МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный аграрный университет»
(ФГБОУ ВО Южно-Уральский ГАУ)
Институт агроинженерии

Кафедра Эксплуатация машинно-тракторного парка, и технология и механизация животноводства

ЛЕКЦИЯ

на тему

Динамическое программирование (продолжение1)

Приложения динамического программирования

по направлению подготовки 35.04.06 «Агроинженерия»

программа подготовки – Технический сервис в сельском хозяйстве

доцент кафедры ЭМТП и ТМЖ,
к.т.н, доцент В.Н. Николаев

Приложения динамического программирования

В данном разделе рассмотрено четыре примера, каждый из которых выбран для демонстрации методов динамического программирования. При рассмотрении каждого примера особое внимание обратите на три основных элемента моделей динамического программирования.

1. Определение этапов.

2. Определение на каждом этапе вариантов решения (альтернатив).

3. Определение состояний на каждом этапе.

Из перечисленных выше элементов понятие состояния, как правило, представляется весьма сложным для восприятия. Рассмотренные в этом разделе приложения последовательно показывают, что определение состояния меняется в зависимости от моделируемой ситуации. При рассмотрении каждого приложения полезно ответить на следующие вопросы:

1) какие соотношения связывают этапы вместе?

2) какая информация необходима для того, чтобы получить допустимые решения на текущем этапе без повторной проверки решений, принятых на предыдущих этапах?

Задача о загрузке

Задача о загрузке - это задача о рациональной загрузке автомобиля, который имеет ограничения по объему или грузоподъемности. Каждый помещенный на автомобиль груз приносит определенную прибыль. Задача состоит в определении загрузки автомобиля такими грузами, которые приносят наибольшую суммарную прибыль.

Рекуррентное уравнение процедуры обратной прогонки выводится для общей задачи загрузки автомобиля грузоподъемностью W предметов (грузов) n наименований. Пусть m_i - количество предметов i-го наименования, подлежащих загрузке, r_i - прибыль, которую приносит один загруженный предмет i-го наименования, w_i - вес одного предмета i-го наименования. Общая задача имеет вид следующей целочисленной задачи линейного программирования.

Максимизировать

$$z = r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_nm_n \qquad (1)$$

при условии, что

$$w_1m_1 + w_2m_2 + \cdots + w_nm_n \le W \qquad (2)$$

m_1, m_2,…m_n ≥ 0 и целые

Три элемента модели динамического программирования определяется следующим образом.

1. Этап i ставится в соответствие предмету i-го наименования, i = 1,2,..., n.

2. Варианты решения на этапе i описываются количеством m_i , предметов i-го наименования, подлежащих загрузке. Соответствующая прибыль равна $r_i m_i$. Значение m, заключено в пределах от 0 до $[W/w_i]$, где $[W/w_i]$ - целая часть числа W/w_i.

3. Состояние x_i, на этапе i выражает суммарный вес предметов, решения о погрузке которых приняты на этапах i, i+1, ..., n. Это определение отражает тот факт, что ограничение по весу является единственным, которое связывает **n** этапов вместе.

Пусть $f_i(x_i)$ - максимальная суммарная прибыль от этапов i, i+1, ..., n при заданном состоянии x_i. Проще всего рекуррентное уравнение определяется с помощью следующей двухшаговой процедуры.

Шаг 1. Выразим $f_i(x_i)$ как функцию $f_{i+1}(x_{i+1})$ в виде

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i=0,1,\dots,\left[\frac{W}{w_i}\right] \\ x_i=0,1,\dots W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1,2,3 \tag{3}$$

где $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$

Шаг 2. Выразим x_{i+1} как функцию x_i для гарантии того, что левая часть последнего уравнения является функцией лишь x_i. По определению $x_i - x_{i+1}$ представляет собой вес, загруженный на этапе i, то есть $x_i - x_{i+1} = w_i m_i$ или $x_{i+1} = x_i - w_i m_i$ Следовательно, рекуррентное уравнение приобретает следующий вид

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i = 0,1,\ldots,\left[\frac{W}{w_i}\right] \\ x_i = 0,1,\ldots W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, i = 1,2,3 \quad (4)$$

Пример 3. В автомобиль грузоподъемностью четыре тонны загружаются предметы трех наименований. Приведенная ниже таблица 4 содержит данные о весе одного предмета w_i (в тоннах) и прибыли r_i (в тысячах долларов), получаемой от одного загруженного предмета. Как необходимо загрузить автомобиль, чтобы получить максимальную прибыль?

Таблица 4 – Исходные данные к примеру 3

Предмет i	w_i, т	r_i, тыс. долл.
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Так как вес одного предмета W_i для всех наименований и максимальный вес W принимают целочисленные значения, состояние x_i может принимать лишь целочисленные значения.

Этап 3. Точный вес, который может быть загружен на этапе 3 (предмет наименования 3), заранее неизвестен, но он должен принимать одно из значений 0, 1, ..., 4 (так как W = 4 тонны). Состояния $x_3 = 0$ и $x_3 = 4$ представляют собой крайние случаи, когда предметы третьего наименования совсем не загружаются или загружают автомобиль полностью. Остальные значения x_3 (равные 1, 2 или 3) предполагают частичную загрузку автомобиля предметами третьего наименования. Действительно при этих значениях x_3 все оставшиеся емкости автомобиля могут быть заполнены предметами третьего наименования.

Так как вес W_3 одного предмета третьего типа равен 1 тонне, максимальное количество единиц этого типа, которое может быть загружено, равно [4/1] = 4. Это означает, что возможными значениями x_3 будут 0, 1, 2, 3 и 4. Решение m_3 является допустимым лишь при условии, что $w_3 m_3 \le x_3$. Следовательно, все недопустимые альтернативы (те, для которых $w_3 m_3 > x_3$) исключены. Следующее уравнение является основой для сравнения альтернатив на этапе 3.

$$f_3(x_3) = max\{14m_3\}, max\{m_3\} = \left[\frac{4}{1}\right] = 4 \tag{5}$$

В таблице 5 сравниваются допустимые решения для каждого значения x3.

Таблица 5 – Результаты этапа 3 задачи о загрузке

	$14m_3$					Оптимальное решение	
x_3	$m_3 = 0$	$m_3 = 1$	$m_3 = 2$	$m_3 = 3$	$m_3 = 4$	$f_3(x_3)$	m_3
0	0	-	-	-	-	0	0
1	0	14	-	-	-	14	1
2	0	14	28	-	-	28	2
3	0	14	28	42	-	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

Этап 2. Таблица 6

$$f_2(x_2) = max\{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\}, max\{m_2\} = \left[\frac{4}{3}\right] = 1 \quad (6)$$

Таблица 6 – Результаты этапа 2 задачи о загрузке

	$47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)$		Оптимальное решение	
x_2	$m_2 = 0$	$m_2 = 1$	$f_2(x_2)$	m_2
0	$0 + 0 = 0$	–	0	0
1	$0 + 14 = 14$	–	14	0
2	$0 + 28 = 28$	–	28	0
3	$0 + 42 = 42$	$47 + 0 = 47$	47	1
4	$0 + 56 = 56$	$47 + 14 = 61$	61	1

Этап 1. Таблица 7

Результаты этапа 1 задачи о загрузке

$$f_1(x_1) = max\{31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\}, max\{m_1\} = \left[\frac{4}{2}\right] = 2 \quad (7)$$

Таблица 7 – Результаты этапа 1 задачи о загрузке

	$31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)$			Оптимальное решение	
x_1	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$f_1(x_1)$	m_1
0	0 + 0 = 0	–	–	0	0
1	0 + 14 = 14	–	–	14	0
2	0 + 28 = 28	31 + 0 = 31	–	31	1
3	0 + 47 = 47	31 + 14 = 45	–	47	0
4	**0 + 61 = 61**	**31 + 28 = 59**	**62 + 0 = 62**	**62**	**2**

Оптимальное решение определяется теперь следующим образом. Из условия W = 4 следует, что первый этап решения задачи при $x_1 = 4$ дает оптимальное решение $m_1 = 2$, которое означает, что два предмета первого наименования будут загружены в автомобиль. При этом загрузка оставляет $x_2 = x_1 - 2m_1 = 4 - 2*2 = 0$. Решение на втором этапе при $x_2 = 0$ приводит к оптимальному решению $m_2 = 0$, которое, в свою очередь, дает $x_3 = x_2 - 3m_2 = 0 – 3*0 = 0$. Далее этап 3 при $x_1 = 0$ приводит к $m_3 = 0$.

Следовательно, оптимальным решением задачи является $m_1 = 2$, $m_2 = 0$ и $m_3 = 0$. Соответствующая прибыль равна 62000 долларов.

В таблице 7 для первого этапа нам, по существу, необходимо получить оптимальное решение лишь для x_1 = 4, так как это последний этап, подлежащий рассмотрению. Однако в таблицу включены также вычисления для x_1 = 0, 1, 2 и 3, которые позволяют провести анализ чувствительности решения. Например, что произойдет, если максимальная грузоподъемность автомобиля будет 3 тонны вместо 4? Новое оптимальное решение может быть определено, начиная с x_1 = 3 на первом этапе и продолжая так, как мы поступали при x_1 = 4.

Задача о загрузке является типичным представителем задачи распределения ресурсов, в которой ограниченный ресурс распределяется между конечным числом видов (экономической) деятельности. При этом целью является максимизация соответствующей функции прибыли. В таких моделях определение состояния на каждом этапе будет аналогично приведенному для задачи о загрузке: состоянием на этапе i является суммарное количество ресурса, распределяемого на этапах i, i+l, ..., n.

Задача замены оборудования

Чем дольше механизм эксплуатируется, тем выше затраты на его обслуживание и ниже его производительность. Когда срок эксплуатации механизма достигает определенного уровня, может оказаться более выгодной его замена. Задача замены оборудования, таким образом, сводится к определению оптимального срока эксплуатации механизма.

Предположим, что мы занимаемся заменой механизмов на протяжении t лет. В начале каждого года принимается решение либо об эксплуатации механизма еще один год, либо о замене его новым. Обозначим через $r(t)$ и $c(t)$ прибыль от эксплуатации t-летнего механизма на протяжении года и затраты на его обслуживание за этот же период. Далее пусть $s(t)$ - стоимость продажи механизма, который эксплуатировался t лет. Стоимость приобретения нового механизма остается неизменной на протяжении всех лет и равна I.

Элементы модели динамического программирования таковы.

1. Этап i представляется порядковым номером года, $i = 1, 2, ..., n$.

2. Вариантами решения на i-м этапе (т.е. для i-го года) являются альтернативы: продолжить эксплуатацию или заменить механизм в начале i-го года.

3. Состоянием на i-м этапе является срок эксплуатации t (возраст) механизма к началу i-го года.

Пусть f_i (t) - максимальная прибыль, получаемая за годы от i до n при условии, что в начале i-го года имеется механизм t-летнего возраста. Рекуррентное уравнение имеет следующий вид:

$$f_i(t) = max \begin{cases} r(t)-c(t)+f_{i+1}(t+1), \text{ если эксплуатировать механизм} \\ r(0)-s(t)-I-c(0)+f_{i+1}(1), \text{ если заменить механизм} \end{cases} \quad (8)$$

где $f_{n+1}(t)=0$

Пример 4. Компания планирует определить оптимальную политику замены используемого в настоящее время трехлетнего механизма на протяжении следующих четырех лет (n = 4), то есть вплоть до начала пятого года. Приведенная таблица 8 содержит относящиеся к задаче данные. Компания требует обязательной замены механизма, который находится в эксплуатации 6 лет. Стоимость нового механизма равна 100000 долларов.

Таблица 8 – Исходные данные к примеру 4

Возраст t, лет	Прибыль r(t), доллары	Стоимость обслуживания c(t), доллары	Остаточная стоимость s(t), доллары
0	20000	200	-
1	19000	600	80000
2	18500	1200	60000
3	17200	1500	50000
4	15500	1700	30000
5	14000	1800	10000
6	12200	2200	5000

Определение допустимых значений возраста механизма на каждом этапе является нетривиальной задачей. На рисунке 3 представлена рассматриваемая задача замены оборудования в виде сети. В начале первого года имеется механизм, эксплуатирующийся 3 года (на графике рисунка 3 по оси Y откладывается возраст механизма). Мы можем либо заменить его (З), либо эксплуатировать (С) на протяжении следующего года. Если механизм заменили, то в начале второго года его возраст будет равен одному году, в противном случае его возраст будет 4 года. Такой же подход используется в начале каждого года, начиная со второго по четвертый.

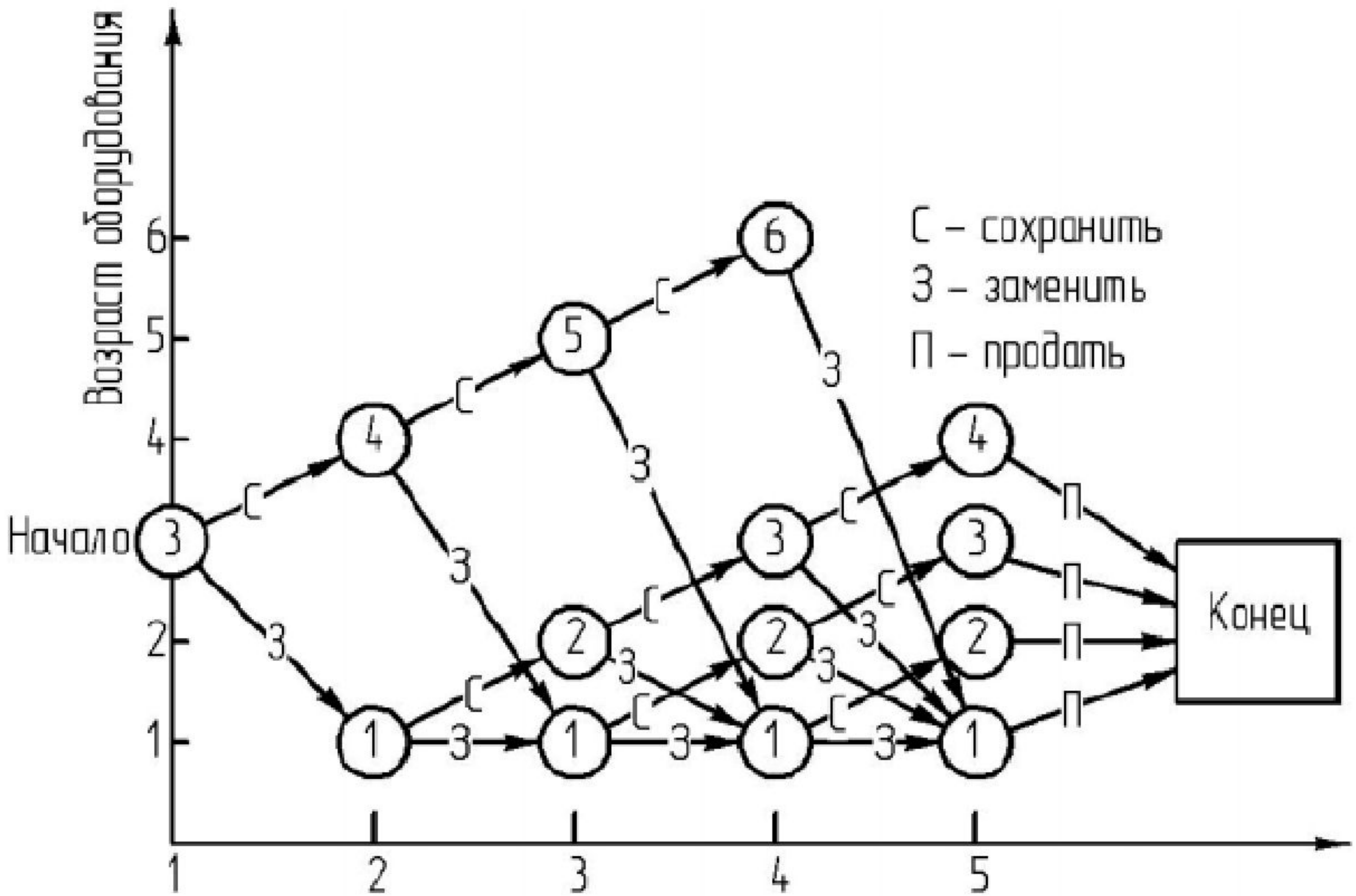

Рисунок 3 – Схема возможной замены механизма

Если однолетний механизм заменяется в начале второго или третьего года, то заменивший его механизм к началу следующего года также будет однолетним. К тому же, в начале 4-го года 6-летний механизм обязательно должен быть заменен, если он еще эксплуатируется; в конце 4-го года все механизмы продаются (П) в обязательном порядке. На схеме сети также видно, что в начале второго года возможны только механизмы со сроком эксплуатации 1 или 4 года. В начале третьего года механизм может иметь возраст 1, 2 или 5 лет, а в начале четвертого - 1, 2, 3 или 6 лет.

Решение данной задачи эквивалентно поиску маршрута максимальной длины (то есть приносящего максимальную прибыль) от начала первого года к концу четвертого в сети, показанной на рисунке 3. При решении этой задачи используем табличную форму записи (числовые данные в таблице кратны тысячам долларов).

Этап 4.

Таблица 9 – Результаты этапа 4 задачи замена оборудования

	С	З	Оптимум	
t	$r(t) + s(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + s(1) - c(0) - I$	$f_4(t)$	Решение
1	19,0 + 60 – 0,6= 78,4	20 + 80 + 80 – 0,2 – 100 = 79,8	79,8	З
2	18,5 + 50 – 1,2= 67,3	20 + 60 + 80 – 0,2 – 100 = 59,8	67,3	С
3	17,2 + 30 – 1,5= 45,7	20 + 50 + 80 – 0,2 – 100 = 49,8	49,8	З
6	Необходима замена	20 + 5 + 80 – 0,2 – 100 = 4,8	4,8	З

Этап 3.

Таблица 10 – Результаты этапа 3 задачи замена оборудования

	C	З	Оптимум	
t	$r(t) - c(t) + f_4(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_4(t)$	$f_3(t)$	Решение
1	19,0 – 0,6 + 67,3 = 85,7	20 + 80 – 0,2 – 100 + 79,8 = 79,6	85,7	C
2	18,5 – 1,2 + 49,8 = 67,1	20 + 60 – 0,2 – 100 + 79,8 = 59,6	67,1	C
5	14,0 – 1,8 + 4,8 = 17,0	20 + 10 – 0,2 – 100 + 79,8 = 9,6	17,0	З

Этап 2.

Таблица 11 – Результаты этапа 3 задачи замена оборудования

	C	З	Оптимум	
t	$r(t) - c(t) + f_3(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_3(t)$	$f_2(t)$	Решение
1	19,0 – 0,6 + 67,3 = 85,5	20 + 80 – 0,2 – 100 + 85,7 = 85,5	85,5	C или З
4	15,5 – 1,7 + 19,6 = 33,4	20 + 30 – 0,2 – 100 + 85,7 = 67,1	35,5	З

Этап 1.

Таблица 12 – Результаты этапа 3 задачи замена оборудования

	C	З	Оптимум	
t	$r(t) - c(t) + f_2(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_2(t)$	$f_1(t)$	Решение
3	17,2 – 1,5 + 35,5 = 51,2	20 + 50 – 0,2 – 100 + 85,5 = 55,3	55,3	З

На рисунке 4 показана последовательность получения оптимального решения. В начале первого года оптимальным решением при t = 3 является замена механизма. Следовательно, новый механизм к началу второго года будет находиться в эксплуатации 1 год. При t = 1 в начале второго года оптимальным решением будет либо использование, либо замена механизма. Если он заменяется, то новый к началу третьего года будет находиться в эксплуатации 1 год, иначе механизм будет иметь возраст 2 года. Описанный процесс продолжается до тех пор, пока не будет определено оптимальное решение для четвертого года.

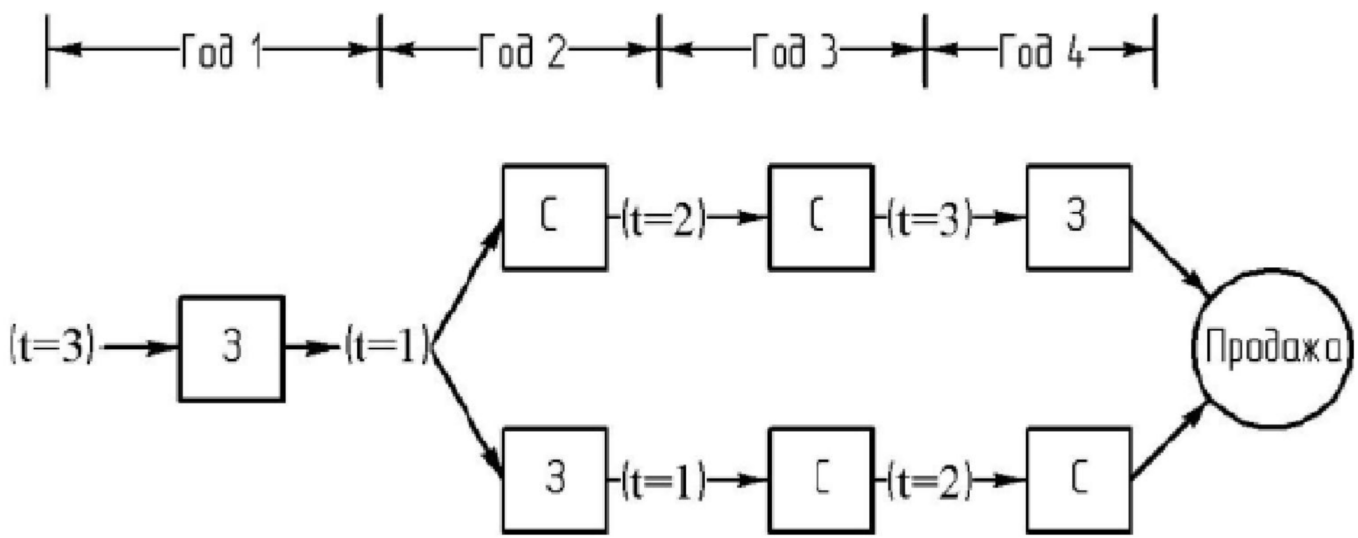

Рисунок 4 – Решение примера 4

Следовательно, начиная с первого года эксплуатации механизма, альтернативными оптимальными стратегиями относительно замены механизма будут (З, С, С, З) и (З, З, С, С). Общая прибыль составит 55300 долларов.

Главная проблема методов динамического программирования - проблема размерности. В рассмотренных задачах состояние системы определялось одной переменной. Увеличение количества переменных ведет к резкому увеличению объема расчетов.