# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

## ЛЕКЦИЯ 1
## МНОЖЕСТВО, ФУНКЦИЯ, ОТОБРАЖЕНИЕ, ОПЕРАЦИЯ.
## СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

# МНОЖЕСТВО

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества.

*Множество* это объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Такое определение понятию множества дал основатель теории множеств − немецкий математик Георг Кантор (1845 – 1918). Это понятие является в математике первичным и поэтому не имеет строгого определения, удовлетворяющего современным требованиям. Множества будем обозначать, как правило, большими (прописными) буквами латинского алфавита. Объекты, которые образуют множество, называют *элементами множества* и обозначают малыми (строчными) буквами латинского алфавита. Если элемент $m$ принадлежит множеству $M$, то будем использовать запись $m \in M$, в противном случае – запись $m \notin M$.

# МНОЖЕСТВО

Множество, содержащее конечное число элементов, называется *конечным множеством*. Если же множество не содержит ни одного элемента, то оно называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$.

Множество может быть задано перечислением элементов (конечные множества) или указанием свойств элементов. При этом для задания множеств используют фигурные скобки { }. Например, множество $M$ цифр десятичного алфавита можно задать в виде $M = \{0, 1, ..., 9\}$ или $M = \{i \,/\, i$ – целое, $0 \le i \le 9\}$, где справа от наклонной черты указаны свойства элементов этого множества. Множество $M$ чётных чисел можно записать в виде $M = \{m \,/\, m$ – чётное число$\}$.

# МНОЖЕСТВО

Множество $M'$ называется *подмножеством* множества $M$ тогда и только тогда, когда любой элемент множества $M'$ принадлежит множеству $M$:

$$\boxed{M' \subset M \leftrightarrow (m \in M' \to m \in M),}$$

где $\subset$ – знак включения подмножества; $\to$ – «если ..., то ...», $\leftrightarrow$ – «... если и только если ...». В частности, множества $M'$ и $M$ могут совпадать.

Невключение $M'$ в $M$ обозначается так: $M' \not\subset M$.

# МНОЖЕСТВО

Очевидно, что если множество $M_a$ – подмножество множества $M_b$ и множество $M_b$ – подмножество множества $M_a$, то оба этих множества состоят из одних и тех же элементов. Такие множества называют *равными*: $M_a = M_b$.

Для каждого множества $M$ существует множество, элементами которого являются подмножества множества $M$ и только они. Такое множество будем называть *семейством множества* $M$ или *булеаном множества* $M$ и обозначать $B(M)$, а множество $M$ – *универсальным множеством*, *универсумом* или *пространством* и обозначать **1**.

# МНОЖЕСТВО

Рассмотрим образование булеана $B(\mathbf{1})$ от универсума $\mathbf{1}$. Первым элементом в булеан $B(\mathbf{1})$ включается пустое множество $\varnothing$. Кроме него в булеан входят $C^1_{|\mathbf{1}|}$ подмножеств универсального множества $\mathbf{1}$, содержащих по одному элементу, $C^2_{|\mathbf{1}|}$ подмножеств универсума, содержащих по два элемента и т.д. Наконец, подмножество, содержащее все элементы пространства $\mathbf{1}$. Здесь и далее через $|M|$ будем обозначать количество элементов конечного множества $M$, называемое *мощностью множества $M$.*

# МНОЖЕСТВО

Мощность булеана $|B(\mathbf{1})|$ от универсума $\mathbf{1}$ равна $2^{|\mathbf{1}|}$:

$$|B(\mathbf{1})| = 2^{|\mathbf{1}|}.$$

Например, булеан $B(\mathbf{1})$ от универсального множества $\mathbf{1} = \{y, x, a\}$ будет иметь вид

$$B(\mathbf{1}) = \{\varnothing, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{a, x\}, \{a, y\}, \{y, x, a\}\},$$

а его мощность

$$|B(\mathbf{1})| = 2^{|\mathbf{1}|} = 2^3 = 8.$$

# МНОЖЕСТВО

Множество также часто задают графически с помощью *диаграммы Эйлера*. Например, задание множества $\{a, b, c\}$ в пространстве $\mathbf{1} = \{a, b, c, d, e\}$ приведено на рис. 1, где замкнутая линия, называемая *кругом Эйлера*, соответствует рассматриваемому множеству и ограничивает его элементы. При этом рамка, в верхнем правом углу которой стоит **1**, ограничивает элементы пространства. Одним из важных понятий теории множеств является понятие декартова произведения множеств.

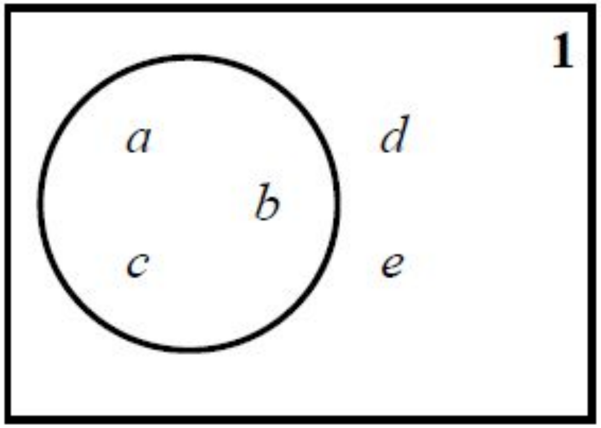



**Рис. 1**

# МНОЖЕСТВО

*Декартовым произведением $M_a \times M_b$ множеств $M_a$* и $M_b$ называется множество $M$ вида

$$\boxed{M = \{(m_i, m_j) \,/\, m_i \in M_a, m_j \in M_b\}.}$$

Здесь и далее круглыми скобками ( ) обозначается *последовательность*, т.е. множество, в котором зафиксирован порядок элементов.

# ФУНКЦИЯ

Подмножество $F \subset M_x \times M_y$ называется *функцией*, если для каждого элемента $x \in M_x$ найдётся не более одного элемента $y \in M_y$ вида $(x, y) \in F$;

при этом, если для каждого элемента $x$ имеется точно один элемент $y$ вида $(x, y) \in F$, то функция называется *всюду (полностью) определённой*, в противном случае – *частично определённой (недоопределённой)*. Множество $M_x$ является *областью определения функции* $F$, множество $M_y$ – *областью значений функции* $F$.

# ФУНКЦИЯ

Часто вместо записи $(x, y) \in F$ используют запись $y = F(x)$; при этом элемент $x$ называют *аргументом* или *переменной*, а $y$ – *значением функции* $F$.

Функция $y = F(x)$ называется *сюръективной*, если для каждого элемента $y \in M_y$ найдётся элемент $x \in M_x$ вида $(x, y) \in F$.

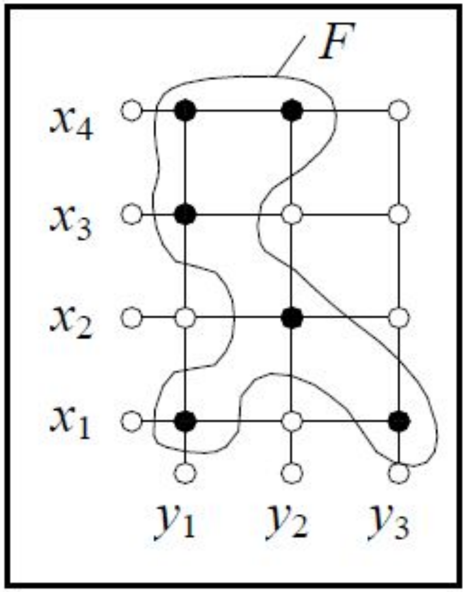
Полностью определённая функция $y = F(x)$ называется также *отображением* (из) $M_x$ в $M_y$, а в случае, если она сюръективна, – отображением (из) $M_x$ на $M_y$.

Имея дело с отображениями вместо $y = F(x)$ часто пишут $y = x^F$, а об элементах области значений и области определения функции говорят, как об образах и прообразах соответственно. Так, элемент $y \in M_y$ называют *образом* элемента $x$ при отображении $F$, а подмножество $\{x / x \in M_x\}$, для каждого из элементов которого существуют элементы $(x, y) \in F$, – *прообразом* элемента $y$.

# ФУНКЦИЯ

Декартову произведению двух множеств можно сопоставить прямоугольную решётку, узлы которой взаимно однозначно отвечают элементам декартова произведения, а подмножество декартова произведения на решётке отметить штриховкой соответствующих узлов.

На рисунке 2, *а* изображено подмножество декартового произведения множеств $M_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $M_y = \{y_1, y_2, y_3\}$, не являющееся функцией;

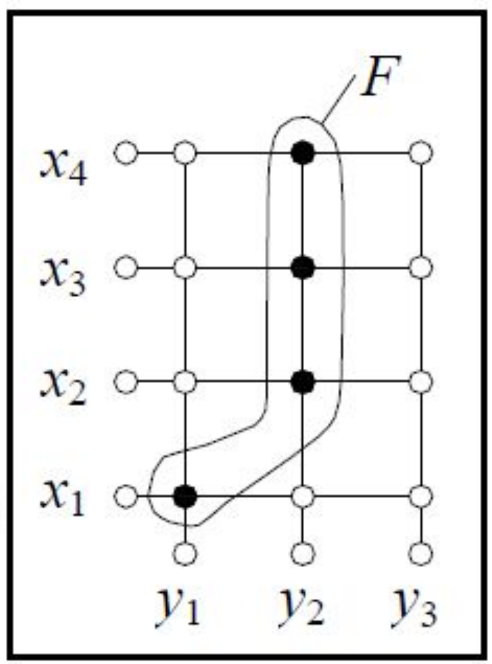



*а*)

**Рис. 2**

# ФУНКЦИЯ

на рис. 2, *б* – являющееся полностью определённой функцией и отображением (из) $M_x$ в $M_y$;




*б*)

**Рис. 2**

# ФУНКЦИЯ

на рис. 2, *в* – полностью определённой функцией и отображением (из) $M_x$ на $M_y$;

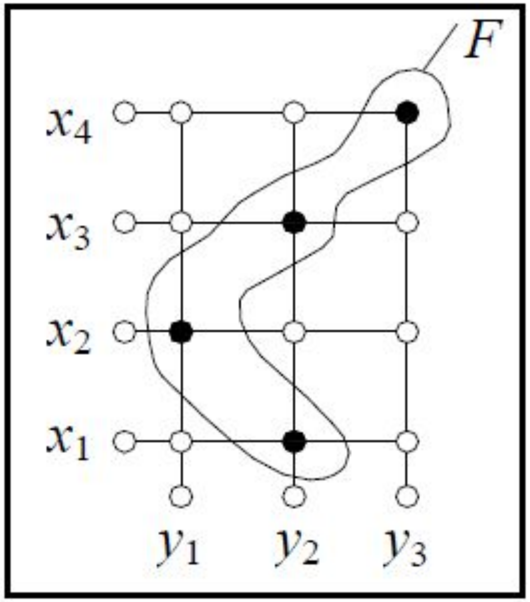



**Рис. 2** *в*)

# ФУНКЦИЯ

на рис. 2, *г* – частично определённой функцией.

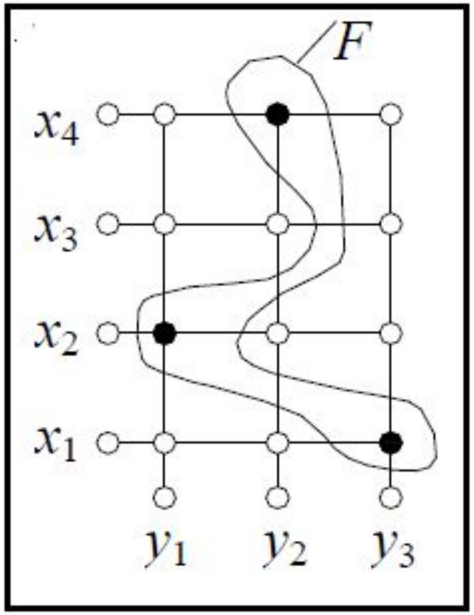



**Рис. 2** *г)*

# ФУНКЦИЯ

Количество аргументов функции определяет *местность функции*. Выше были рассмотрены одноместные функции.

# ОПЕРАЦИЯ

Частным случаем одноместной функции является одноместная операция. Под *одноместной операцией* $O_1$ в множестве $M$ понимается одноместная функция $y = F(x)$, область определения и область значений которой совпадают: $M_x = M_y = M$.

Аналогично понятию декартова произведения двух множеств определим декартово произведение $n$ множеств.

*Декартовым произведением* $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \prod_{i=1}^{n} M_i$ *множеств* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется множество

$$M = \{(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n}) / m_{i_1} \in M_1, m_{i_2} \in M_2, \ldots, m_{i_n} \in M_n\}.$$

Элементами декартова произведения $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ являются всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из $n$ элементов, причём первый элемент принадлежит множеству $M_1$, второй – множеству $M_2$, ..., $n$-й элемент – множеству $M_n$.

# ОПЕРАЦИЯ

Если множество $M_x$ в определении функции $y = F(x)$ является декартовым произведением $n$ множеств $M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_n}$, то получаем определение *$n$-местной функции*

$$y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

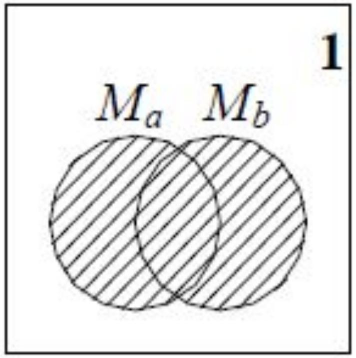
Частным случаем $n$-местной функции $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является $n$-местная операция. Под *$n$-местной операцией $O_n$* в множестве $M$ понимается $n$-местная функция $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, области определения аргументов и область значений которой совпадают: $M_{x_1} = M_{x_2} = \ldots = M_{x_n} = M_y = M$. Таким образом, $n$-местная операция над $n$ элементами множества $M$ определяет некоторый элемент этого же множества.

# ОПЕРАЦИЯ

Рассмотрим пространство **1** и определим в множестве $B(\mathbf{1})$ четыре операции над множествами: объединение, пересечение, разность и дополнение.

*Объединением* $M_a \cup M_b$ двух множеств $M_a$ и $M_b$ является множество $M$, состоящее из элементов множества $M_a$ и из элементов множества $M_b$:

$$\boxed{M = M_a \cup M_b = \{m_i \,/\, m_i \in M_a \text{ или } m_i \in M_b\}.}$$



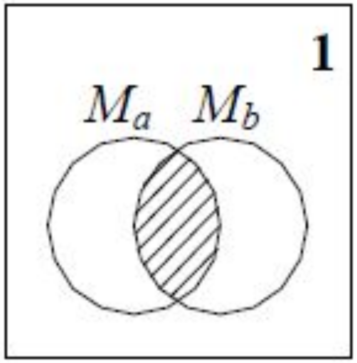

$a)\ M_a \cup M_b$

**Рис. 3**

# ОПЕРАЦИЯ

*Пересечением $M_a \cap M_b$* двух множеств $M_a$ и $M_b$ является множество $M$, состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству $M_a$, так и множеству $M_b$:

$$\boxed{M = M_a \cap M_b = \{m_i \,/\, m_i \in M_a \text{ и } m_i \in M_b\}.}$$



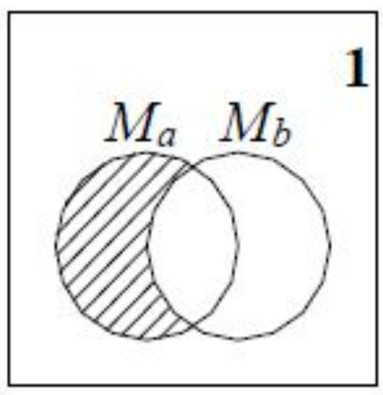

б) $M_a \cap M_b$

**Рис. 3**

# ОПЕРАЦИЯ

*Разностью* $M_a \setminus M_b$ множеств $M_a$ и $M_b$ является множество $M$, состоящее из элементов, принадлежащих множеству $M_a$ и не принадлежащих множеству $M_b$:

$$\boxed{M = M_a \setminus M_b = \{m_i \,/\, m_i \in M_a \text{ и } m_i \notin M_b\}.}$$




в) $M_a \setminus M_b$

**Рис. 3**

# ОПЕРАЦИЯ

Введённые операции являются двухместными. Рассмотрим операцию дополнения, являющуюся одноместной.

*Дополнением* $\overline{M}$ множества $M$ является множество

$$\boxed{\overline{M} = \{m_i \,/\, m_i \notin M\}.}$$

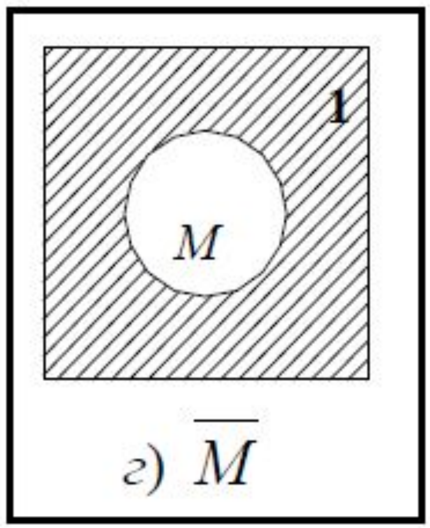



**Рис. 3**

# ОПЕРАЦИЯ

Используя эти операции, можно выражать одни множества через другие, при этом сначала выполняется одноместная операция дополнения, затем пересечения и в последнюю очередь операция объединения (разности). Для изменения этого порядка в выражениях используют скобки.

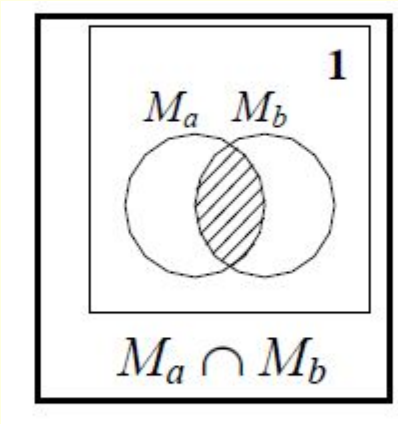
# ОПЕРАЦИЯ

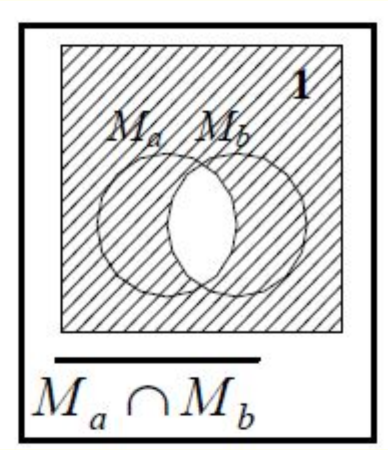
Рассмотрим дополнение множества, являющегося пересечением множеств $M_a$ и $M_b$. Оно равно объединению дополнений множеств $M_a$ и $M_b$:

$$\boxed{\overline{M_a \cap M_b} = \overline{M_a} \cup \overline{M_b}.}$$

В этом можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера, представленных на рис. 4.

# ОПЕРАЦИЯ




$$\overline{M_a \cap M_b} = \overline{M_a} \cup \overline{M_b}.$$

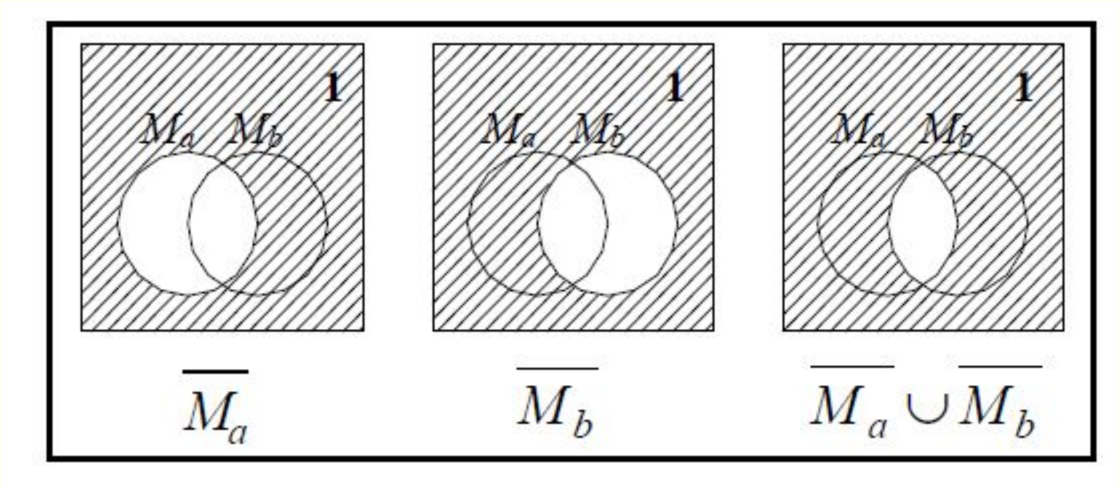



Рис. 4

# СПОСОБ ЗАДАНИЯ

Таким образом, множество можно задать выражением, в которое входят идентификаторы (указатели) множеств, операции и, может быть, скобки. Такой способ задания множества называется *аналитическим.*

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Представить перечислением элементов булеан $B(\mathbf{1})$, образованный от универсума $\mathbf{1}$, равного:

а) $\{a\}$; б) $\{b, c, d\}$; в) $\{1, 2\}$; г) $\{2, 3, 4\}$.

2. Изобразить диаграмму Эйлера, задающую множества $A$, $B$ и $C$ $(A \cap B \cap C \neq \varnothing)$, и обозначить на ней штриховкой множество:

а) $B \setminus (\overline{A \cup C})$; б) $C \cup (\overline{A} \cap B)$; в) $\overline{A} \setminus (B \cap \overline{C})$; г) $A \cup (C \setminus \overline{B})$.

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

3. Известно, что из 100 студентов увлекаются:

а) спортом – 19; музыкой – 21; живописью – 23; спортом и музыкой – 7; музыкой и живописью – 9; спортом и живописью – 8; спортом, музыкой и живописью – 3;

б) спортом – 25; музыкой – 38; живописью – 12; спортом и музыкой – 15; музыкой и живописью – 3;

в) спортом – 23; музыкой – 26; живописью – 31; спортом и музыкой – 10; музыкой и живописью – 13; спортом и живописью – 12; спортом, музыкой и живописью – 4;

г) спортом – 17; музыкой – 25; живописью – 32; спортом и живописью – 2; музыкой и живописью – 5.

Изобразить соответствующую диаграмму Эйлера и определить, сколько студентов увлекается только спортом, увлекается только музыкой, ничем не увлекается.

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

4. Представить перечислением элементов декартово произведение $A \times B$, если:

а) $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$;
в) $A = \{b, c\}$, $B = \{2, 3\}$;
б) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$;
г) $A = \{3, 4\}$, $B = \{b, c, e\}$.

5. Представить перечислением элементов декартово произведение $A \times B \times C$, если:

а) $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$;
б) $A = \{\text{т}, \text{д}\}$, $B = \{\text{о}\}$, $C = \{?, !\}$;
в) $A = \{3, 4\}$, $B = \{d, e\}$, $C = \{ * \}$;
г) $A = \{\text{р}, \text{т}\}$, $B = \{\text{а}, \text{о}\}$, $C = \{\text{к}, \text{м}\}$.

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

6. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $X \times Y$, частично определённую одноместную функцию $F_1^{\text{ч}}$ и полностью определённую одноместную функцию $F_1^{\text{п}}$ с областью определения $X$ и областью значений $Y$:

а) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$; в) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$;

б) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$; г) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

7. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения множеств $X \times Y$ и $Z$, частично определённую двухместную функцию $F_2^{\text{ч}}$ и полностью определённую двухместную функцию $F_2^{\text{п}}$ с областью определения $X \times Y$ и областью значений $Z$:

а) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$;

б) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$;

в) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$;

г) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

8. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $X \times Y$, отображение $R_1^1$ (из) $X$ в $Y$ и отображение $R_1^2$ (из) $X$ на $Y$. Определить образы элементов множества $X$ и прообразы элементов множества $Y$ при каждом из заданных отображений $R_1^1$ и $R_1^2$.

а) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$;

б) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$;

в) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$;

г) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

9. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $M \times M$, частично определённую одноместную операцию $O_1^{ч}$ и полностью определённую одноместную операцию $O_1^{п}$ в множестве $M$:

а) $M = \{a, b\}$;

б) $M = \{a, b, c\}$;

в) $M = \{1, 2, 3, 4\}$;

г) $M = \{2, 3, 4\}$.

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

10. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения множеств $M \times M$ и $M$, частично определённую двухместную операцию $O_2^{ч}$ и полностью определённую двухместную операцию $O_2^{п}$ в множестве $M$:

а) $M = \{a, b\}$;

б) $M = \{1, 2, 3\}$;

в) $M = \{0, 1\}$;

г) $M = \{a, b, c\}$.