ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ЛЕКЦИЯ 1
МНОЖЕСТВО, ФУНКЦИЯ, ОТОБРАЖЕНИЕ, ОПЕРАЦИЯ.
СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

МНОЖЕСТВО

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества.

Множество это объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Такое определение понятию множества дал основатель теории множеств – немецкий математик Георг Кантор (1845 – 1918). Это понятие является в математике первичным и поэтому не имеет строгого определения, удовлетворяющего современным требованиям. Множества будем обозначать, как правило, большими (прописными) буквами латинского алфавита. Объекты, которые образуют множество, называют *элементами множества* и обозначают малыми (строчными) буквами латинского алфавита. Если элемент m принадлежит множеству M, то будем использовать запись $m \in M$, в противном случае – запись $m \notin M$.

МНОЖЕСТВО

Множество, содержащее конечное число элементов, называется *конечным множеством*. Если же множество не содержит ни одного элемента, то оно называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$.

Множество может быть задано перечислением элементов (конечные множества) или указанием свойств элементов. При этом для задания множеств используют фигурные скобки { }. Например, множество M цифр десятичного алфавита можно задать в виде $M = \{0, 1, ..., 9\}$ или $M = \{i \mid i$ – целое, $0 \le i \le 9\}$, где справа от наклонной черты указаны свойства элементов этого множества. Множество M чётных чисел можно записать в виде $M = \{m \mid m$ – чётное число$\}$.

МНОЖЕСТВО

Множество M' называется *подмножеством* множества M тогда и только тогда, когда любой элемент множества M' принадлежит множеству M:

$$\boxed{M' \subset M \leftrightarrow (m \in M' \to m \in M),}$$

где $\subset$ – знак включения подмножества; $\to$ – «если ..., то ...», $\leftrightarrow$ – «... если и только если ...». В частности, множества M' и M могут совпадать.

Невключение M' в M обозначается так: $M' \not\subset M$.

МНОЖЕСТВО

Очевидно, что если множество M_a – подмножество множества M_b и множество M_b – подмножество множества M_a, то оба этих множества состоят из одних и тех же элементов. Такие множества называют *равными*: $M_a = M_b$.

Для каждого множества M существует множество, элементами которого являются подмножества множества M и только они. Такое множество будем называть *семейством множества M* или *булеаном множества M* и обозначать $B(M)$, а множество M – *универсальным множеством*, *универсумом* или *пространством* и обозначать **1**.

МНОЖЕСТВО

Рассмотрим образование булеана $B(\mathbf{1})$ от универсума $\mathbf{1}$. Первым элементом в булеан $B(\mathbf{1})$ включается пустое множество $\varnothing$. Кроме него в булеан входят $C^1_{|\mathbf{1}|}$ подмножеств универсального множества $\mathbf{1}$, содержащих по одному элементу, $C^2_{|\mathbf{1}|}$ подмножеств универсума, содержащих по два элемента и т.д. Наконец, подмножество, содержащее все элементы пространства $\mathbf{1}$. Здесь и далее через $|M|$ будем обозначать количество элементов конечного множества M, называемое *мощностью множества M.*

МНОЖЕСТВО

Мощность булеана $|B(\mathbf{1})|$ от универсума $\mathbf{1}$ равна $2^{|\mathbf{1}|}$:

$$|B(\mathbf{1})| = 2^{|\mathbf{1}|}.$$

Например, булеан $B(\mathbf{1})$ от универсального множества $\mathbf{1} = \{y, x, a\}$ будет иметь вид

$$B(\mathbf{1}) = \{\varnothing, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{a, x\}, \{a, y\}, \{y, x, a\}\},$$

а его мощность

$$|B(\mathbf{1})| = 2^{|\mathbf{1}|} = 2^3 = 8.$$

МНОЖЕСТВО

Множество также часто задают графически с помощью *диаграммы Эйлера*. Например, задание множества $\{a, b, c\}$ в пространстве $\mathbf{1} = \{a, b, c, d, e\}$ приведено на рис. 1, где замкнутая линия, называемая *кругом Эйлера,* соответствует рассматриваемому множеству и ограничивает его элементы. При этом рамка, в верхнем правом углу которой стоит **1**, ограничивает элементы пространства. Одним из важных понятий теории множеств является понятие декартова произведения множеств.

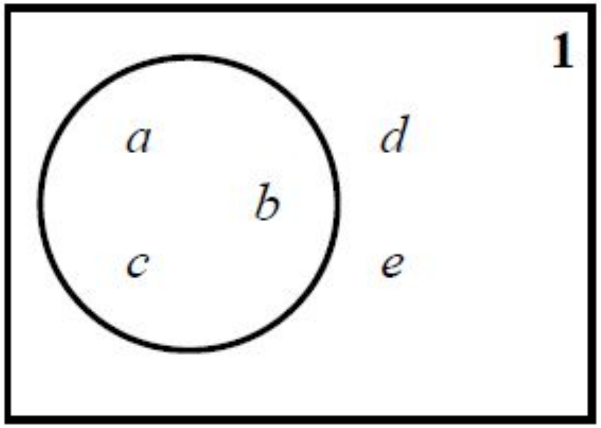


Рис. 1

МНОЖЕСТВО

Декартовым произведением $M_a \times M_b$ *множеств* M_a и M_b называется множество M вида

$$\boxed{M = \{(m_i, m_j) \,/\, m_i \in M_a, m_j \in M_b\}.}$$

Здесь и далее круглыми скобками ( ) обозначается *последовательность,* т.е. множество, в котором зафиксирован порядок элементов.

ФУНКЦИЯ

Подмножество $F \subset M_x \times M_y$ называется *функцией*, если для каждого элемента $x \in M_x$ найдётся не более одного элемента $y \in M_y$ вида $(x, y) \in F$;

при этом, если для каждого элемента x имеется точно один элемент y вида $(x, y) \in F$, то функция называется *всюду (полностью) определённой*, в противном случае – *частично определённой (недоопределённой)*. Множество M_x является *областью определения функции* F, множество M_y – *областью значений функции* F.

ФУНКЦИЯ

Часто вместо записи $(x, y) \in F$ используют запись $y = F(x)$; при этом элемент x называют *аргументом* или *переменной*, а y – *значением функции* F.

Функция $y = F(x)$ называется *сюръективной*, если для каждого элемента $y \in M_y$ найдётся элемент $x \in M_x$ вида $(x, y) \in F$.

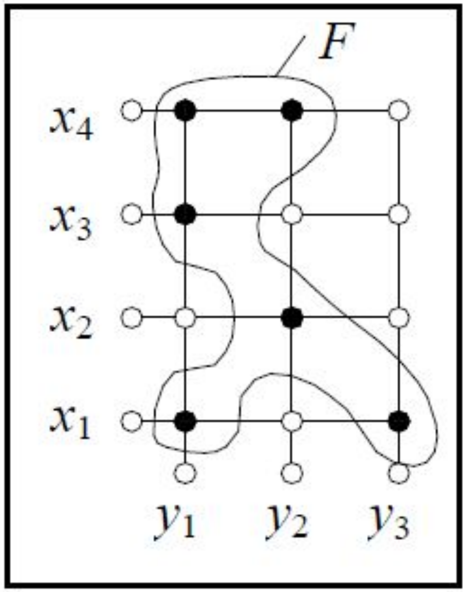
Полностью определённая функция $y = F(x)$ называется также *отображением* (из) M_x в M_y, а в случае, если она сюръективна, – отображением (из) M_x на M_y.

Имея дело с отображениями вместо $y = F(x)$ часто пишут $y = x^F$, а об элементах области значений и области определения функции говорят, как об образах и прообразах соответственно. Так, элемент $y \in M_y$ называют *образом* элемента x при отображении F, а подмножество $\{x / x \in M_x\}$, для каждого из элементов которого существуют элементы $(x, y) \in F$, – *прообразом* элемента y.

ФУНКЦИЯ

Декартову произведению двух множеств можно сопоставить прямоугольную решётку, узлы которой взаимно однозначно отвечают элементам декартова произведения, а подмножество декартова произведения на решётке отметить штриховкой соответствующих узлов.

На рисунке 2, *а* изображено подмножество декартового произведения множеств $M_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $M_y = \{y_1, y_2, y_3\}$, не являющееся функцией;

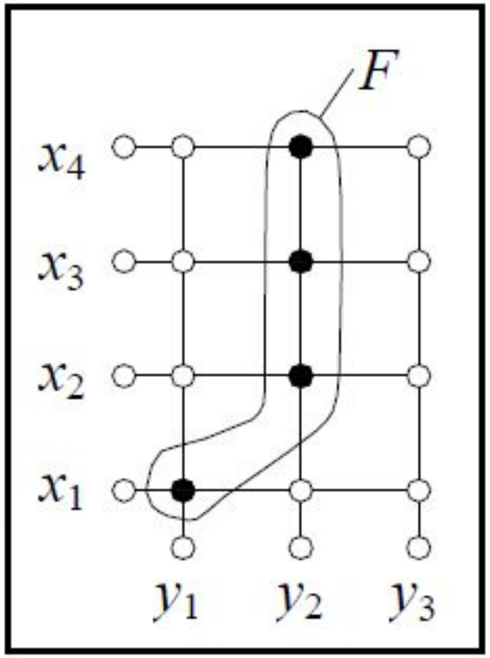


а)

Рис. 2

ФУНКЦИЯ

на рис. 2, *б* – являющееся полностью определённой функцией и отображением (из) M_x в M_y;



б)

Рис. 2

ФУНКЦИЯ

на рис. 2, *в* – полностью определённой функцией и отображением (из) M_x на M_y;

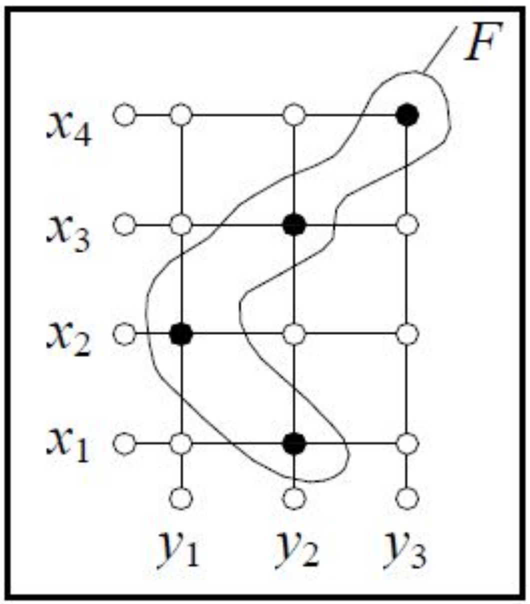


Рис. 2 *в*)

ФУНКЦИЯ

на рис. 2, *г* – частично определённой функцией.

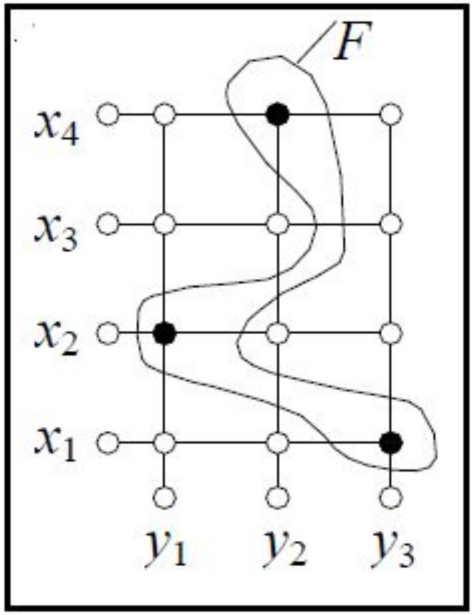


Рис. 2 *г*)

ФУНКЦИЯ

Количество аргументов функции определяет *местность функции*. Выше были рассмотрены одноместные функции.

ОПЕРАЦИЯ

Частным случаем одноместной функции является одноместная операция. Под *одноместной операцией* O_1 в множестве M понимается одноместная функция $y = F(x)$, область определения и область значений которой совпадают: $M_x = M_y = M$.

Аналогично понятию декартова произведения двух множеств определим декартово произведение n множеств.

Декартовым произведением $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \prod_{i=1}^{n} M_i$ *множеств* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется множество

$$M = \{(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n}) / m_{i_1} \in M_1, m_{i_2} \in M_2, \ldots, m_{i_n} \in M_n\}.$$

Элементами декартова произведения $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ являются всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из n элементов, причём первый элемент принадлежит множеству M_1, второй – множеству M_2, ..., n-й элемент – множеству M_n.

ОПЕРАЦИЯ

Если множество M_x в определении функции $y = F(x)$ является декартовым произведением n множеств M_{x_1}, M_{x_2}, ..., M_{x_n}, то получаем определение *n-местной функции*

$$y = F(x_1, x_2, ..., x_n).$$

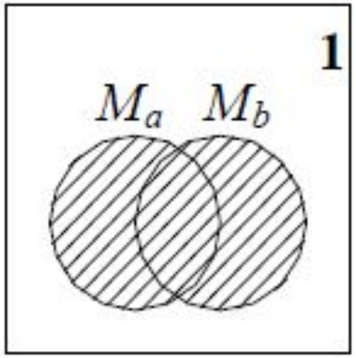
Частным случаем n-местной функции $y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ является n-местная операция. Под *n-местной операцией* O_n в множестве M понимается n-местная функция $y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$, области определения аргументов и область значений которой совпадают: $M_{x_1} = M_{x_2} = ... = M_{x_n} = M_y = M$. Таким образом, n-местная операция над n элементами множества M определяет некоторый элемент этого же множества.

ОПЕРАЦИЯ

Рассмотрим пространство **1** и определим в множестве $B(\mathbf{1})$ четыре операции над множествами: объединение, пересечение, разность и дополнение.

Объединением $M_a \cup M_b$ двух множеств M_a и M_b является множество M, состоящее из элементов множества M_a и из элементов множества M_b:

$$\boxed{M = M_a \cup M_b = \{m_i \,/\, m_i \in M_a \text{ или } m_i \in M_b\}.}$$



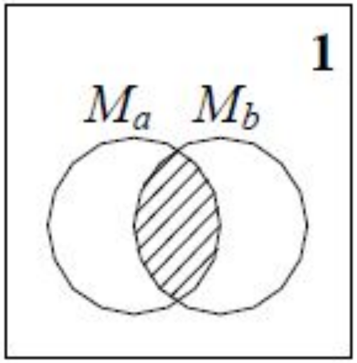
а) $M_a \cup M_b$

Рис. 3

ОПЕРАЦИЯ

Пересечением $M_a \cap M_b$ двух множеств M_a и M_b является множество M, состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству M_a, так и множеству M_b:

$$\boxed{M = M_a \cap M_b = \{m_i \,/\, m_i \in M_a \text{ и } m_i \in M_b\}.}$$



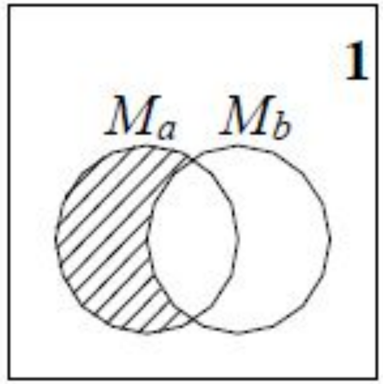
б) $M_a \cap M_b$

Рис. 3

ОПЕРАЦИЯ

Разностью $M_a \setminus M_b$ множеств M_a и M_b является множество M, состоящее из элементов, принадлежащих множеству M_a и не принадлежащих множеству M_b:

$$\boxed{M = M_a \setminus M_b = \{m_i \,/\, m_i \in M_a \text{ и } m_i \notin M_b\}.}$$



в) $M_a \setminus M_b$

Рис. 3

ОПЕРАЦИЯ

Введённые операции являются двухместными. Рассмотрим операцию дополнения, являющуюся одноместной.

Дополнением $\overline{M}$ множества M является множество

$$\boxed{\overline{M} = \{m_i \,/\, m_i \notin M\}.}$$

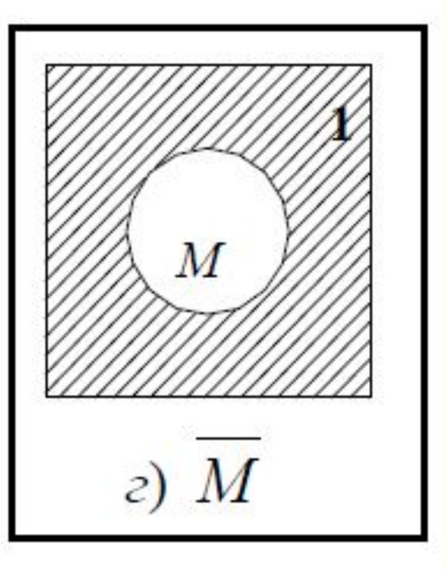


Рис. 3

ОПЕРАЦИЯ

Используя эти операции, можно выражать одни множества через другие, при этом сначала выполняется одноместная операция дополнения, затем пересечения и в последнюю очередь операция объединения (разности). Для изменения этого порядка в выражениях используют скобки.

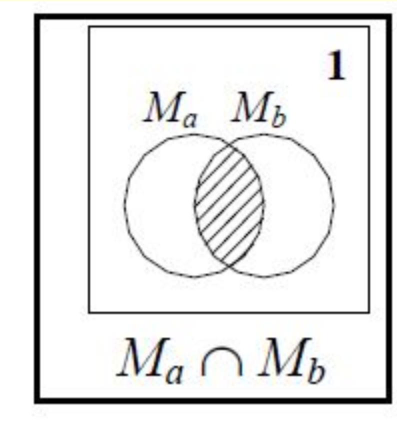
ОПЕРАЦИЯ

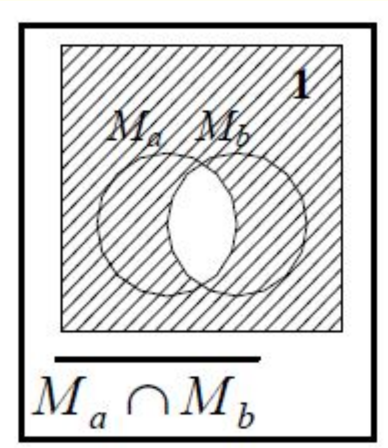
Рассмотрим дополнение множества, являющегося пересечением множеств M_a и M_b. Оно равно объединению дополнений множеств M_a и M_b:

$$\boxed{\overline{M_a \cap M_b} = \overline{M_a} \cup \overline{M_b}.}$$

В этом можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера, представленных на рис. 4.

ОПЕРАЦИЯ





$$\overline{M_a \cap M_b} = \overline{M_a} \cup \overline{M_b}.$$

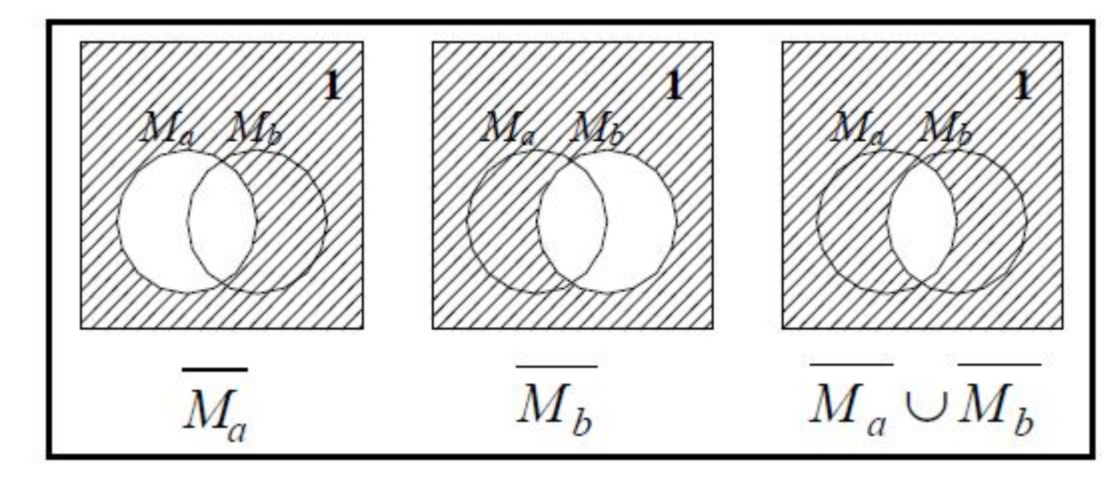


Рис. 4

СПОСОБ ЗАДАНИЯ

Таким образом, множество можно задать выражением, в которое входят идентификаторы (указатели) множеств, операции и, может быть, скобки. Такой способ задания множества называется *аналитическим*.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Представить перечислением элементов булеан $B(\mathbf{1})$, образованный от универсума $\mathbf{1}$, равного:

а) $\{a\}$; б) $\{b, c, d\}$; в) $\{1, 2\}$; г) $\{2, 3, 4\}$.

2. Изобразить диаграмму Эйлера, задающую множества A, B и C ($A \cap B \cap C \neq \varnothing$), и обозначить на ней штриховкой множество:

а) $B \setminus (\overline{A \cup C})$; б) $C \cup (\overline{A} \cap B)$; в) $\overline{A} \setminus (B \cap \overline{C})$; г) $A \cup (C \setminus \overline{B})$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

3. Известно, что из 100 студентов увлекаются:

а) спортом – 19; музыкой – 21; живописью – 23; спортом и музыкой – 7; музыкой и живописью – 9; спортом и живописью – 8; спортом, музыкой и живописью – 3;

б) спортом – 25; музыкой – 38; живописью – 12; спортом и музыкой – 15; музыкой и живописью – 3;

в) спортом – 23; музыкой – 26; живописью – 31; спортом и музыкой – 10; музыкой и живописью – 13; спортом и живописью – 12; спортом, музыкой и живописью – 4;

г) спортом – 17; музыкой – 25; живописью – 32; спортом и живописью – 2; музыкой и живописью – 5.

Изобразить соответствующую диаграмму Эйлера и определить, сколько студентов увлекается только спортом, увлекается только музыкой, ничем не увлекается.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

4. Представить перечислением элементов декартово произведение $A \times B$, если:

а) $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$;

б) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$;

в) $A = \{b, c\}$, $B = \{2, 3\}$;

г) $A = \{3, 4\}$, $B = \{b, c, e\}$.

5. Представить перечислением элементов декартово произведение $A \times B \times C$, если:

а) $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$;

б) $A = \{\text{т}, \text{д}\}$, $B = \{\text{о}\}$, $C = \{?, !\}$;

в) $A = \{3, 4\}$, $B = \{d, e\}$, $C = \{ * \}$;

г) $A = \{\text{р}, \text{т}\}$, $B = \{\text{а}, \text{о}\}$, $C = \{\text{к}, \text{м}\}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

6. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $X \times Y$, частично определённую одноместную функцию $F_1^{\text{ч}}$ и полностью определённую одноместную функцию $F_1^{\text{п}}$ с областью определения X и областью значений Y:

а) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$; в) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$;

б) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$; г) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

7. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения множеств $X \times Y$ и Z, частично определённую двухместную функцию $F_2^{\text{ч}}$ и полностью определённую двухместную функцию $F_2^{\text{п}}$ с областью определения $X \times Y$ и областью значений Z:

а) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$;

б) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$;

в) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$;

г) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

8. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $X \times Y$, отображение R_1^1 (из) X в Y и отображение R_1^2 (из) X на Y. Определить образы элементов множества X и прообразы элементов множества Y при каждом из заданных отображений R_1^1 и R_1^2.

а) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$;
б) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$;
в) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$;
г) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

9. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $M \times M$, частично определённую одноместную операцию $O_1^{\text{ч}}$ и полностью определённую одноместную операцию $O_1^{\text{п}}$ в множестве M:

а) $M = \{a, b\}$;
б) $M = \{a, b, c\}$;
в) $M = \{1, 2, 3, 4\}$;
г) $M = \{2, 3, 4\}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

10. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения множеств $M \times M$ и M, частично определённую двухместную операцию $O_2^{ч}$ и полностью определённую двухместную операцию $O_2^{п}$ в множестве M:

а) $M = \{a, b\}$;

б) $M = \{1, 2, 3\}$;

в) $M = \{0, 1\}$;

г) $M = \{a, b, c\}$.