Математические методы в биологии

Блок 2. Случайные величины

Лекция 4

Козлова Ольга Сергеевна
89276755130, olga-sphinx@yandex.ru

Задача о счастливом билете

Какова вероятность попадания счастливого билета в общественном транспорте?

Дмитрий Мастер (1551), Вопрос решён 5 лет назад

Дополнен 5 лет назад

Вы не поняли. Я прошу решить задачу с точки зрения теории вероятностей

Нравится Подписаться

ЛУЧШИЙ ОТВЕТ

BELLADONNA Мудрец (19097) 5 лет назад

Вероятность равна 0,055252
Посмотри здесь:
http://www.ega-math.narod.ru/Quant/Tickets.htm#A5

Источник: Теория вероятностей

2 Нравится Комментировать Пожаловаться

5 ОТВЕТОВ

Олюшка Мастер (1549) 5 лет назад

50 на 50-либо счастливый, либо нет

Нравится Комментировать Пожаловаться

ОТВЕТЫ@mail.ru®

Задача о счастливом билете

k=9

- Пусть номер билета шестизначный
- Критерий «счастливости»: сумма первых трёх цифр равна сумме трёх последних
- Пусть номера билетов начинаются с 000 000 и заканчиваются 999 999 (их 1 млн.)

Пусть *k* – сумма первых (и последних) 3х цифр. $k = \overline{0{,}27}$ (28 знач-й)
N(k) – число трёхзначных чисел с суммой цифр, равной *k*
Число счастливых билетов для k равно $N(k)^2$
ВОПРОС: Как найти $\sum_{k=0}^{27} N(k)^2$???

Переобозначим $N(k)$ как $N_3(k)$ и будем действовать последовательно.
$N_1(k) = 1$ для $k = \overline{0{,}9}$ и 0 для $k = \overline{10{,}27}$. *(номера типа «00», «11»,…, «99», их 10 штук)*
Выведем $N_n(k)$ в общем виде, зная $N_{n-1}(k)$ (зададим способ перехода).
Пусть l – первая цифра *n*-значного «полуномера» $0 \le l \le 9, l \le k$, значит, для того, чтобы сумма цифр этого «полуномера» была равна *k*, остальные цифры должны в сумме давать $k - l$.Число таких «полуномеров», начинающихся на l, равно $N_{n-1}(k-l)$. Просуммируем это количество по $l = \overline{0{,}9}$ и получим $N_n(k) = \sum_{l=0}^{9} N_{n-1}(k-l)$. Если *k<9*, все значения $N_{n-1}(k-l)$ для $l > k$ считаем равными нулю.

Это рекуррентное соотношение для вывода $N_n(k)$ для любого n и k в общем виде!

- Зная рекуррентное соотношение и $N_1(k)$ для всех k, составим таблицу для $N_n(k)$.

$N_1(k) = 1$ для $k = \overline{0,9}$ и 0 для $k = \overline{10,27}$

$$N_n(k) = \sum_{l=0}^{9} N_{n-1}(k-l)$$

Например, $N_2(6) = N_1(6) + N_1(5) + N_1(4) + N_1(3) +$
$+N_1(2) + N_1(1) + N_1(0) = 7$

$N_3(5) = N_2(5) + N_2(4) + N_2(3) + N_2(2) +$
$+N_2(1) + N_2(0) = 21$

Назад к вероятности:

- Для 2х-знач. билетов $P = \frac{10}{100} = 0,1$
- Для 4х-знач. билетов $P = \frac{670}{10000} = 0,067$
- Для 6ти-знач. билетов $P = \frac{55252}{1000000} = 0,055252$
- Для 8ми-знач. билетов $P = \frac{4816030}{100000000} = 0,0481603$

Для 6ти-знач. билетов в среднем каждый 18й билет является счастливым!

Длина половины номера

k	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
0	1	1	1	1
1	1	2	3	4
2	1	3	6	10
3	1	4	10	20
4	1	5	15	35
5	1	6	21	56
6	1	7	28	84
7	1	8	36	120
8	1	9	45	165
9	1	10	55	220
10		9	63	282
11	$\sum_k n^2 = 10$	8	69	348
12		7	73	415
13		6	75	480
14		5	75	540
15		4	73	592
16		3	69	633
17		2	63	660
18		1	55	670
19			45	660
20		$\sum_k n^2 = 670$	36	633
21			28	592
22			21	540
23			15	480
24			10	415
25			6	348
26			3	282
27			1	220
28			$\sum_k n^2 = 55252$	165
29				120
30				84
31				56
32				35
33				20
34				10
35				4
36				1

$\sum_k n^2 = 4816030$

Числовые характеристики дискретной случайной величины

- Математическое ожидание $M(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i * P(X = X_i)$

Две д.с.в. с одинаковым мат.ожиданием:

X	**-0.5**	**0.5**
P	0.5	0.5

Y	**-100**	**100**
P	0.5	0.5

$M(X) = M(Y) = 0$

- Дисперсия (*dispersion - рассеяние*) – мера изменчивости случайной величины. Это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2]$$

ВОПРОС: Откуда квадрат??

Неслучайная (постоянная величина)

ОК, пусть без квадрата: $M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$

- Вычисление дисперсии «в лоб»:

X	**1**	**2**	**3**
P	0,3	0,5	0,2

$M(X) = 1 * 0{,}3 + 2 * 0{,}5 + 3 * 0{,}2 = 1{,}9$

$(X-M(X))^2$	**$(1-1{,}9)^2=(-0{,}9)^2=0{,}81$**	**$(2-1{,}9)^2=(0{,}1)^2=0{,}01$**	**$(3-1{,}9)^2=(1{,}1)^2=1{,}21$**
P	0,3	0,5	0,2

$D(X)$

$M[(X - M(X))^2] = 0{,}81 * 0{,}3 + 0{,}01 * 0{,}5 + 1{,}21 * 0{,}2 = 0{,}243 + 0{,}005 + 0{,}242 = 0{,}49$

Формула для вычисления дисперсии

- Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом математического ожидания X:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Доказательство.

const

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = M\left[X^2 - 2M(X)X + (M(X))^2\right] =$$

const

$$M(X)^2 - M(2M(X)X) + (M(X))^2 = M(X)^2 - M(2M(X))M(X) + (M(X))^2 =$$

$$= M(X)^2 - 2M(X)M(X) + (M(X))^2 = M(X)^2 - 2(M(X))^2 + (M(X))^2 =$$

$$= M(X^2) - (M(X))^2$$

Пример.

X	1	2	3
P	0,3	0,5	0,2

X^2	1	4	9
P	0,3	0,5	0,2

$$M(X) = 1 * 0{,}3 + 2 * 0{,}5 + 3 * 0{,}2 = 1{,}9$$

$$M(X^2) = 1 * 0{,}3 + 4 * 0{,}5 + 9 * 0{,}2 = 4{,}1$$

$$D(X) = 4{,}1 - 1{,}9^2 = 4{,}1 - 3{,}61 = 0{,}49$$

Свойства дисперсии

- Дисперсия постоянной величины равна 0: $D(C) = 0$

Доказательство. $D(C) = M\left[\left(C - M(C)\right)^2\right] = M(0) = 0$

- Постоянный множитель выносится за знак дисперсии возведённым в квадрат: $D(CX) = C^2 D(X)$

Доказательство. $D(CX) = M\left[\left(CX - M(CX)\right)^2\right] = M\left[\left(CX - C * M(X)\right)^2\right] =$
$M[(C(X - M(X)))^2] = C^2 * M\left[\left(X - M(X)\right)^2\right] = C^2 D(X)$

- Дисперсия суммы взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий

Доказательство для двух слагаемых.

$$D(X+Y) = M\left((X+Y)^2\right) - \left(M(X+Y)\right)^2 =$$
$$M(X^2 + 2XY + Y^2) - \left(M(X) + M(Y)\right)^2 = M(X^2) + \cancel{M(2XY)} + M(Y^2) -$$
$$\left(M(X)\right)^2 - \cancel{2M(X)M(Y)} - \left(M(Y)\right)^2 =$$
$$M(X^2) + M(Y^2) - \left(M(X)\right)^2 - \left(M(Y)\right)^2 = D(X) + D(Y)$$

- $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$ Доказательство:

$$D\left(X + (-Y)\right) = D(X) + (-1)^2 D(Y)$$

Дисперсия числа появлений событий в независимых испытаниях

- n независимых испытаний
- Событие А появляется в каждом из них с вероятностью p
- Дискретная случайная величина X – число появления события А в этих испытаниях

ВОПРОС: Чему равна дисперсия случайной величины X - числа появлений события А в испытаниях?

ОТВЕТ: Дисперсия числа появлений события А в n испытаниях равно произведению n на p на (1-p): $D(X)=n*p*(1-p)$

<u>Доказательство:</u> Пусть X_1 – число появления события А в первом испытании, X_2 – во втором и.т.д, X_n – в n-ом. Всего событие А появилось $X_1+X_2+\ldots+X_n$ раз. По свойству дисперсии суммы, $D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)$.

Распишем $D(X_1)$, $D(X_2)$,…$D(X_n)$: $D(X_1)=M(X_1^2)-(M(X_1))^2$

Дискретная случайная величина X_1^2 (как и X_1) принимает значение 1 с вероятностью p (событие случилось) и значение 0 с вероятностью (1-p) (событие не случилось). Поэтому $D(X_1)=1*p+0*(1-p)-(1*p+0*(1-p))^2=p-p^2=p(1-p)$. И так для каждого n, поэтому $D(X)=n*p*(1-p)$.

Данная случайная величина X распределена по биномиальному закону, поэтому можно сказать, что

*ДИСПЕРСИЯ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ N И P РАВНА ПРОИЗВЕДЕНИЮ N*P*(1-P).*

Среднее квадратическое отклонение

- Определение. Среднее квадратическое отклонение случайной величины – это квадратный корень из её дисперсии.

сигма

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Среднее квадратическое отклонение позволяет сохранить размерность случайной величины

<u>**Типовая задача на вычисление мат.ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины.**</u>

Пусть случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	**2**	**3**	**10**
P	0,1	0,4	0,5

Найти M(X),D(X) и $\sigma(X)$

$$M(X) = 2*0{,}1 + 3*0{,}4 + 10*0{,}5 = 6{,}4$$

X^2	**4**	**9**	**100**
P	0,1	0,4	0,5

$$M(X^2) = 4*0{,}1 + 9*0{,}4 + 100*0{,}5 = 54$$

$$\Rightarrow D(X) = 54 - 6{,}4^2 = 13{,}04$$

$$\sigma(X) = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}61$$

Ответ. Данная случайная величина X имеет мат.ожидание 6,4, дисперсию 13,04 и среднее квадратическое отклонение 3,61.

От дискретности – к непрерывности!

- Закон распределения дискретной с.в. можно задать таблично, перечислив <u>все</u> её значения. Закон распределения непрерывной с.в., принимающей <u>любые</u> значения на промежутке [a,b], так задать <u>нельзя</u>!

Что же делать?

- Введём понятие функции распределения вероятностей случайной величины.

<u>Определение.</u> Функция распределения F(x), x – любое действительное число – такая функция, которая определяет вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x)$$

Значения такой функции лежат на отрезке [0,1], а сама функция неубывающая.

Функцию распределения вероятностей можно задать не только для непрерывной, но и для дискретной с.в.!

Пример. Дискретная с.в. распределена по закону:

X	**1**	**4**	**8**
P	0,3	0,1	0,6

Определим функцию её распределения.

F(x)=0 для x≤1 (X не принимает значения, меньшие 1)

F(x)=0,3 для 1<x≤4 (X может принять значение 1 с вероятностью 0,3)

F(x)=0,4 для 4<x≤8 (X может принять значение 1 с вероятностью 0,3 или значение 4 с вероятностью 0,1)

F(x)=1 для x>8 (все значения д.с.в. лежат левее 8 на числовой оси)

Плотность распределения вероятностей с.в. (только для непрерывных!)

- Плотность распределения вероятностей – первая производная от функции распределения (функция распределения – первообразная плотности)

$$f(x) = F'(x)$$

Плотность распределения

Функция распределения

Тогда вероятность того, что непрерывная с.в. примет значение на интервале (a,b), равна интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

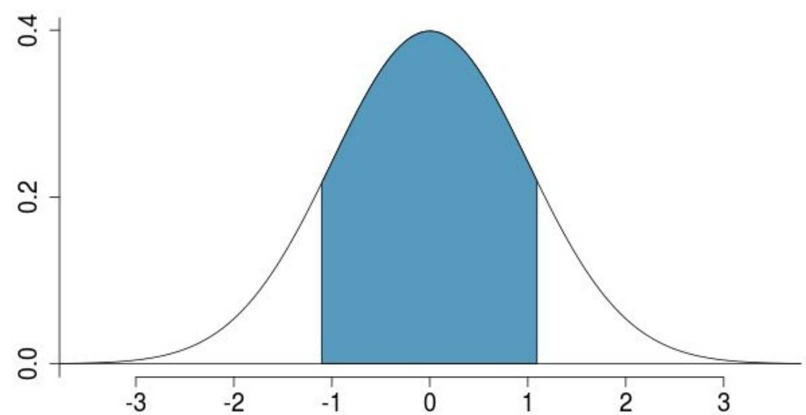
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Или, геометрически: вероятность того, что н.с.в. примет значение на интервале (a,b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной:

- Кривой плотности распределения сверху
- Осью абсцисс – снизу
- Прямыми x=a и x=b – слева и справа

На картинке a=-1,11 и b=1,1

Вероятность того, что н.с.в. примет знач. на (-1,11, 1,11), равна 0,731.



$P(-1.11 < X < 1.1) = 0.731$

Законы распределения н.с.в.

1. Равномерный закон распределения вероятностей

Распределение вероятностей называют **<u>равномерным</u>**, если на отрезке [a,b], которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения вероятностей сохраняет постоянное значение, равное 1/(b-a)

Пример. Пусть с.в. X принимает с одинаковой вероятностью любое значение на отрезке [a,b]. Тогда её функция распределения F(x) выглядит так:

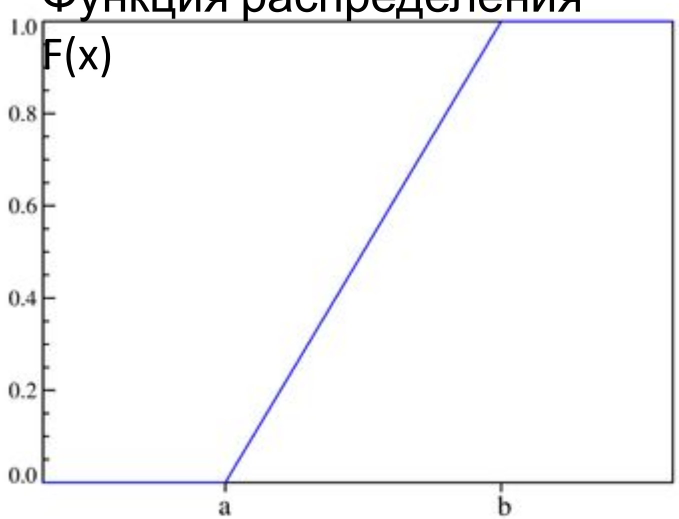
F(x)=0, если x≤a,

F(x)=1, если x>b

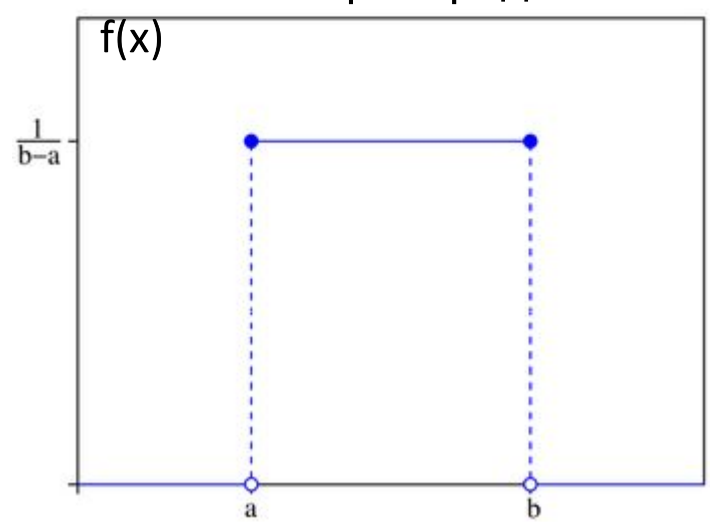
F(x)=$\int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x-a}{b-a}$, если a<x≤b

Первая производная линейной функции – константа!

Функция распределения F(x)



Плотность распределения f(x)



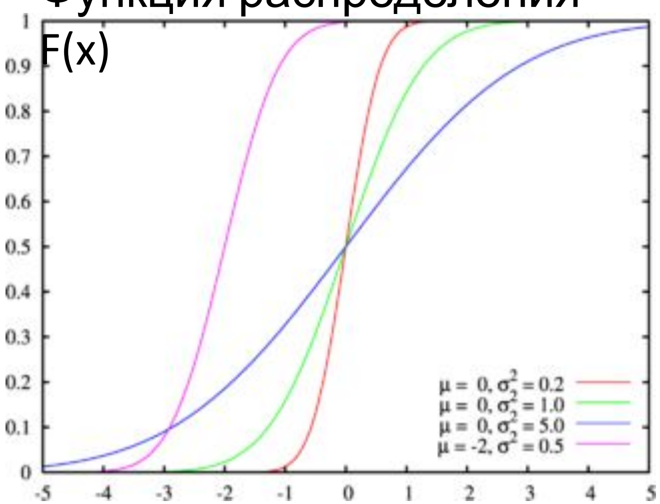
Законы распределения н.с.в.

2. Нормальный (гауссовский) закон распределения вероятностей
- Случайная величина X определена на всей оси абсцисс
- Два параметра: μ (мат. ожидание) и σ (среднее квадратическое отклонение)

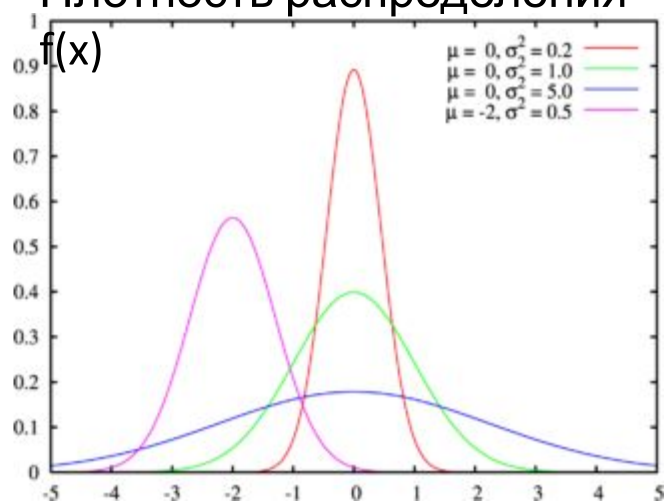
Нормальное распределение – то распределение, плотность которого задаётся формулой Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Функция распределения F(x)



Плотность распределения f(x)



Изменение μ приводит к сдвигу кривой вдоль оси x; изменение σ приводит к сжатию/растяжению кривой

Нормированное (стандартное) норм.распр. – норм.распр. с параметрами μ=0 и σ=1

Ещё о нормальном распределении

- Правило одной сигмы:

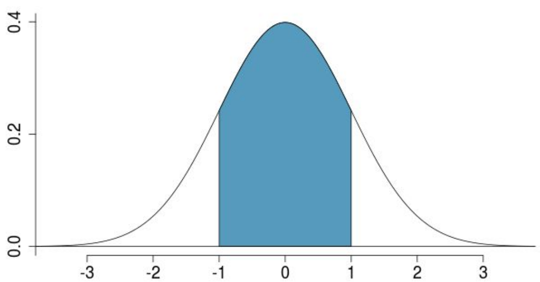
Непрерывная случайная величина, распределённая по нормальному закону, попадает в интервал $\mu \pm \sigma$ с вероятностью 0,68

- Правило двух сигм:

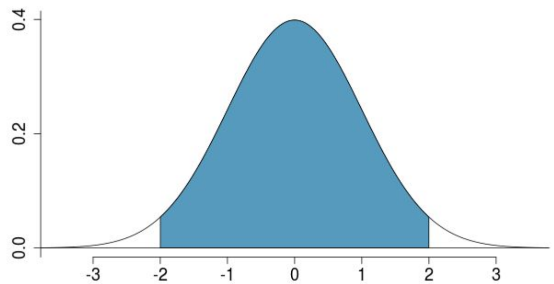
Непрерывная случайная величина, распределённая по нормальному закону, попадает в интервал $\mu \pm 2\sigma$ с вероятностью 0,95

- Правило трёх сигм:

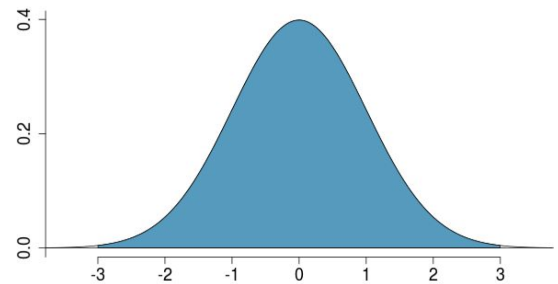
Непрерывная случайная величина, распределённая по нормальному закону, попадает в интервал $\mu \pm 3\sigma$ с вероятностью почти 1



P(-1 < X < 1) = 0.683



P(-2 < X < 2) = 0.954



P(-3 < X < 3) = 0.997

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА: если случайная величина X представляет собой сумму <u>очень большого числа</u> взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму <u>ничтожно мало</u>, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Законы распределения н.с.в.

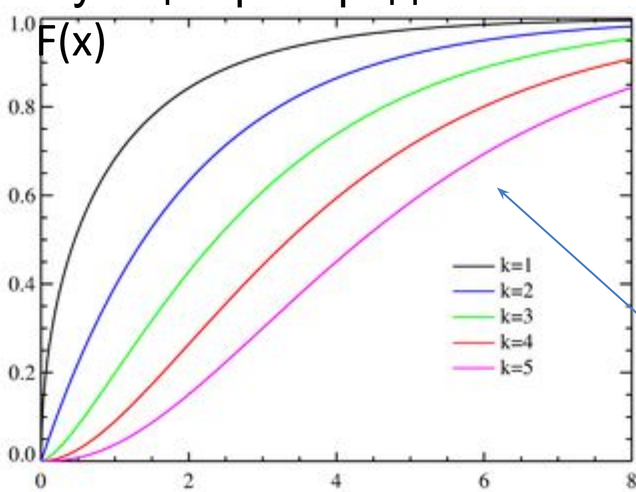
3. Распределение «хи-квадрат» (χ^2)

Распределение «хи-квадрат» – распределение случайной величины, представляющей собой сумму квадратов k <u>независимых стандартных нормальных</u> величин:

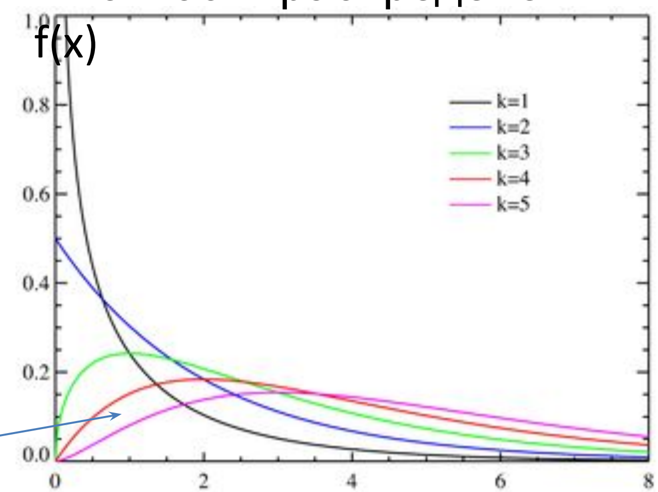
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

С увеличением k распределение «хи-квадрат» приближается к нормальному.

Функция распределения F(x)



Плотность распределения f(x)



Уже для k=5 видны зачатки «нормальности»

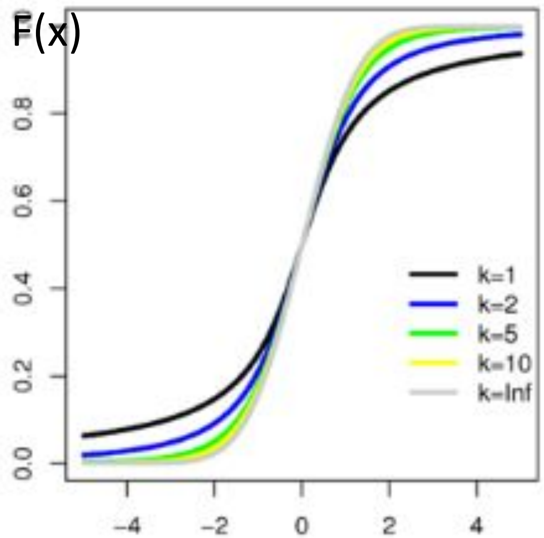
Законы распределения н.с.в.

4. Распределение Стьюдента

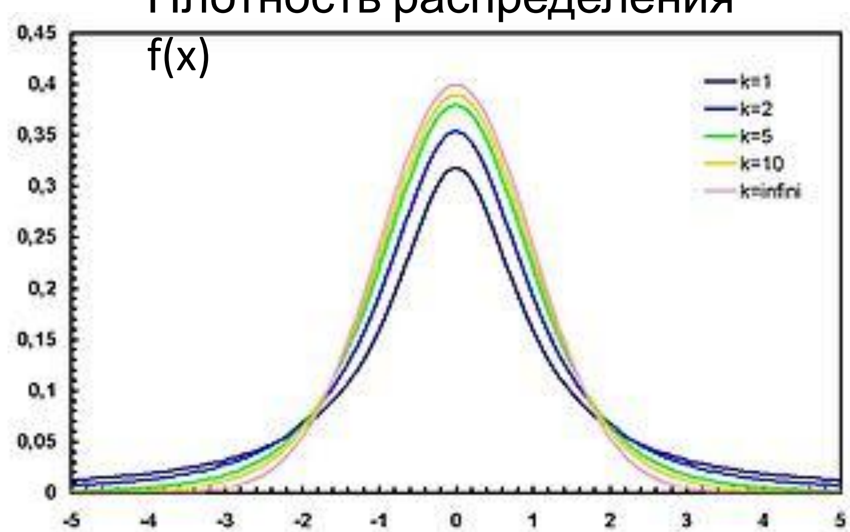
Пусть z – нормальная стандартная случайная величина, а V – независимая от неё величина, имеющая распределение χ^2 с использованием k независимых нормальных стандартных величин (число k ещё называют числом степеней свободы). Тогда случайная величина $T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}}$ имеет распределение Стьюдента с k степенями свободы (его ещё называют t-распределением).

С ростом k распределение Стьюдента стремится к нормальному.

Функция распределения F(x)



Плотность распределения f(x)



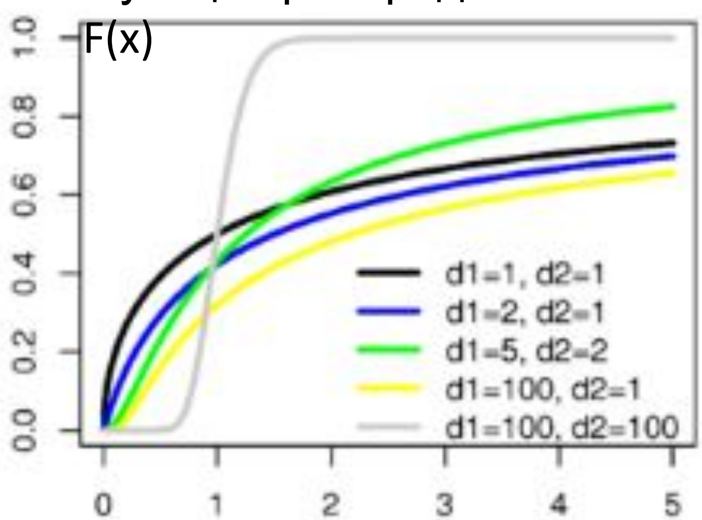
Бледно-фиолетовая линия – обыкновенное нормальное распределение

Законы распределения н.с.в.

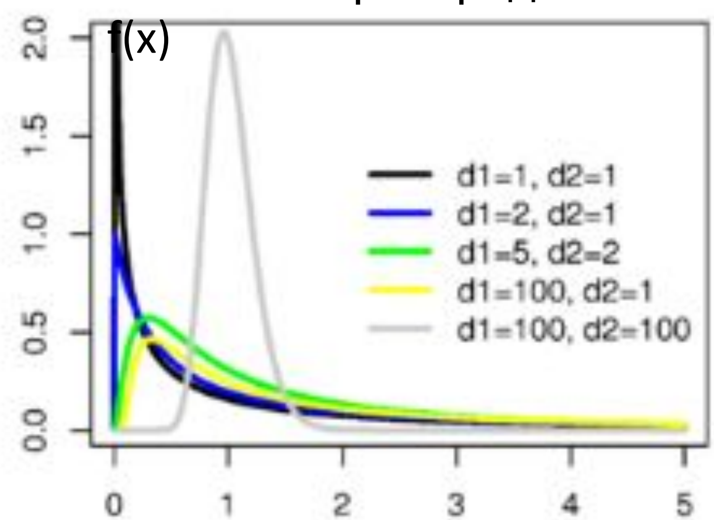
5. Распределение Фишера

Пусть U и V – две независимые случайные величины, имеющие распределение χ^2 с k_1 и k_2 степенями свободы, соответственно. Тогда случайная величина $F = \dfrac{U/k_1}{V/k_2}$ имеет распределение Фишера (или Фишера-Снедекора) со степенями свободы k_1 и k_2 . Также его называют F-распределением.

Функция распределения F(x)



Плотность распределения f(x)



Резюме

- $D(X) = M[(X - M(X))^2]$ - определение дисперсии д.с.в.
- $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$ - удобная формула для вычисления дисперсии д.с.в.
- D(X)=n*p*(1-p) – дисперсия биномиального распределения с пар-рами n и p
- $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ - среднее квадратическое отклонение
- $F(x) = P(X < x)$ – функция распределения
- $f(x) = F'(x)$ – плотность распределения