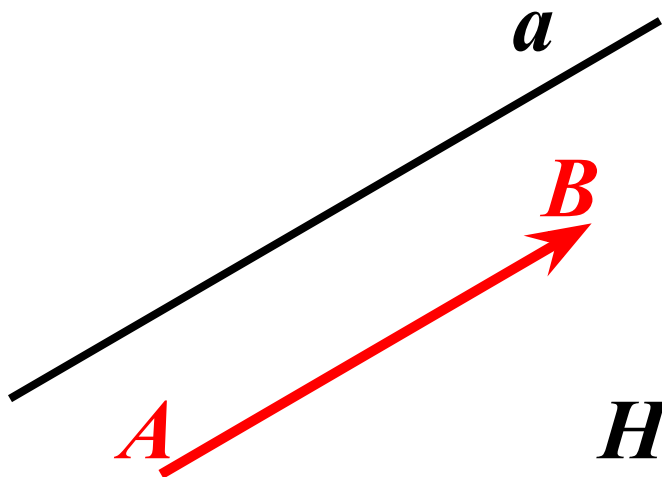


## § 52. Вычисление углов

между прямыми и плоскостями.

# Направляющий вектор прямой.



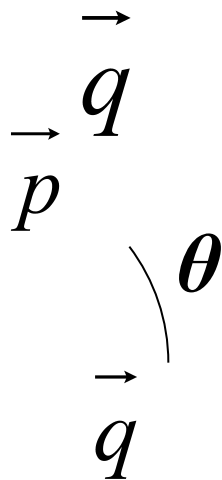
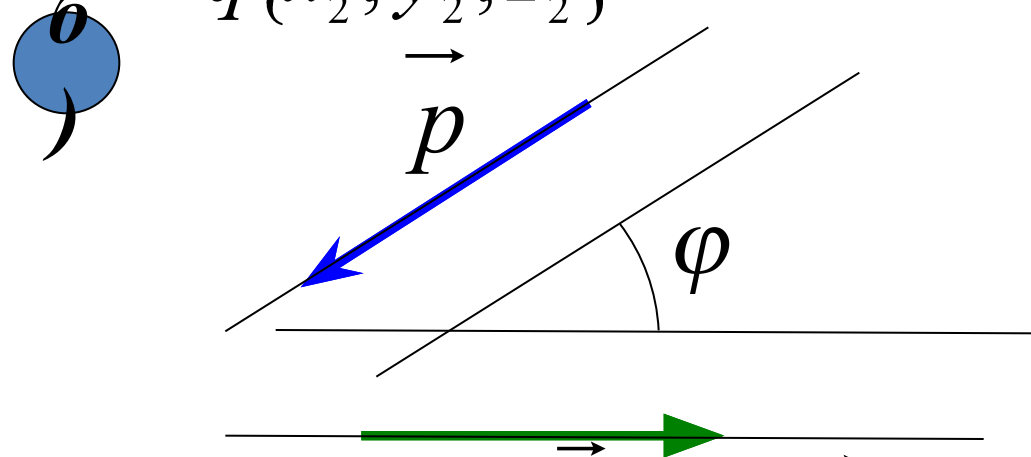
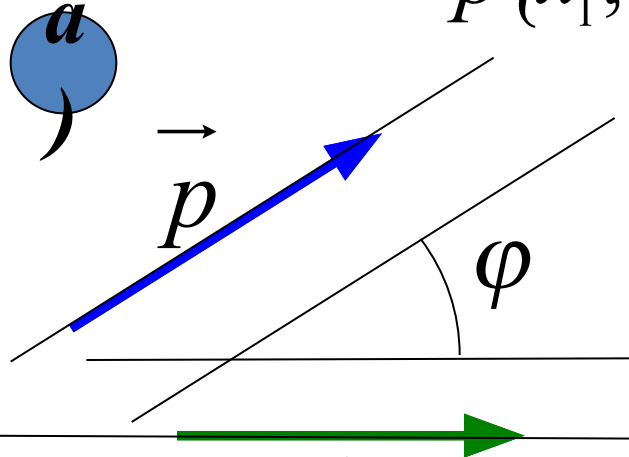
*Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой, если он лежит на самой прямой, либо на прямой, параллельной ей.*

# Разбор задач из учебника (п.52, стр. 114).

**№1. Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.**

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$$

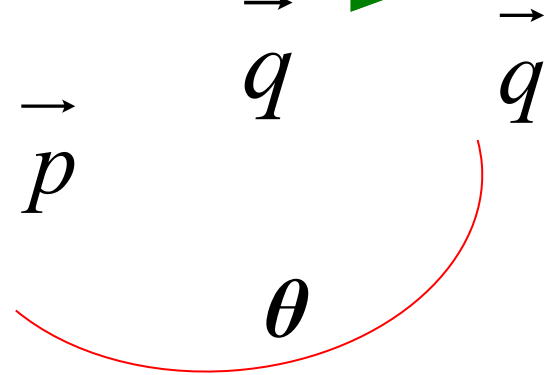
$$\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$$



$\varphi$  – **искомый угол**

$$\alpha = \angle pq$$

$\varphi = \alpha$



$\varphi = 180^\circ - \alpha$

# Разбор задач из учебника (п.52 , стр. 114).

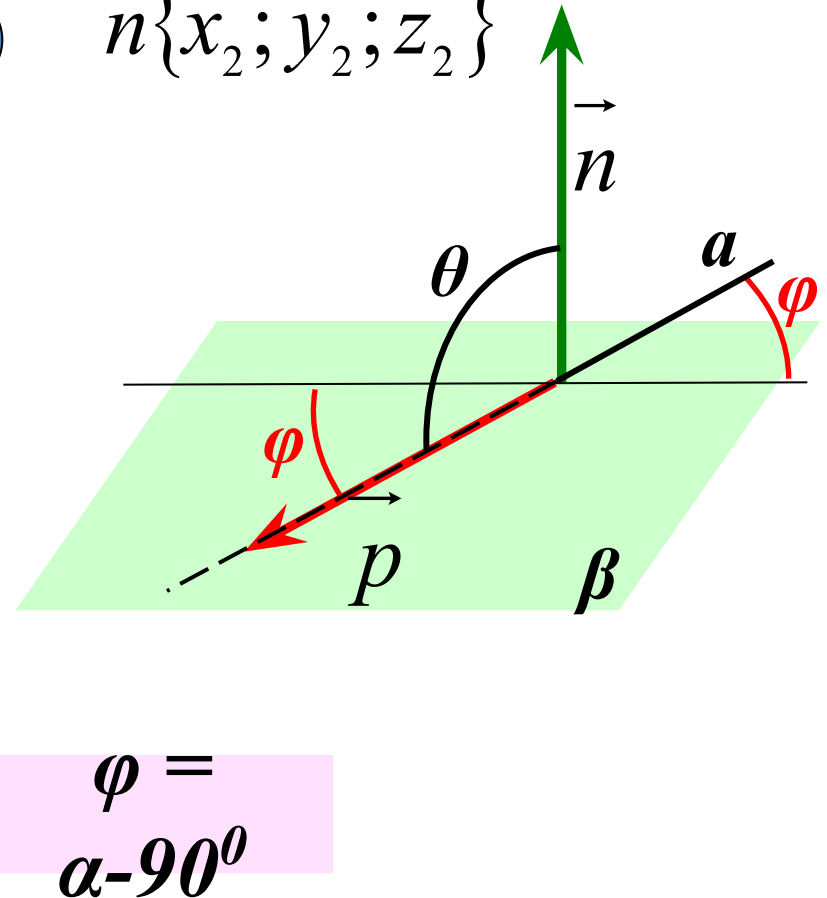
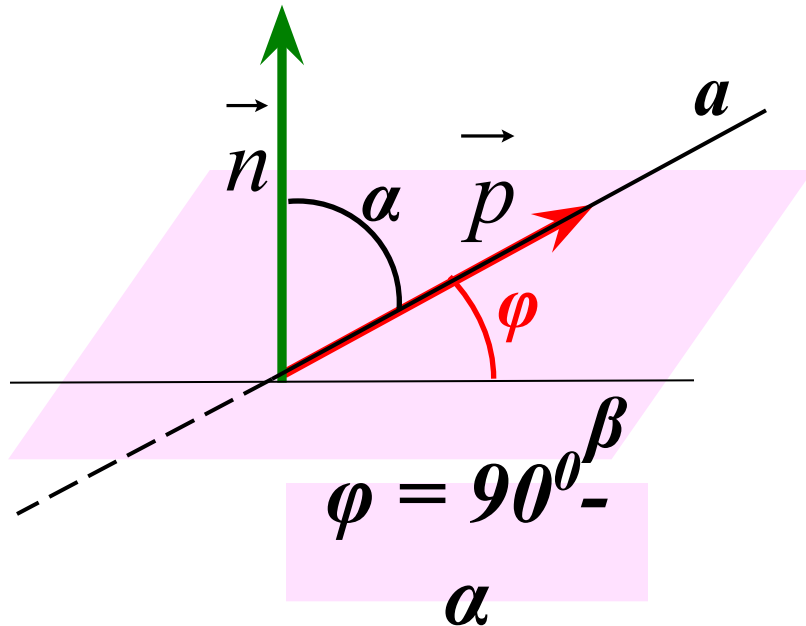
**№2.** Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости.

**а)**

$$\vec{p} \{x_1; y_1; z_1\}$$

**б)**

$$\vec{n} \{x_2; y_2; z_2\}$$



## № 464 (а)

*Дано:*  $A(3;-2;4)$   $B(4;-1;2)$   $C(6;-3;2)$   $D(7;-3;1)$


*Найти:* угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ .

**1. Найдем координаты векторов**

$$\overrightarrow{AB} \{1;1;-2\} \quad \overrightarrow{CD} \{1;0;-1\}$$

**2. Воспользуемся формулой:**

$$\cos \varphi = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$


$$\varphi = 30^{\circ}$$

# **§3. Движение. Виды**

## **движения.**

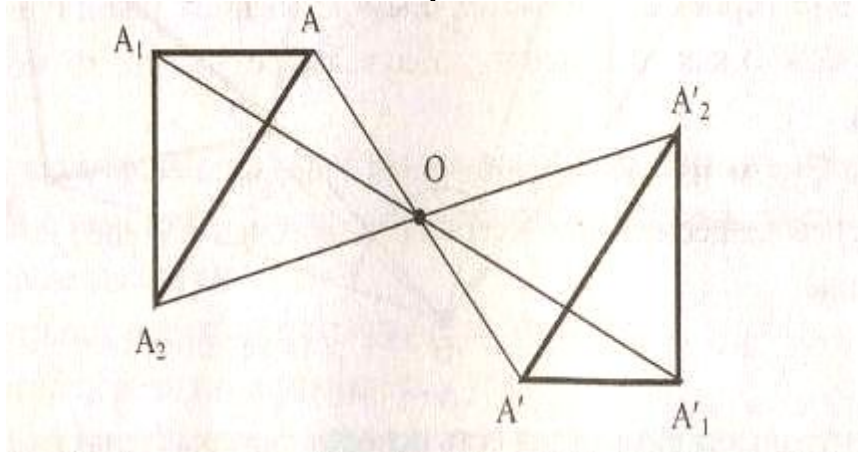
**Движение пространства** – это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками.

### **Виды движения:**

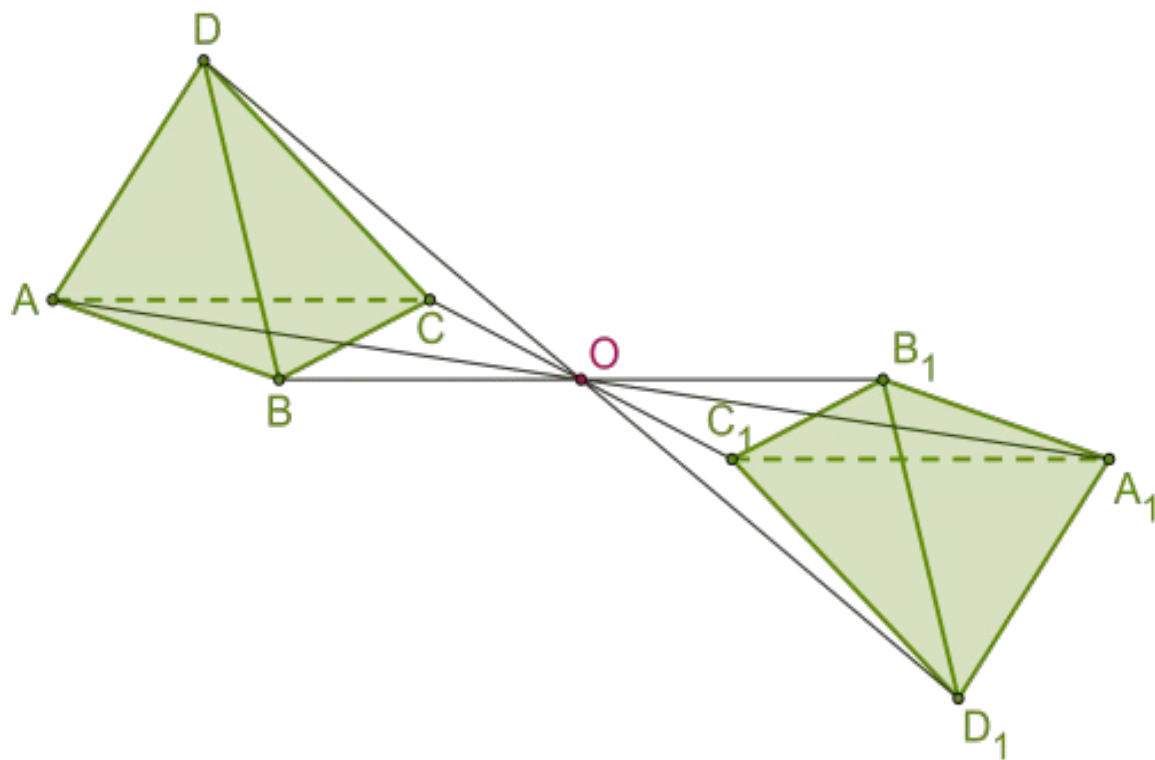
1. **Симметрия:**
  - центральная,
  - осевая,
  - зеркальная.
2. **Параллельный перенос.**
3. **Поворот.**

# ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

*Центральной симметрией называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка  $M$  переходит в симметричную ей точку  $M_1$  относительно данного*



*О.  
на  
плоскости*

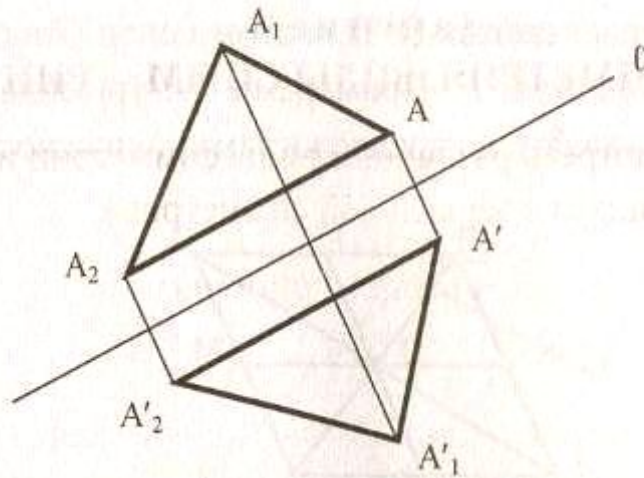


**Центральная симметрия  
(симметрия относительно  
точки)**

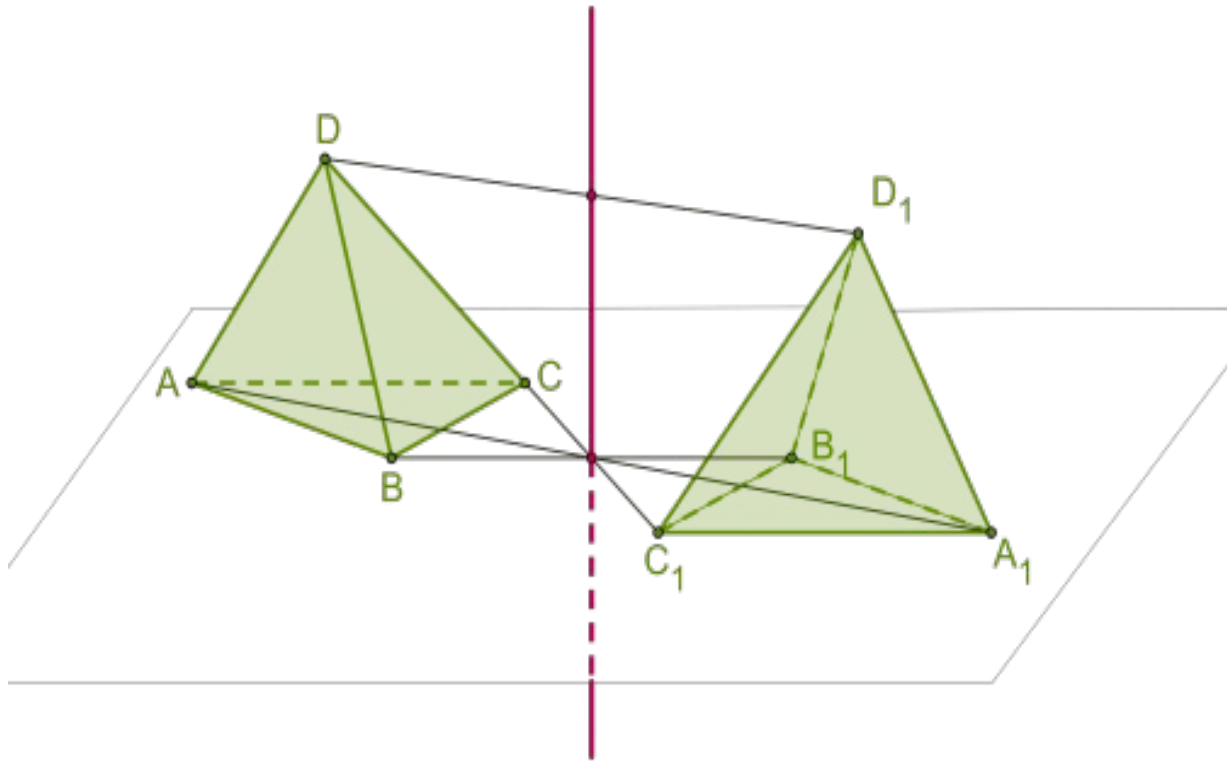


# ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

**Осевой симметрией** с осью  $a$  называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка  $M$  переходит в симметричную ей **относительно оси  $a$ .**



**на  
плоскост  
и**



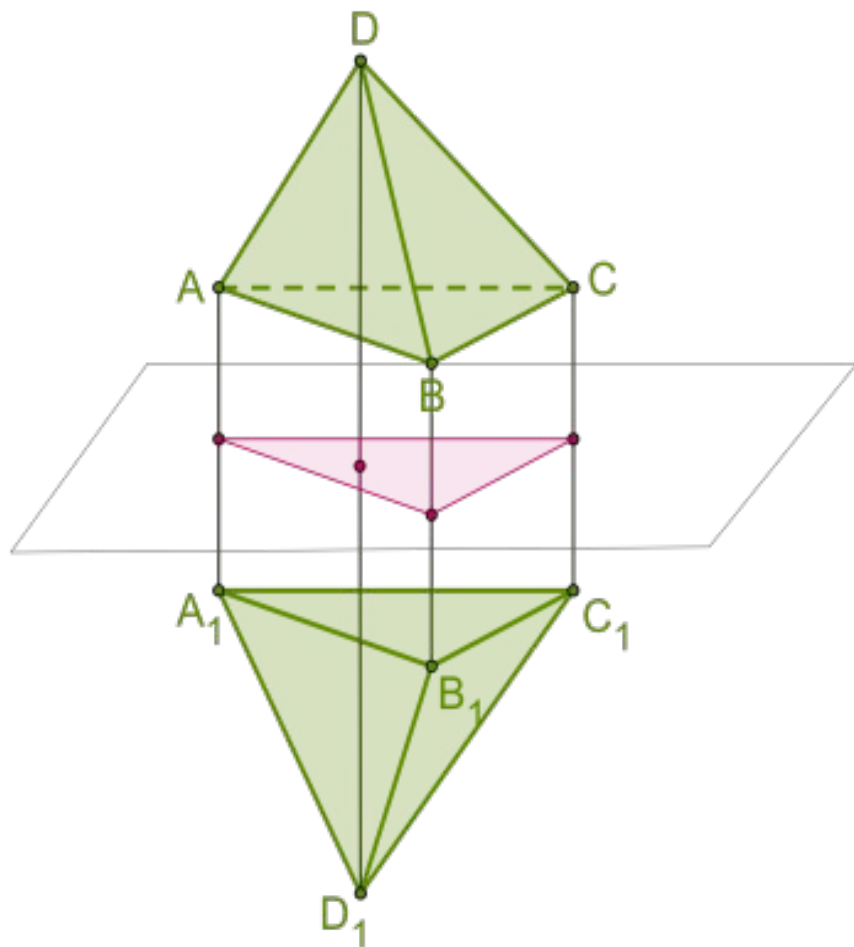
**Осевая симметрия  
(симметрия относительно  
прямой)**

# **ЗЕРКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ**

**ЗЕРКАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ -**

*называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка  $M$  переходит в симметричную ей относительно плоскости  $\alpha$  точку  $M_1$*

*Если преобразование симметрии относительно плоскости переводит фигуру (тело) в себя, то фигура называется симметричной относительно плоскости, а данная*



**Зеркальная  
симметрия  
(симметрия  
относительно  
плоскости)**

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ Перенос

Параллельным переносом  $\forall$  на  $\mathbb{R}^n$

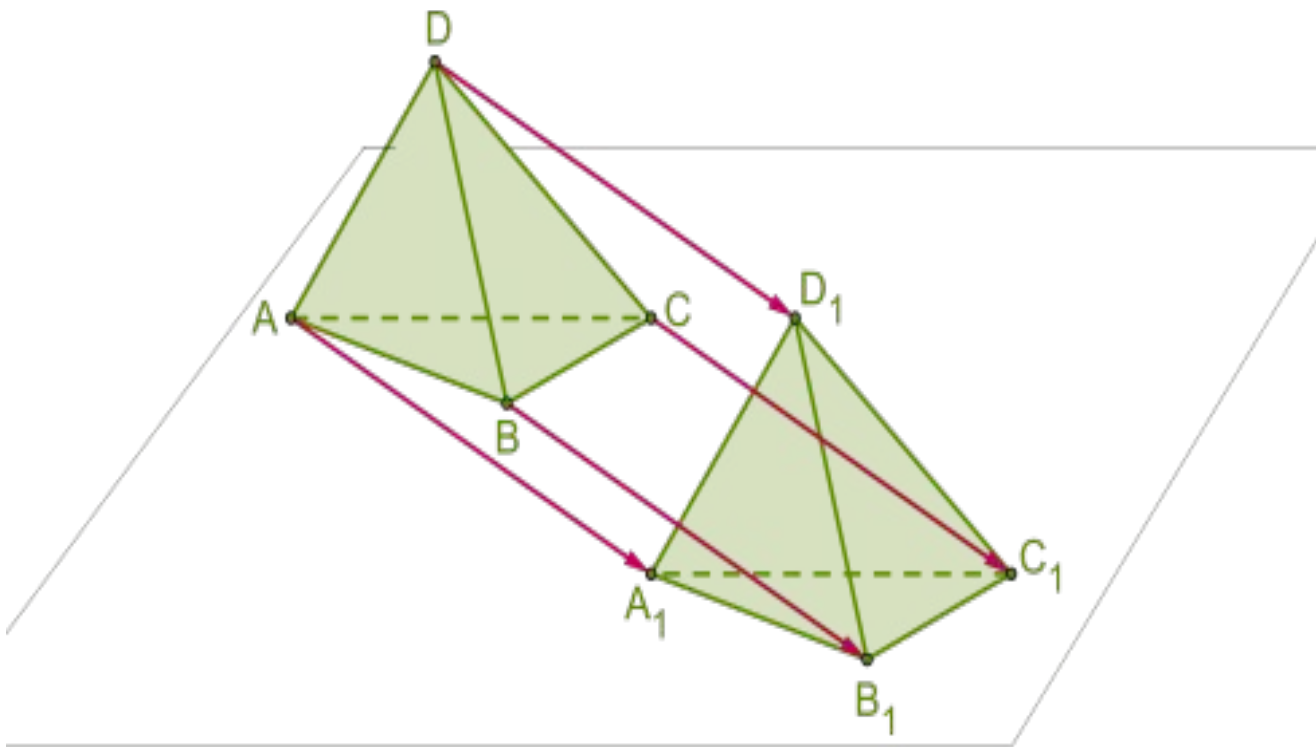
вектор называется  
отображение

пространства на себя, при

котором любая точка  $M$

переходит  $\longrightarrow$  в такую  $\forall$  точку

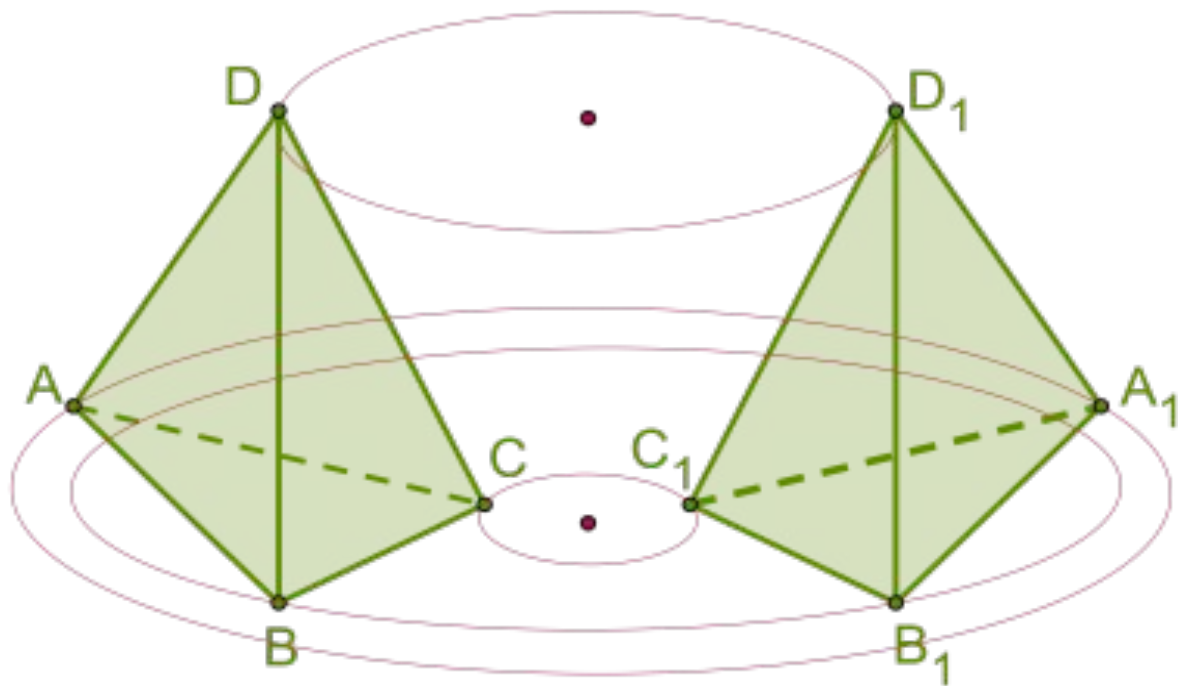
$M_1$ , что  $\overline{MM_1} =$



**Параллельный  
перенос (точки  
переносятся на  
данный вектор)**

# ПОВОРОТ

*Преобразование, при котором каждая точка пространства поворачивается на один и тот же угол  $\alpha$  вокруг заданного центра, называется **вращением или поворотом.***



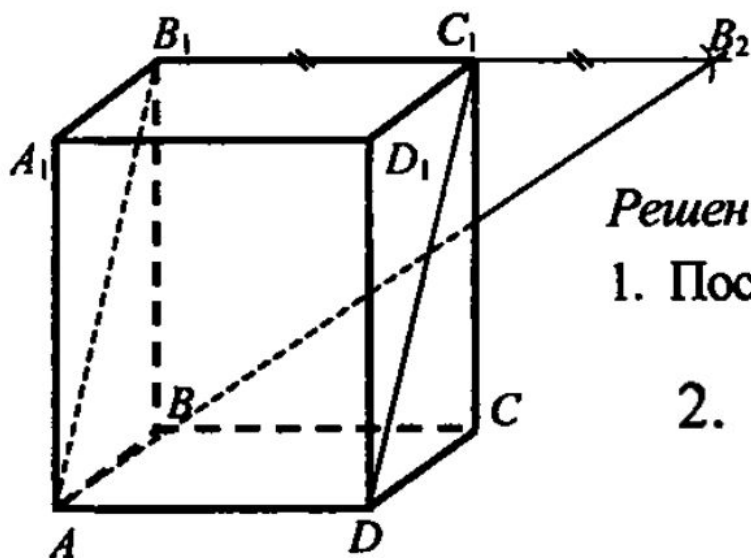
**Поворот на  
данный угол  
вокруг данной  
ТОЧКИ**



***ДОМА***

§ 3, № 478(б, в)

Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб,  $AB = a$ ,  $B_1 \rightarrow B_2$  при симметрии относительно плоскости  $CC_1 D_1$  Найдите:  $AB_2$ .



Решение:

1. Построим точку  $B_2$ :  $B_1 \rightarrow B_2$ ;  $B_1 C_1 \perp C_1 D$ ;  $C_1 B_1 = C_1 B_2$ .

2. Рассмотрим  $\triangle AB_1 B_2$ :  $\angle AB_1 B_2 = 90^\circ$   
(так как  $B_1 B_2 \perp A_1 B_1 C_1$   $B_1 B_2 \perp AB_1$ ).

$$AB_1 = a\sqrt{2}; \quad B_1 B_2 = 2a.$$

$$AB_2 = \sqrt{AB_1^2 + B_1 B_2^2};$$

$$AB_2 = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (2a)^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}.$$



# ***СИММЕТРИЯ В РАСТЕНИЯХ***

- Внимательное наблюдение показывает, что основу красоты многих форм, созданных природой, составляет симметрия.
- *Ярко выраженной симметрией обладают листья, ветви, цветы, плоды.*
- *Зеркальная симметрия характерна для листьев, но встречается и у цветов.*
- *Для цветов характерна*



# **СИММЕТРИЯ В ЖИВОТНОМ МИРЕ**

*Симметрия встречается и в животном мире. Однако в отличие от мира растений симметрия в животном мире наблюдается не так часто.*

*Рассмотрим, например, бабочку.*



# ***СИММЕТРИЯ В АРХИТЕКТУРЕ***

- Нагляднее всего видна симметрия в архитектуре.
- Особенно блистательно использовали симметрию в архитектурных сооружениях древние зодчие.
- В сознании древнегреческих архитекторов симметрия стала олицетворением закономерности, целесообразности, красоты.