

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ЛЕКЦИЯ 1
МНОЖЕСТВО, ФУНКЦИЯ, ОТОБРАЖЕНИЕ,
ОПЕРАЦИЯ.
СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

МНОЖЕСТВО

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества.

Множество это объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Такое определение понятия множества дал основатель теории множеств – немецкий математик Георг Кантор (1845 – 1918). Это понятие является в математике первичным и поэтому не имеет строгого определения, удовлетворяющего современным требованиям. Множества будем обозначать, как правило, большими (прописными) буквами латинского алфавита. Объекты, которые образуют множество, называют элементами множества и обозначают малыми (строчными) буквами латинского алфавита. Если элемент t принадлежит множеству M , то будем использовать запись $t \in M$, в противном случае – запись $t \notin M$.

МНОЖЕСТВО

Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным множеством. Если же множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым множеством и обозначается \emptyset .

Множество может быть задано перечислением элементов (конечные множества) или указанием свойств элементов. При этом для задания множеств используют фигурные скобки $\{ \}$. Например, множество M цифр десятичного алфавита можно задать в виде $M = \{0, 1, \dots, 9\}$ или $M = \{i / i - \text{целое}, 0 \leq i \leq 9\}$, где справа от наклонной черты указаны свойства элементов этого множества. Множество M чётных чисел можно записать в виде $M = \{m / m - \text{чётное число}\}$.

МНОЖЕСТВО

Множество M' называется подмножеством множества M тогда и только тогда, когда любой элемент множества M' принадлежит множеству M :

$$M' \subset M \leftrightarrow (t \in M' \rightarrow t \in M),$$

где \subset – знак включения подмножества; \rightarrow – «если ..., то ...», \leftrightarrow – «... если и только если ...». В частности, множества M' и M могут совпадать.

Невключение M' в M обозначается так: $M' \not\subset M$.

МНОЖЕСТВО

Очевидно, что если множество M_a – подмножество множества M_b и множество M_b – подмножество множества M_a , то оба этих множества состоят из одних и тех же элементов. Такие множества называют равными: $M_a = M_b$.

Для каждого множества M существует множество, элементами которого являются подмножества множества M и только они. Такое множество будем называть семейством множества M или булеаном множества M и обозначать $B(M)$, а множество M – универсальным множеством, универсумом или пространством и обозначать 1 .

МНОЖЕСТВО

Рассмотрим образование булеана $B(\mathbf{1})$ от универсума $\mathbf{1}$. Первым элементом в булеан $B(\mathbf{1})$ включается пустое множество \emptyset . Кроме него в булеан входят $C_{|\mathbf{1}|}^1$ подмножеств универсального множества $\mathbf{1}$, содержащих по одному элементу, $C_{|\mathbf{1}|}^2$ подмножеств универсума, содержащих по два элемента и т.д. Наконец, подмножество, содержащее все элементы пространства $\mathbf{1}$. Здесь и далее через $|M|$ будем обозначать количество элементов конечного множества M , называемое мощностью множества M .

МНОЖЕСТВО

Мощность булеана $|B(\mathbf{1})|$ от универсума $\mathbf{1}$ равна $2^{|\mathbf{1}|}$:

$$|B(\mathbf{1})| = 2^{|\mathbf{1}|}.$$

Например, булеан $B(\mathbf{1})$ от универсального множества $\mathbf{1} = \{y, x, a\}$ будет иметь вид

$$B(\mathbf{1}) = \{\emptyset, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{a, x\}, \{a, y\}, \{y, x, a\}\},$$

а его мощность

$$|B(\mathbf{1})| = 2^{|\mathbf{1}|} = 2^3 = 8.$$

МНОЖЕСТВО

Множество также часто задают графически с помощью диаграммы Эйлера. Например, задание множества $\{a, b, c\}$ в пространстве $\mathbf{1} = \{a, b, c, d, e\}$ приведено на рис. 1, где замкнутая линия, называемая кругом Эйлера, соответствует рассматриваемому множеству и ограничивает его элементы. При этом рамка, в верхнем правом углу которой стоит $\mathbf{1}$, ограничивает элементы пространства. Одним из важных понятий теории множеств является понятие декартова произведения множеств.

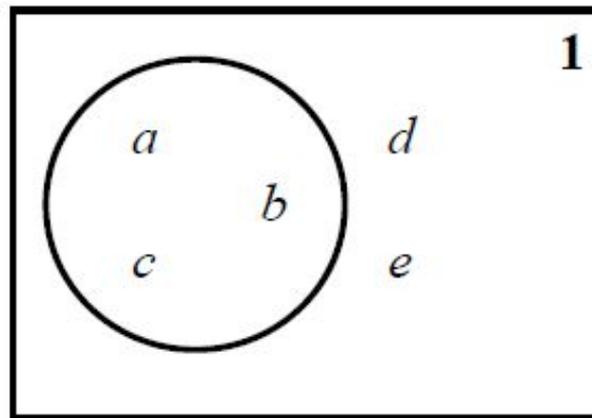


Рис. 1

МНОЖЕСТВО

Декартовым произведением $M_a \times M_b$ множеств M_a и M_b называется множество M вида

$$M = \{(m_i, m_j) / m_i \in M_a, m_j \in M_b\}.$$

Здесь и далее круглыми скобками () обозначается последовательность, т.е. множество, в котором зафиксирован порядок элементов.

ФУНКЦИЯ

Подмножество $F \subset M_x \times M_y$ называется функцией, если для каждого элемента $x \in M_x$ найдётся не более одного элемента $y \in M_y$ вида $(x, y) \in F$;

при этом, если для каждого элемента x имеется точно один элемент y вида $(x, y) \in F$, то функция называется всюду (полностью) определённой, в противном случае – частично определённой (недоопределённой). Множество M_x является областью определения функции F , множество M_y – областью значений функции F .

ФУНКЦИЯ

Часто вместо записи $(x, y) \in F$ используют запись $y = F(x)$; при этом элемент x называют аргументом или переменной, а y – значением функции F .

Функция $y = F(x)$ называется сюрьективной, если для каждого элемента $y \in M_y$ найдётся элемент $x \in M_x$ вида $(x, y) \in F$.

Полностью определённая функция $y = F(x)$ называется также отображением (из) M_x в M_y , а в случае, если она сюрьективна, – отображением (из) M_x на M_y .

Имея дело с отображениями вместо $y = F(x)$ часто пишут $y = x^F$, а об элементах области значений и области определения функции говорят, как об образах и прообразах соответственно. Так, элемент $y \in M_y$ называют образом элемента x при отображении F , а подмножество $\{x / x \in M_x\}$, для каждого из элементов которого существуют элементы $(x, y) \in F$, – прообразом элемента y .

ФУНКЦИЯ

Декартову произведению двух множеств можно сопоставить прямоугольную решётку, узлы которой взаимно однозначно отвечают элементам декартова произведения, а подмножество декартова произведения на решётке отметить штриховкой соответствующих узлов.

На рисунке 2, *a* изображено подмножество декартова произведения множеств $M_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $M_y = \{y_1, y_2, y_3\}$, не являющееся функцией;

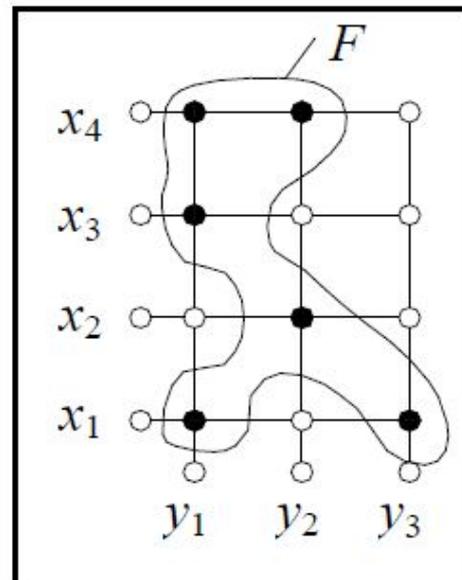


Рис. 2

a)

ФУНКЦИЯ

на рис. 2, б – являющееся полностью определённой функцией и отображением (из) M_x в M_y ;

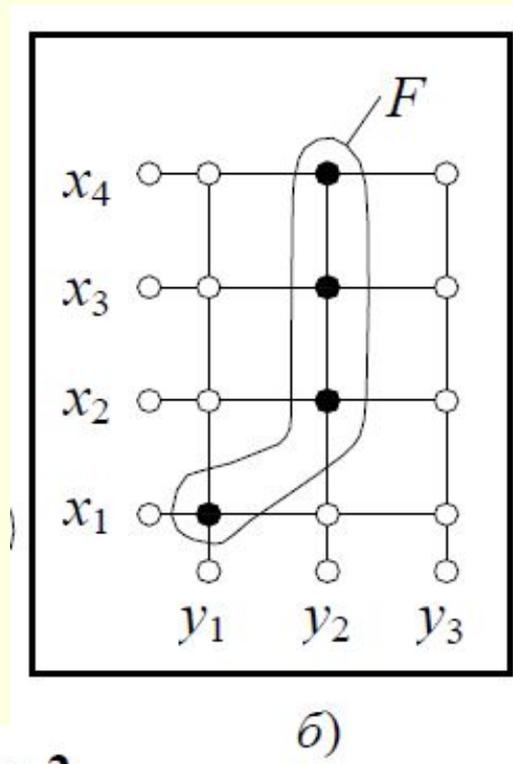


Рис. 2

ФУНКЦИЯ

на рис. 2, *в* – полностью определённой функцией и отображением (из) M_x на M_y ;

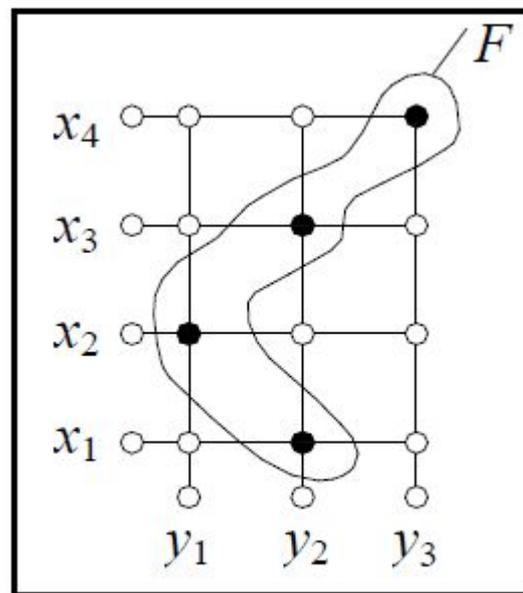


Рис. 2 *в*)

ФУНКЦИЯ

функцией.

на рис. 2, г – частично определённой

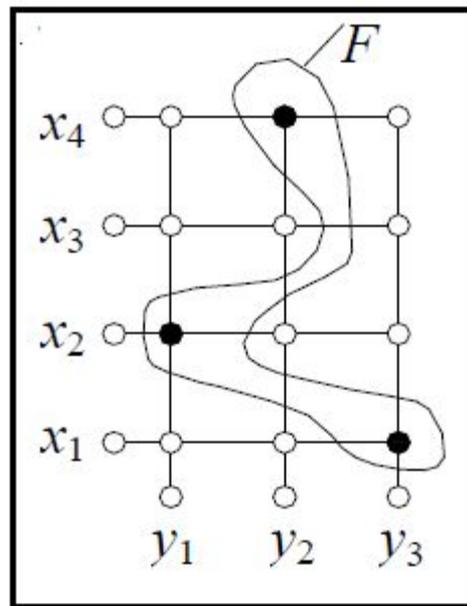


Рис. 2 г)

ФУНКЦИЯ

Количество аргументов функции определяет местность функции.
Выше были рассмотрены одноместные функции.

ОПЕРАЦИЯ

Частным случаем одноместной функции является одноместная операция. Под одноместной операцией O_1 в множестве M понимается одноместная функция $y = F(x)$, область определения и область значений которой совпадают: $M_x = M_y = M$.

Аналогично понятию декартова произведения двух множеств определим декартово произведение n множеств.

Декартовым произведением $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \prod_{i=1}^n M_i$ множеств

M_1, M_2, \dots, M_n называется множество

$$M = \{ (m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}) / m_{i_1} \in M_1, m_{i_2} \in M_2, \dots, m_{i_n} \in M_n \}.$$

Элементами декартова произведения $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ являются всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из n элементов, причём первый элемент принадлежит множеству M_1 , второй – множеству M_2 , ..., n -й элемент – множеству M_n .

ОПЕРАЦИЯ

Если множество M_x в определении функции $y = F(x)$ является декартовым произведением n множеств $M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n}$, то получаем определение n -местной функции

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Частным случаем n -местной функции $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является n -местная операция. Под n -местной операцией O_n в множестве M понимается n -местная функция $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, области определения аргументов и область значений которой совпадают: $M_{x_1} = M_{x_2} = \dots = M_{x_n} = M_y = M$. Таким образом, n -местная операция над n элементами множества M определяет некоторый элемент этого же множества.

ОПЕРАЦИЯ

Рассмотрим пространство $\mathbf{1}$ и определим в множестве $B(\mathbf{1})$ четыре операции над множествами: объединение, пересечение, разность и дополнение.

Объединением $M_a \cup M_b$ двух множеств M_a и M_b является множество M , состоящее из элементов множества M_a и из элементов множества M_b :

$$M = M_a \cup M_b = \{m_i / m_i \in M_a \text{ или } m_i \in M_b\}.$$

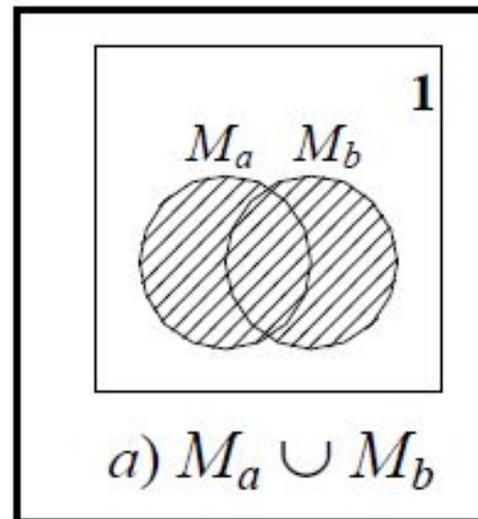


Рис. 3

ОПЕРАЦИЯ

Пересечением $M_a \cap M_b$ двух множеств M_a и M_b является множество M , состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству M_a , так и множеству M_b :

$$M = M_a \cap M_b = \{m_i / m_i \in M_a \text{ и } m_i \in M_b\}.$$

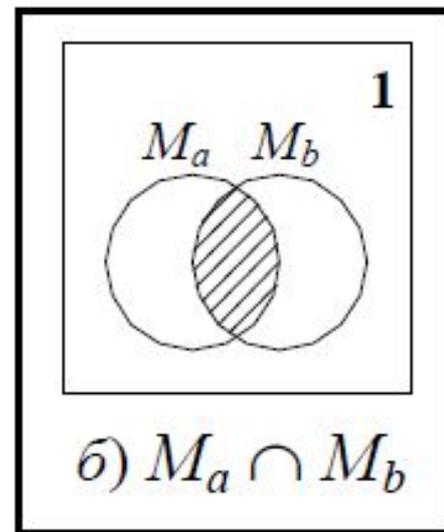


Рис. 3

ОПЕРАЦИЯ

Разностью $M_a \setminus M_b$ множеств M_a и M_b является множество M , состоящее из элементов, принадлежащих множеству M_a и не принадлежащих множеству M_b :

$$M = M_a \setminus M_b = \{m_i / m_i \in M_a \text{ и } m_i \notin M_b\}.$$

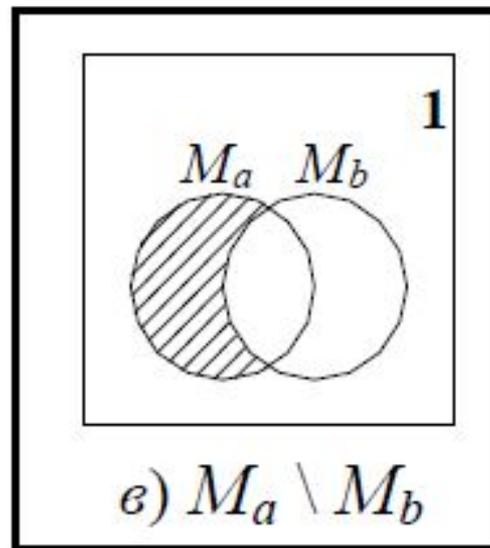


Рис. 3

ОПЕРАЦИЯ

Введённые операции являются двухместными. Рассмотрим операцию дополнения, являющуюся одноместной.

Дополнением \bar{M} множества M является множество

$$\bar{M} = \{m_i / m_i \notin M\}.$$

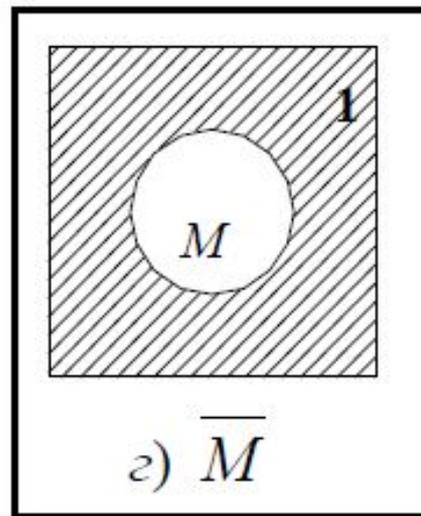


Рис. 3

ОПЕРАЦИЯ

Используя эти операции, можно выражать одни множества через другие, при этом сначала выполняется одноместная операция дополнения, затем пересечения и в последнюю очередь операция объединения (разности). Для изменения этого порядка в выражениях используют скобки.

ОПЕРАЦИЯ

Рассмотрим дополнение множества, являющегося пересечением множеств M_a и M_b . Оно равно объединению дополнений множеств M_a и M_b :

$$\overline{M_a \cap M_b} = \overline{M_a} \cup \overline{M_b}.$$

В этом можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера, представленных на рис. 4.

ОПЕРАЦИЯ

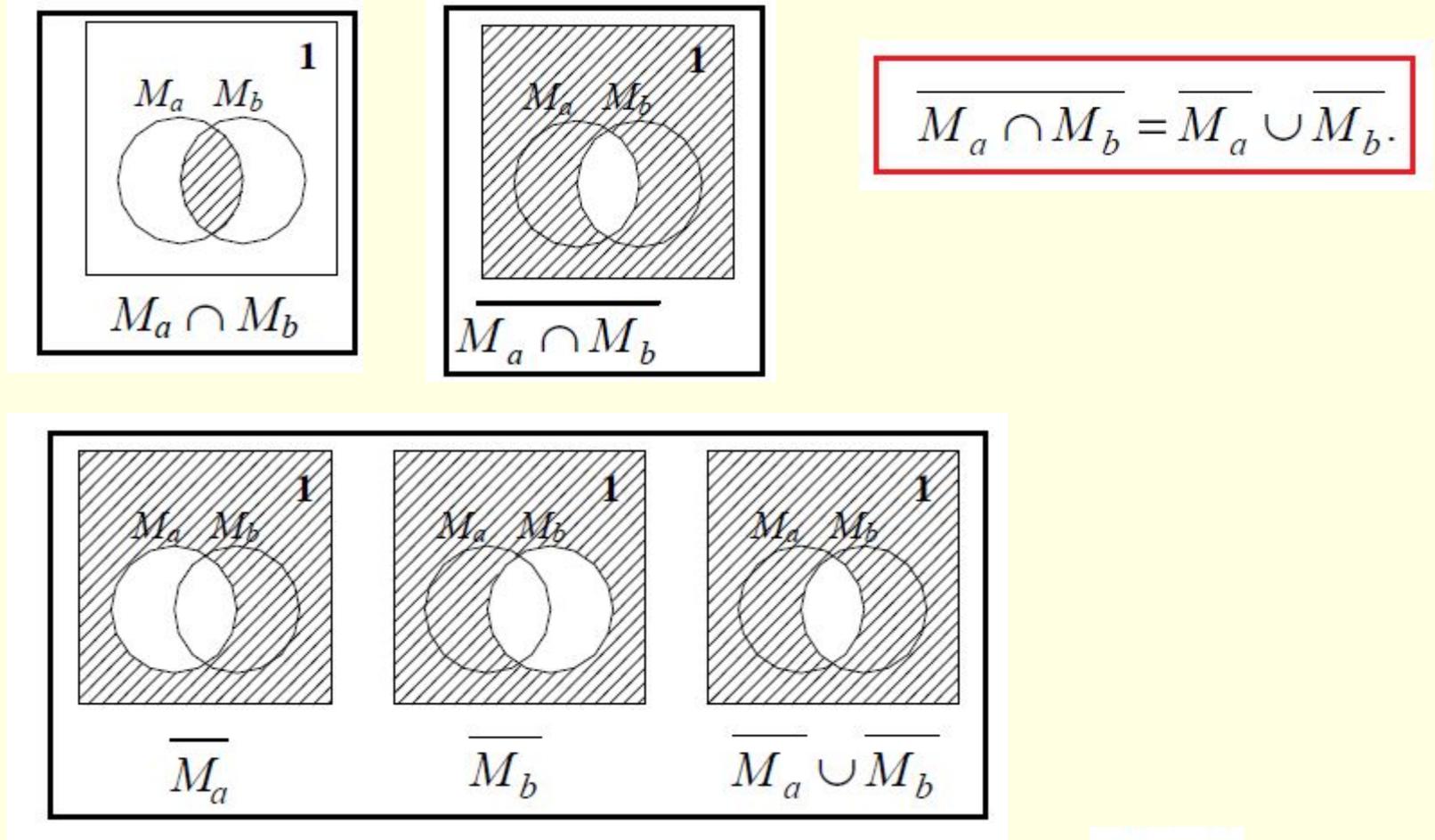


Рис. 4

СПОСОБ ЗАДАНИЯ

Таким образом, множество можно задать выражением, в которое входят идентификаторы (указатели) множеств, операции и, может быть, скобки. Такой способ задания множества называется аналитическим.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Представить перечислением элементов булеан $B(\mathbf{1})$, образованный от универсума $\mathbf{1}$, равного:

- а) $\{a\}$; б) $\{b, c, d\}$; в) $\{1, 2\}$; г) $\{2, 3, 4\}$.

2. Изобразить диаграмму Эйлера, задающую множества A , B и C ($A \cap B \cap C \neq \emptyset$), и обозначить на ней штриховкой множество:

- а) $B \setminus \overline{(A \cup C)}$; б) $C \cup (\overline{A} \cap B)$; в) $\overline{A} \setminus (B \cap \overline{C})$; г) $A \cup (C \setminus \overline{B})$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

3. Известно, что из 100 студентов увлекаются:

а) спортом – 19; музыкой – 21; живописью – 23; спортом и музыкой – 7; музыкой и живописью – 9; спортом и живописью – 8; спортом, музыкой и живописью – 3;

б) спортом – 25; музыкой – 38; живописью – 12; спортом и музыкой – 15; музыкой и живописью – 3;

в) спортом – 23; музыкой – 26; живописью – 31; спортом и музыкой – 10; музыкой и живописью – 13; спортом и живописью – 12; спортом, музыкой и живописью – 4;

г) спортом – 17; музыкой – 25; живописью – 32; спортом и живописью – 2; музыкой и живописью – 5.

Изобразить соответствующую диаграмму Эйлера и определить, сколько студентов увлекается только спортом, увлекается только музыкой, ничем не увлекается.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

4. Представить перечислением элементов декартово произведение $A \times B$, если:

а) $A = \{1, 2\}, B = \{a, b\};$

в) $A = \{b, c\}, B = \{2, 3\};$

б) $A = \{a, b, c\}, B = \{0, 1\};$

г) $A = \{3, 4\}, B = \{b, c, e\}.$

5. Представить перечислением элементов декартово произведение $A \times B \times C$, если:

а) $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}, C = \{c_1, c_2\};$

б) $A = \{т, д\}, B = \{о\}, C = \{?, !\};$

в) $A = \{3, 4\}, B = \{d, e\}, C = \{ * \};$

г) $A = \{р, т\}, B = \{а, о\}, C = \{к, м\}.$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

6. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $X \times Y$, частично определённую одноместную функцию $F_1^{\text{ч}}$ и полностью определённую одноместную функцию $F_1^{\text{п}}$ с областью определения X и областью значений Y :

- а) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$; в) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$;
б) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$; г) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

7. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения множеств $X \times Y$ и Z , частично определённую двухместную функцию $F_2^{\text{ч}}$ и полностью определённую двухместную функцию $F_2^{\text{п}}$ с областью определения $X \times Y$ и областью значений Z :

- а) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$;
- б) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$;
- в) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$;
- г) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

8. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $X \times Y$, отображение R_1^1 (из) X в Y и отображение R_1^2 (из) X на Y . Определить образы элементов множества X и прообразы элементов множества Y при каждом из заданных отображений R_1^1 и R_1^2 .

а) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$;

б) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$;

в) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$;

г) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

9. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $M \times M$, частично определённую одноместную операцию $O_1^{\text{ч}}$ и полностью определённую одноместную операцию $O_1^{\text{п}}$ в множестве M :

а) $M = \{a, b\}$;

в) $M = \{1, 2, 3, 4\}$;

б) $M = \{a, b, c\}$;

г) $M = \{2, 3, 4\}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

10. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения множеств $M \times M$ и M , частично определённую двухместную операцию $O_2^{\text{ч}}$ и полностью определённую двухместную операцию $O_2^{\text{п}}$ в множестве M :

а) $M = \{a, b\}$;

б) $M = \{1, 2, 3\}$;

в) $M = \{0, 1\}$;

г) $M = \{a, b, c\}$.