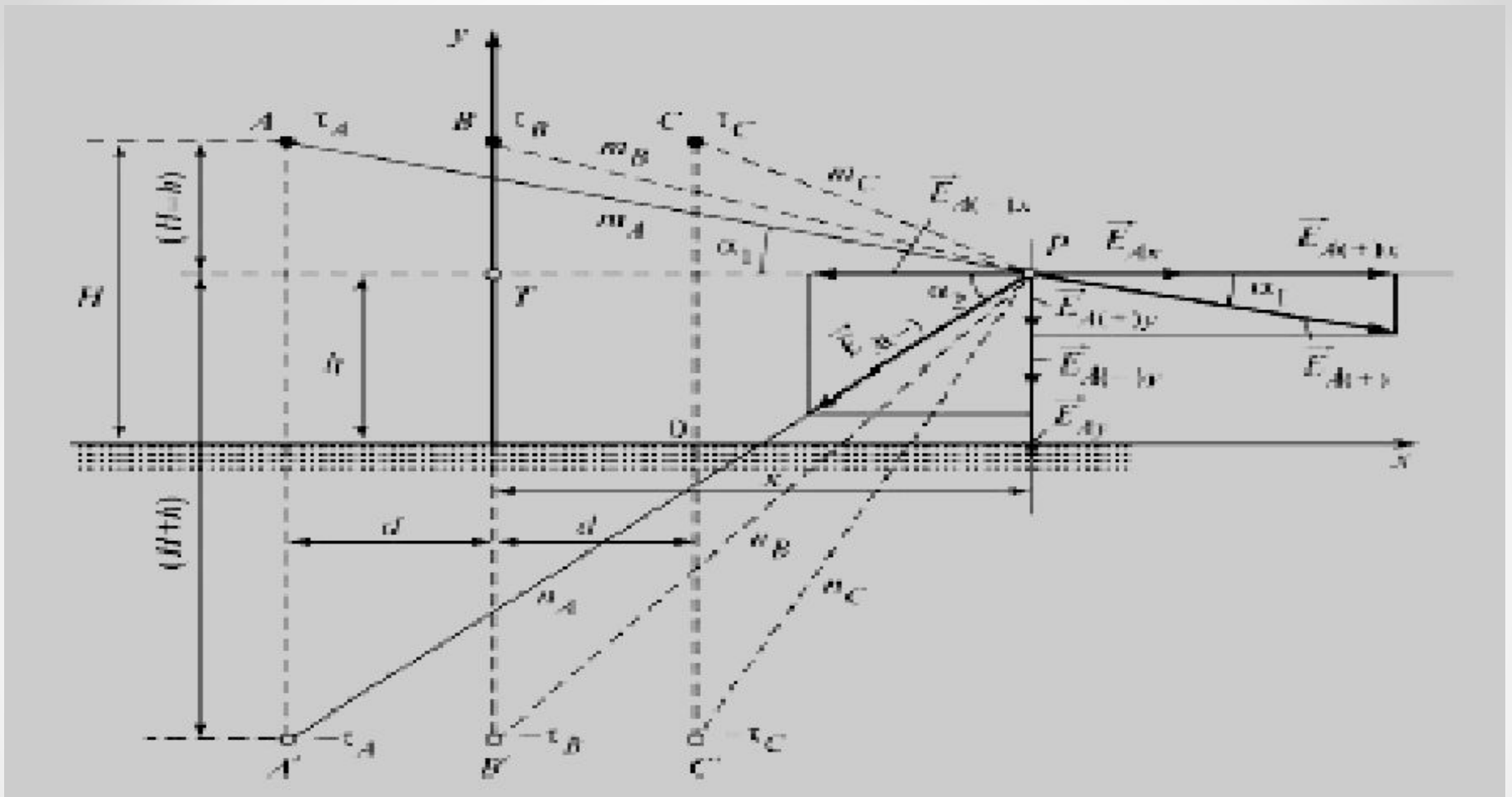
Пусть в рассматриваемом примере провода ЛЭП, которые приняты бесконечно длинными прямолинейными проводниками, расположены вблизи плоской поверхности проводящей среды – земли. Поэтому поле линии будет создаваться не только зарядами проводов, но и зарядами их зеркальных изображений. При этом вектор напряженности суммарного поля будет равен геометрической сумме векторов напряженностей полей всех зарядов.

Рассмотрим вначале одну фазу, например фазу  $A$  (рисунок 1), приняв заряд провода положительным  $+τA$ , а заряд его зеркального изображения отрицательным  $-τA$ . Модуль (т.е. длина, абсолютное значение) вектора напряженности электрического поля в некоторой  $P$ , обусловленного зарядом  $+τA$ , В/м:

$$E_{A(+)} = \frac{U_A}{2\pi\epsilon_0 m_A}, \quad (1.1)$$

$$E_{A(-)} = \frac{U_A}{2\pi\epsilon_0 n_A}. \quad (1.2)$$

Здесь  $m_A$  и  $n_A$  – кратчайшие расстояния от точки  $P$  до провода (фазы)  $A$  и его зеркального изображения соответственно, м.



$A, B, C$  – фазы (провода) линии;  $A', B', C'$  – их зеркальные изображения;  $m_A, m_B, m_C$  – кратчайшие расстояния от точки  $P$  до фаз линий;  $n_A, n_B, n_C$  – кратчайшие расстояния от точки  $P$  до зеркальных изображений фаз  
**Рисунок 1.** – Вычисление напряженности электрического поля вблизи воздушной линии электропередачи в точке  $P$

Теперь разложим векторы  $EA(+)$  и  $EA(-)$  на их составляющие по горизонтали  $EA(+)_x$ ,  $EA(-)_x$  и вертикали  $EA(+)_y$ ,  $EA(-)_y$  (см. рисунок 1.). Модули этих векторов, как следует из построения, равны, В/м:

$$E_{A(+)}_x = E_{A(+)} \cos \alpha_1 = \frac{E_{A(+)}(x+d)}{m_A};$$

$$E_{A(-)}_x = E_{A(-)} \cos \alpha_2 = \frac{E_{A(-)}(x+d)}{n_A};$$

$$E_{A(+)}_y = E_{A(+)} \sin \alpha_1 = \frac{E_{A(+)}(H-h)}{m_A};$$

$$E_{A(-)}_y = E_{A(-)} \sin \alpha_2 = \frac{E_{A(-)}(H+h)}{n_A}.$$

$x$  – расстояние по горизонтали от оси линии до точки  $P$ ;  $d$  – расстояние между осями соседних проводов;  $H$  – высота размещения провода над землей (при более точных расчетах – над проводящим слоем грунта);  $h$  – высота точки  $P$  над землей (все расстояния в метрах).



Путем сложения векторов  $E_{A(+)\underline{x}}$  и  $E_{A(-)\underline{x}'}$  а также  $E_{A(+)\underline{y}}$  и  $E_{A(-)\underline{y}'}$  получим векторы  $E_{Ax}$  и  $E_{Ay}$ , которые являются соответственно горизонтальной и вертикальной составляющими вектора напряженности поля фазы  $A$  (с учетом ее зеркального изображения) в точке  $P$ . Векторы  $EA(+)\underline{x}$  и  $EA(-)\underline{x}$  имеют противоположные направления, поэтому модуль их суммарного вектора  $E_{Ax}$  равен разности их модулей:

$$E_{Ax} = E_{A(+)} \frac{x+d}{m_A} - E_{A(-)} \frac{x+d}{n_A}.$$

Модуль вектора  $E_{Ay}$  равен сумме модулей векторов  $EA(+)\underline{y}$  и  $EA(-)\underline{y}$ , поскольку они направлены в одну сторону:

$$E_{Ay} = E_{A(+)} \frac{x+d}{m_A} + E_{A(-)} \frac{x+d}{n_A}.$$

Заменяя  $EA(+)$  и  $EA(-)$  их значениями из (1.1) и (1.2), получим

$$E_{Ax} = \frac{t_A}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{x+d}{m_A^2} - \frac{x+d}{n_A^2} \right);$$

$$E_{Ay} = \frac{t_A}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{H-h}{m_A^2} + \frac{H-h}{n_A^2} \right).$$

Поскольку рассматривается ЛЭП переменного тока, то заряд и напряженности электрического поля являются синусоидальными функциями времени, то их можно записать в комплексной форме. Учитывая, что

$$t_A = C_A \dot{U}_A,$$

произведем замену в уравнениях, представленных выше, в результате чего получим окончательные выражения в комплексной форме для горизонтальной и вертикальной составляющих вектора напряженности поля фазы А (с учетом ее зеркального изображения) в точке Р:

$$\dot{E}_{Ax} = \frac{C_A \dot{U}_A}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{x+d}{m_A^2} - \frac{x+d}{n_A^2} \right) = \frac{C_A \dot{U}_A}{2\pi\epsilon_0} k_1;$$

$$\dot{E}_{Ay} = \frac{C_A \dot{U}_A}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{H-h}{m_A^2} + \frac{H+h}{n_A^2} \right) = \frac{C_A \dot{U}_A}{2\pi\epsilon_0} k_2.$$

где  $C_A$  – емкость фазы  $A$  относительно земли, Ф/м;  $\dot{U}_A$  – напряжение фазы  $A$  относительно земли (действующее значение фазного напряжения), В;  $k_1$ ,  $k_2$  – коэффициенты.

Аналогично можно получить выражения для горизонтальных и вертикальных составляющих напряженностей полей двух других фаз  $B$  и  $C$ .

Горизонтальная и вертикальная составляющие напряженности суммарного поля, В/м, которые обусловлены зарядами всех фаз линии и их зеркальными изображениями, равны

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{Ax} + \dot{E}_{Bx} + \dot{E}_{Cx};$$

$$\dot{E}_y = \dot{E}_{Ay} + \dot{E}_{By} + \dot{E}_{Cy}.$$

Подставим в эти уравнения соответствующие значения из (1.3). Учитывая то, что для линий с горизонтальным расположением проводов  $C_A = C_B = C_C = C$ , а также то, что для симметричной трехфазной системы

$$\dot{U}_A = U_\phi; \dot{U}_B = a^2 U_\phi; \dot{U}_C = a U_\phi.$$

где  $U_\phi$  – фазное напряжение линии, В;

$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$  оператор, напряженность электрического поля, В/м, трехфазной ЛЭП электропередачи с горизонтальным расположением проводов можно получить из равенства:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

Или

$$E = \frac{CU_\phi}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{(2k_1 - k_3 - k_5)^2 + 3(k_3 - k_5)^2 + (2k_2 - k_4 - k_6)^2 + 3(k_4 - k_6)^2},$$

$$\text{где } k_1 = \frac{x+d}{m_A^2} - \frac{x+d}{n_A^2}; k_2 = \frac{H-h}{m_A^2} + \frac{H+h}{n_A^2}; k_3 = \frac{x}{m_e^2} - \frac{x}{n_e^2}; k_4 = \frac{H-h}{m_B^2} + \frac{H+h}{n_B^2};$$

$$k_5 = \frac{x-d}{m_c^2} - \frac{x-d}{n_c^2}; k_6 = \frac{H-h}{m_c^2} + \frac{H+h}{n_c^2}.$$

Отрезки  $m$  и  $n$  являются гипотенузами соответствующих прямоугольных треугольников (см. рисунок 1.) и определяются следующими уравнениями, м:

$$m_A = \sqrt{(x+d)^2 + (H-h)^2}; n_A = \sqrt{(x+d)^2 + (H+h)^2};$$

$$m_B = \sqrt{x^2 + (H-h)^2}; n_B = \sqrt{x^2 + (H+h)^2};$$

$$m_C = \sqrt{(x-d)^2 + (H-h)^2}; n_C = \sqrt{(x-d)^2 + (H+h)^2}.$$

Пренебрегая влиянием земли, т.е. полагая  $H \gg d$ , получим упрощенное выражение, Ф/м:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d\sqrt[3]{2}}{r}},$$

где  $r$  – радиус провода, м.

## Контрольные вопросы

1. Что изучает теория электромагнитного поля?
2. Назовите свойства и особенности электромагнитного поля.
3. Какие величины характеризуют электромагнитное поле?
4. Как можно графически представить электрическое поле двух зарядов?
5. Что называют точечным зарядом?
6. Как определяют напряженность поля, созданного несколькими зарядами?
7. Укажите размерности величин, характеризующих электромагнитное поле.
8. Назовите условия, при которых можно говорить отдельно об электрическом и магнитном поле.