

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$$

Подогнанная модель

$$\hat{Y} = b_1 + b_2 X$$

Нулевая гипотеза

$$H_0 : \beta_2 = \beta_2^0,$$

Альтернативная гипотеза

$$H_1 : \beta_2 \neq \beta_2^0$$

t статистика

$$t = \frac{b_2 - \beta_2^0}{\text{s.e.}(b_2)}$$

Отвергается H_0
если

$$|t| > t_{\text{crit}}$$

В предыдущей последовательности, мы выполняли двухсторонние Т-тесты. Они уместны, когда нет информации об альтернативной гипотезе.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$$

Подогнанная модель

$$\hat{Y} = b_1 + b_2 X$$

Нулевая гипотеза

$$H_0 : \beta_2 = \beta_2^0,$$

Альтернативная гипотеза

$$H_1 : \beta_2 \neq \beta_2^0$$

Т статистика

$$t = \frac{b_2 - \beta_2^0}{\text{s.e.}(b_2)}$$

Отвергается H_0
если

$$|t| > t_{\text{crit}}$$

При нулевой гипотезе предполагается, что коэффициент является определенным значением. А согласно альтернативной гипотезе, коэффициентом может быть любое значение, отличное от указанного в нулевой гипотезе. Это значение может быть больше или меньше.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$$

Подогнанная модель

$$\hat{Y} = b_1 + b_2 X$$

Нулевая гипотеза

$$H_0 : \beta_2 = \beta_2^0,$$

Альтернативная гипотеза

$$H_1 : \beta_2 > \beta_2^0$$

Т статистика

$$t = \frac{b_2 - \beta_2^0}{\text{s.e.}(b_2)}$$

Отвергается H_0
если

$$|t| > t_{\text{crit}}$$

Однако иногда мы можем сказать, что если нулевая гипотеза не верна, то коэффициент не может быть меньше указанного. Мы переписываем нулевую гипотезу, как показано, и выполняем односторонний тест.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$$

Подогнанная модель

$$\hat{Y} = b_1 + b_2 X$$

Нулевая гипотеза

$$H_0 : \beta_2 = \beta_2^0,$$

Альтернативная гипотеза

$$H_1 : \beta_2 < \beta_2^0$$

Т статистика

$$t = \frac{b_2 - \beta_2^0}{\text{s.e.}(b_2)}$$

Отвергается H_0
если

$$|t| > t_{\text{crit}}$$

В других случаях мы могли бы утверждать, что, если нулевая гипотеза не верна, то коэффициент не может быть больше указанного значения. Показана модифицированная нулевая гипотеза для этого случая.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$$

Подогнанная модель

$$\hat{Y} = b_1 + b_2 X$$

Нулевая гипотеза

$$H_0 : \beta_2 = \beta_2^0,$$

Альтернативная гипотеза

$$H_1 : \beta_2 < \beta_2^0$$

Т статистика

$$t = \frac{b_2 - \beta_2^0}{\text{s.e.}(b_2)}$$

Отвергается H_0
если

$$|t| > t_{\text{crit}}$$

Теория, лежащая в основе односторонних тестов, в частности, выигрыш в компромиссе между размером (уровнем значимости) и мощностью теста, является нетривиальной, и понимание требует тщательного изучения раздела R. 13

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$$

Подогнанная модель

$$\hat{Y} = b_1 + b_2 X$$

Нулевая гипотеза

$$H_0 : \beta_2 = \beta_2^0,$$

Альтернативная гипотеза

$$H_1 : \beta_2 < \beta_2^0$$

Т статистика

$$t = \frac{b_2 - \beta_2^0}{\text{s.e.}(b_2)}$$

Отвергается H_0
если

$$|t| > t_{\text{crit}}$$

Эта последовательность предполагает хорошее понимание этого материала.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Пример: $p = \beta_1 + \beta_2 w + u$

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 1.0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 \neq 1.0$

$$\hat{p} = 1.21 + 0.82w$$

(0.05) (0.10)

$$t = \frac{b_2 - \beta_2^0}{\text{s.e.}(b_2)} = \frac{0.82 - 1.00}{0.10} = -1.80.$$

$n = 20$ degrees of freedom = 18 $t_{\text{crit},5\%} = 2.101$ (two - sided test)

Возвращаясь к модели инфляции цен / заработной платы, мы увидели, что не можем отвергнуть нулевую гипотезу $b_2 = 1$, даже на уровне значимости 5%. Это был двусторонний тест.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Пример: $p = \beta_1 + \beta_2 w + u$

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 1.0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 \neq 1.0$

$$\hat{p} = 1.21 + 0.82w$$

(0.05) (0.10)

$$t = \frac{b_2 - \beta_2^0}{\text{s.e.}(b_2)} = \frac{0.82 - 1.00}{0.10} = -1.80.$$

$n = 20$ degrees of freedom = 18 $t_{\text{crit},5\%} = 2.101$ (two - sided test)

Однако на практике повышение производительности может привести к тому, что темпы инфляции издержек и, следовательно, инфляции цен будут ниже темпов инфляции заработной платы.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Пример: $p = \beta_1 + \beta_2 w + u$

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 1.0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 \neq 1.0$

$$\hat{p} = 1.21 + 0.82w$$

(0.05) (0.10)

$$t = \frac{b_2 - \beta_2^0}{\text{s.e.}(b_2)} = \frac{0.82 - 1.00}{0.10} = -1.80.$$

$n = 20$ degrees of freedom = 18 $t_{\text{crit},5\%} = 2.101$ (two - sided test)

Конечно, повышение производительности труда не приведет к тому, что инфляция цен превысит инфляцию заработной платы, и поэтому в этом случае мы обоснованно исключаем $b_2 > 1$. Мы остаемся с $H_0: b_2 = 1$ и $H_1: b_2 < 1$.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Пример: $p = \beta_1 + \beta_2 w + u$

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 1.0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 \neq 1.0$

$$\hat{p} = 1.21 + 0.82w$$

(0.05) (0.10)

$$t = \frac{b_2 - \beta_2^0}{\text{s.e.}(b_2)} = \frac{0.82 - 1.00}{0.10} = -1.80.$$

$n = 20$ degrees of freedom = 18 $t_{\text{crit},5\%} = 1.734$ (one - sided test)

Таким образом, мы можем выполнить односторонний тест, для которого критическое значение t с 18 степенями свободы на уровне значимости 5% равно 1,73. Теперь мы можем отвергнуть нулевую гипотезу и сделать вывод, что инфляция цен значительно ниже инфляции заработной платы, на уровне значимости 5%.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Модель
$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$$

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 \neq 0$

Теперь рассмотрим особый, но очень распространенный случай $H_0: \beta_2 = 0$.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Модель $Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 \neq 0$

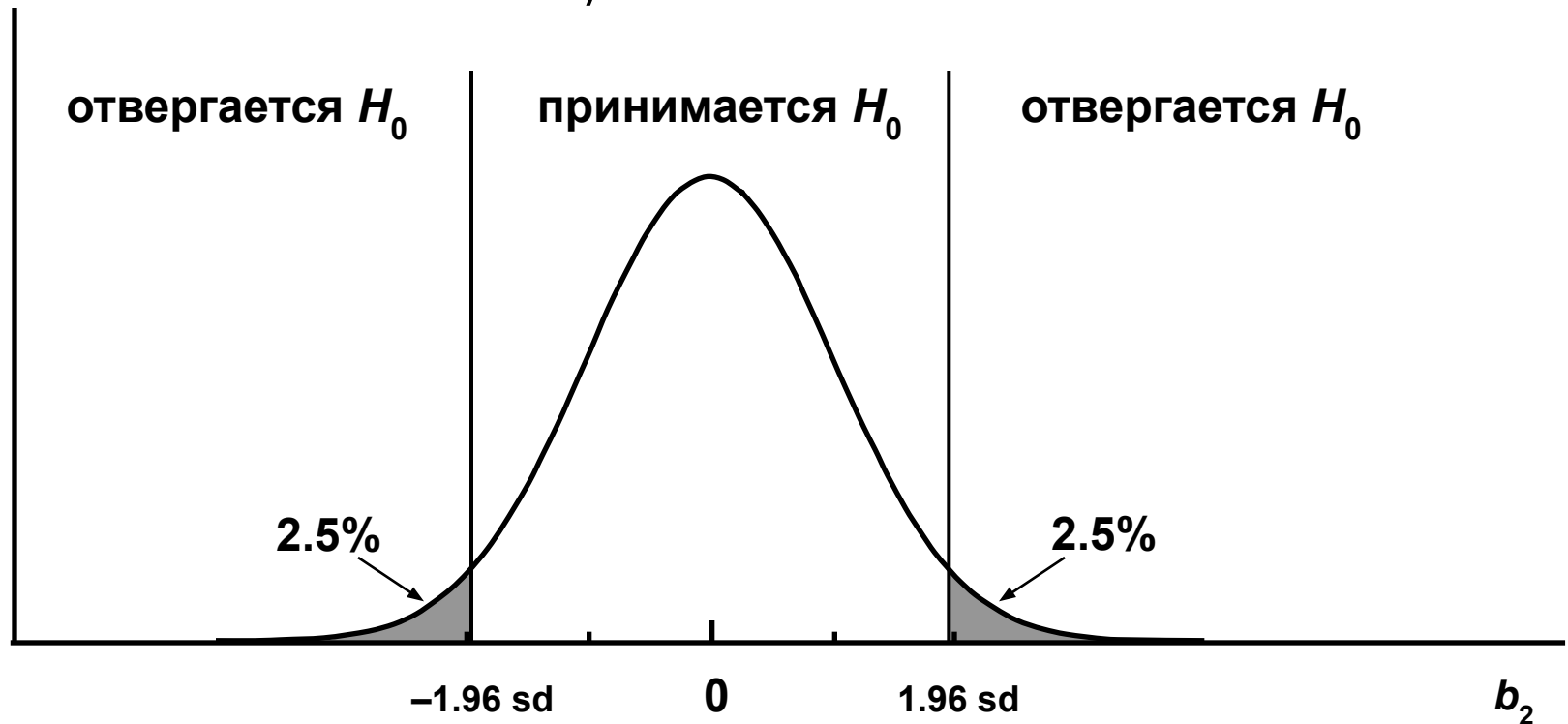
Это происходит, когда вы хотите продемонстрировать, что переменная X влияет на другую переменную Y . Устанавливается нулевая гипотеза о том, что X не влияет на Y ($\beta_2 = 0$) и пытаетесь отклонить H_0 .

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 \neq 0$

плотность вероятности
функция b_2



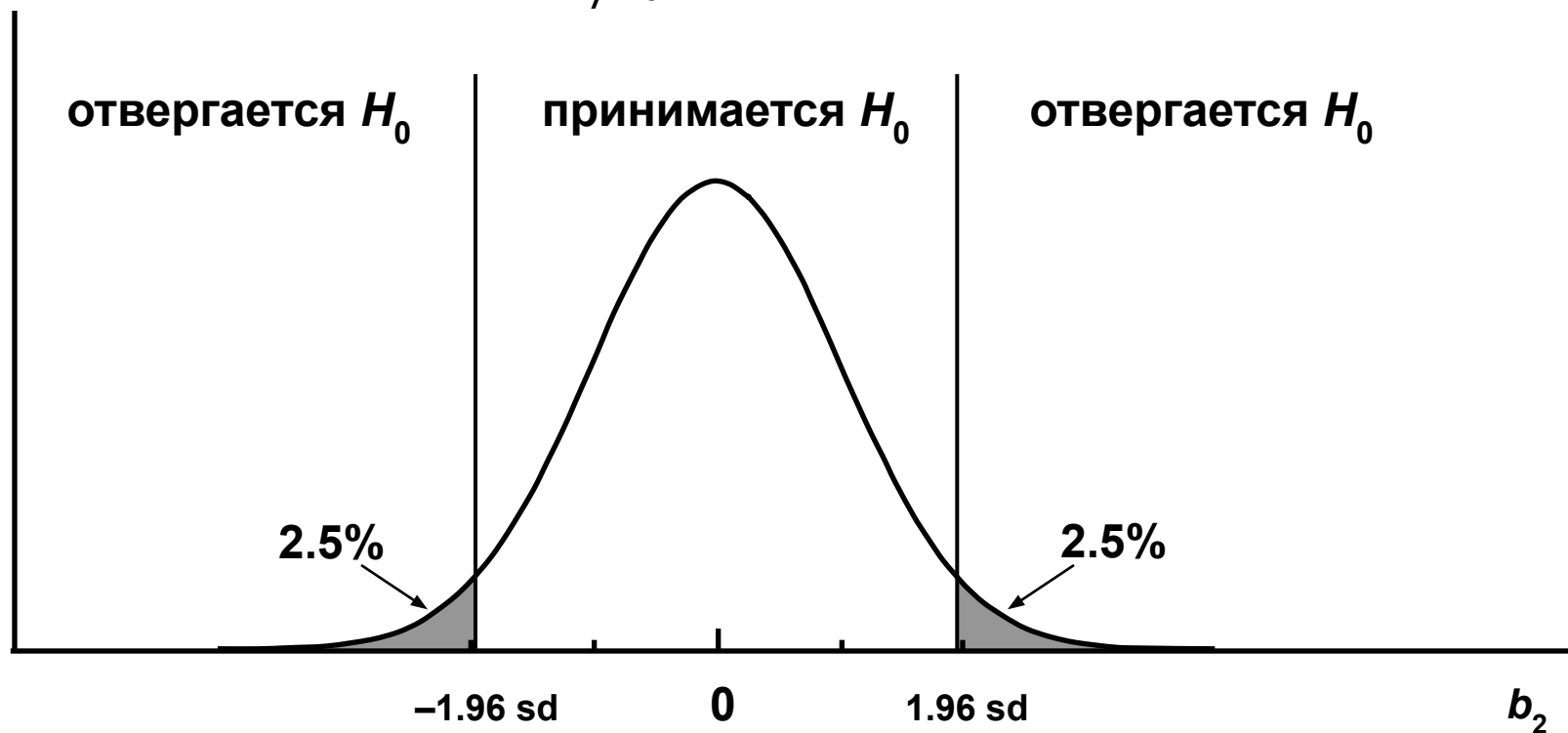
На рисунке показано распределение b_2 при условии, что $H_0: b_2 = 0$ истинно. Для простоты мы изначально предполагаем, что знаем стандартное отклонение.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 \neq 0$

плотность вероятности
функция b_2



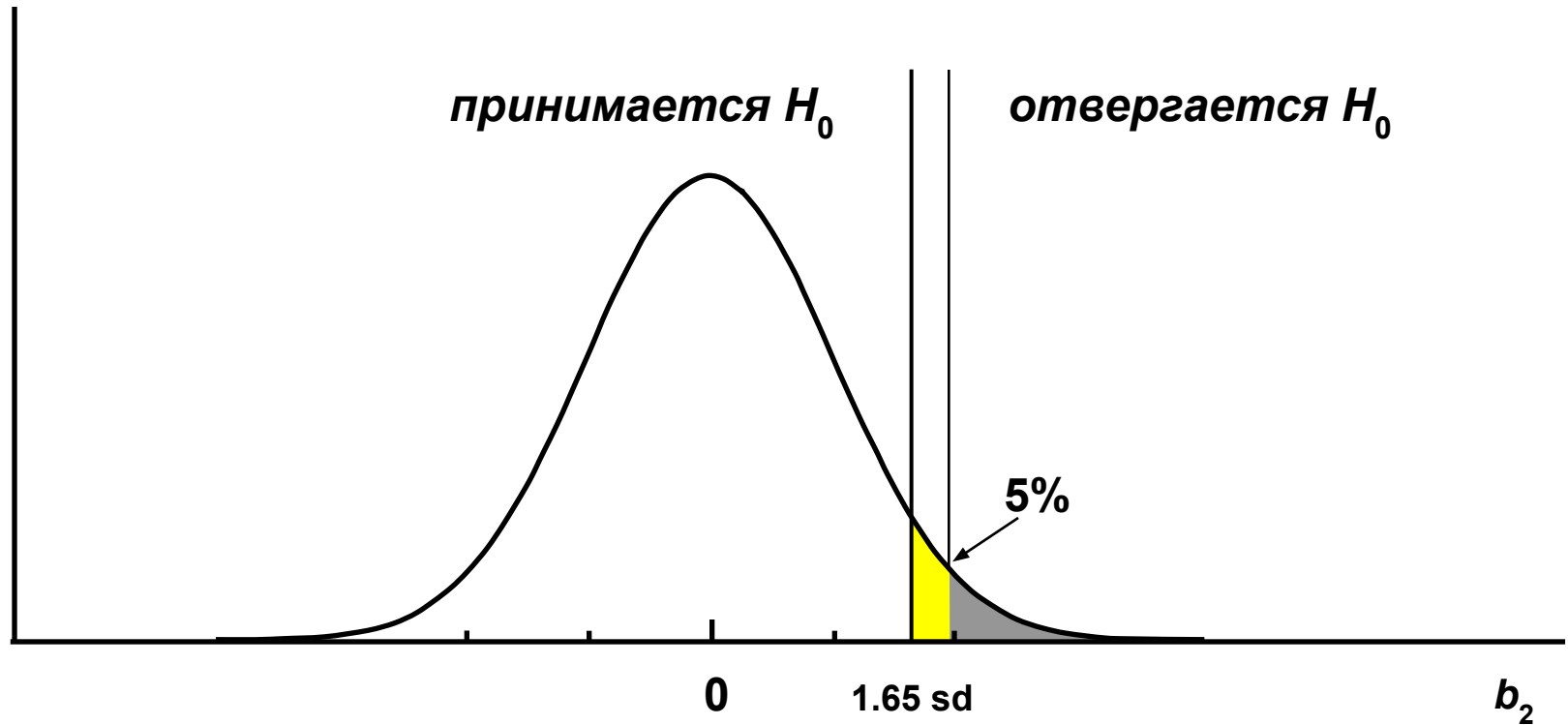
Если вы используете двусторонний тест значимости 5%, Ваша оценка должна быть 1,96 стандартных отклонений выше или ниже 0, Если вы хотите отклонить H_0 .

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 > 0$

плотность вероятности
функция b_2



Однако, если вы можете обосновать использование одностороннего теста, например, с $H_0: b_2 > 0$, ваша оценка должна быть 1,65 стандартных отклонений выше 0.

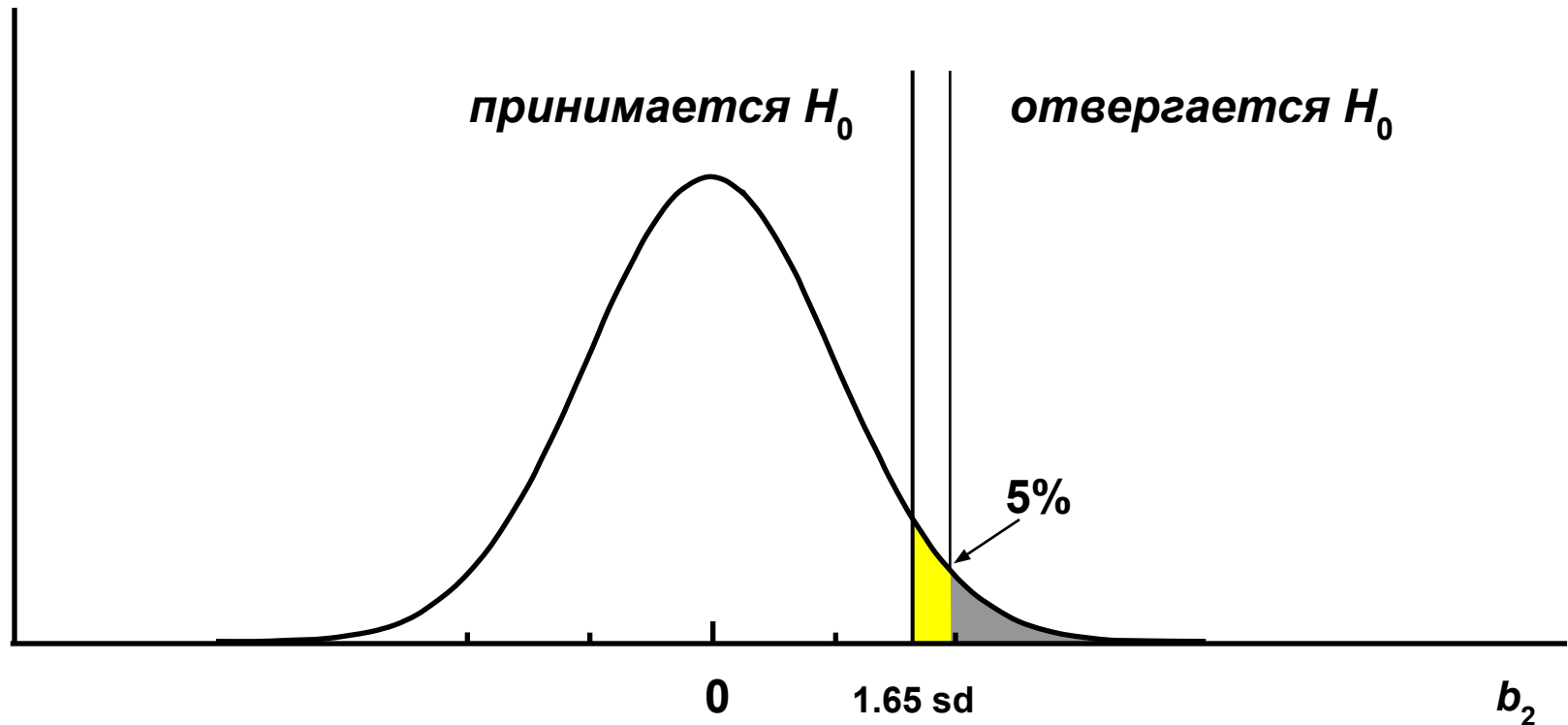
Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2$

> 0

плотность вероятности
функция b_2



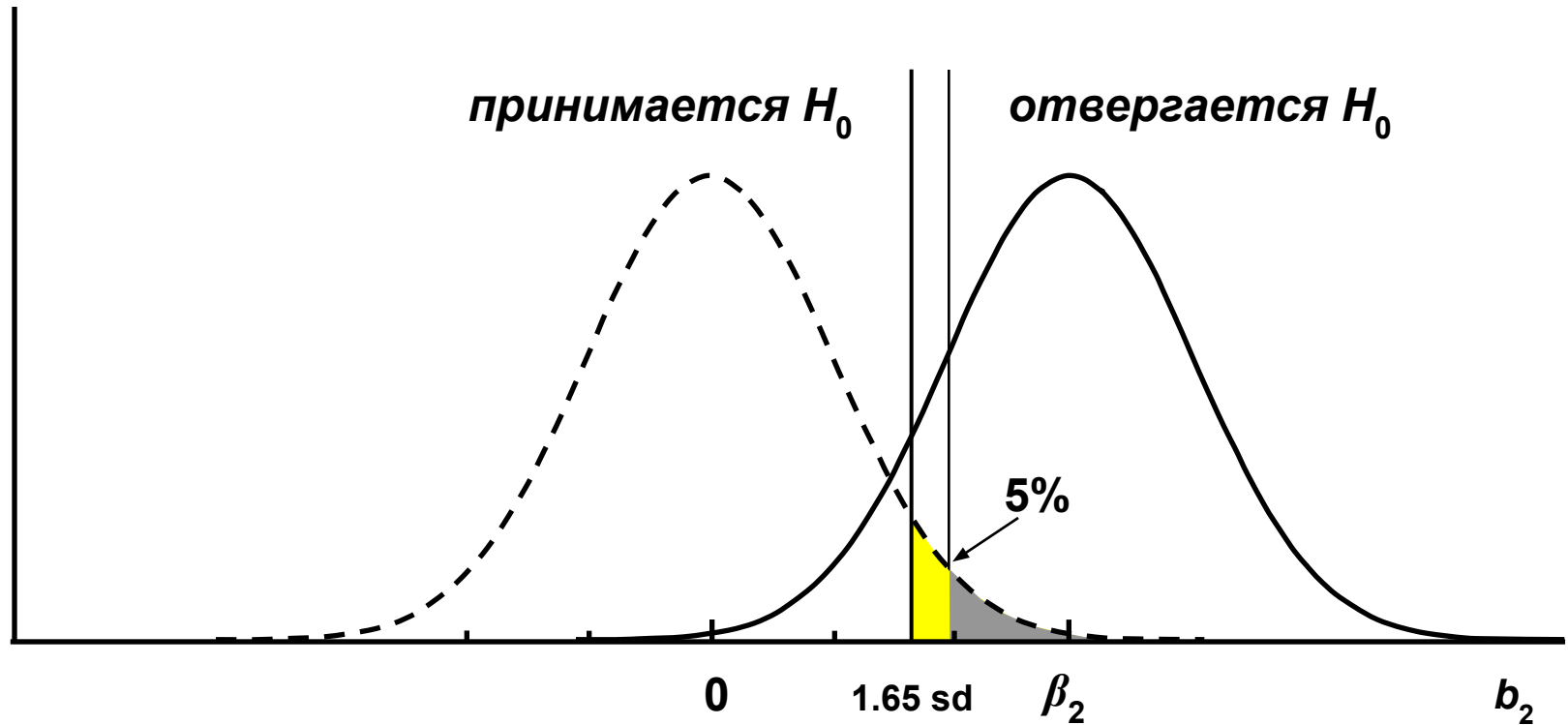
Это упрощает отклонение H_0 и тем самым демонстрирует, что Y действительно зависит от X (при условии, что ваша модель указана правильно).

ONE-SIDED t TESTS OF HYPOTHESES RELATING TO REGRESSION COEFFICIENTS

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 > 0$

плотность вероятности
функция b_2



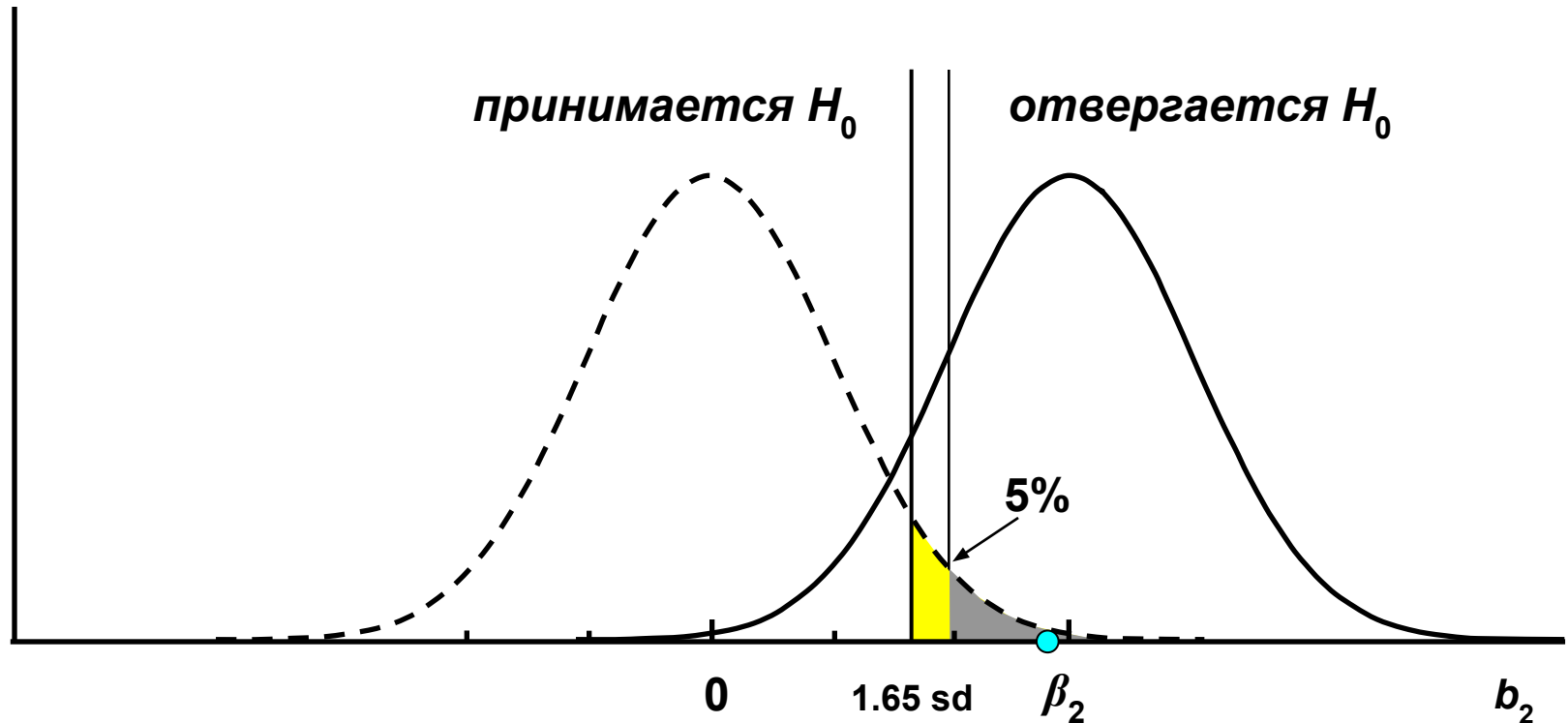
Предположим, что Y действительно определяется X и что истинный (неизвестный) коэффициент равен b_2 , как показано на рисунке.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 > 0$

плотность вероятности
функция b_2



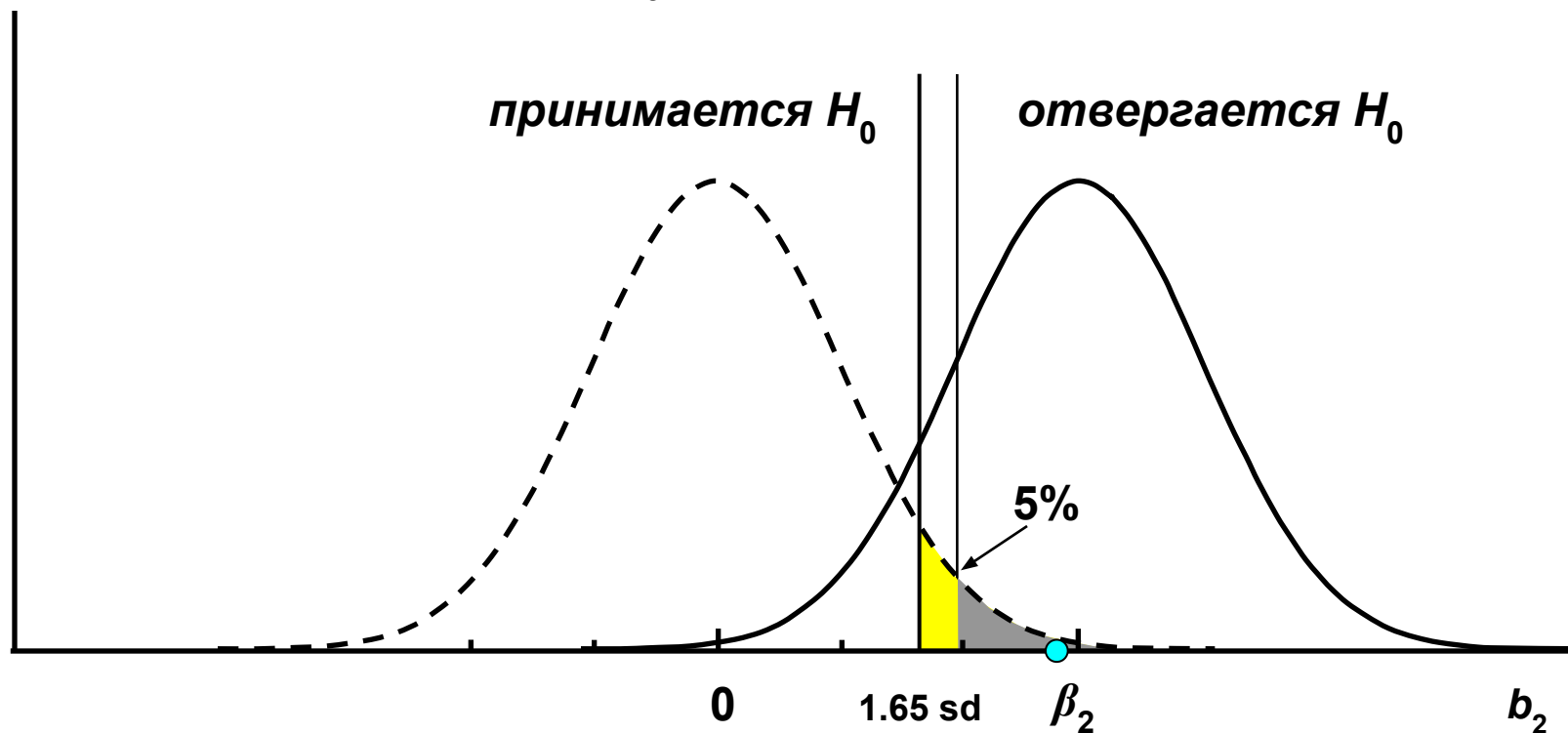
Предположим, что мы имеем выборку наблюдений и вычислить расчетный коэффициент наклона, B_2 . Если это так, как показано на графике, что мы заключаем, когда тестируем H_0 ?

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 > 0$

плотность вероятности
функция b_2



Ответ заключается в том, что b_2 лежит в области отклонения. Не имеет значения, проводим ли мы двусторонний или односторонний тест. Мы пришли к правильному выводу.

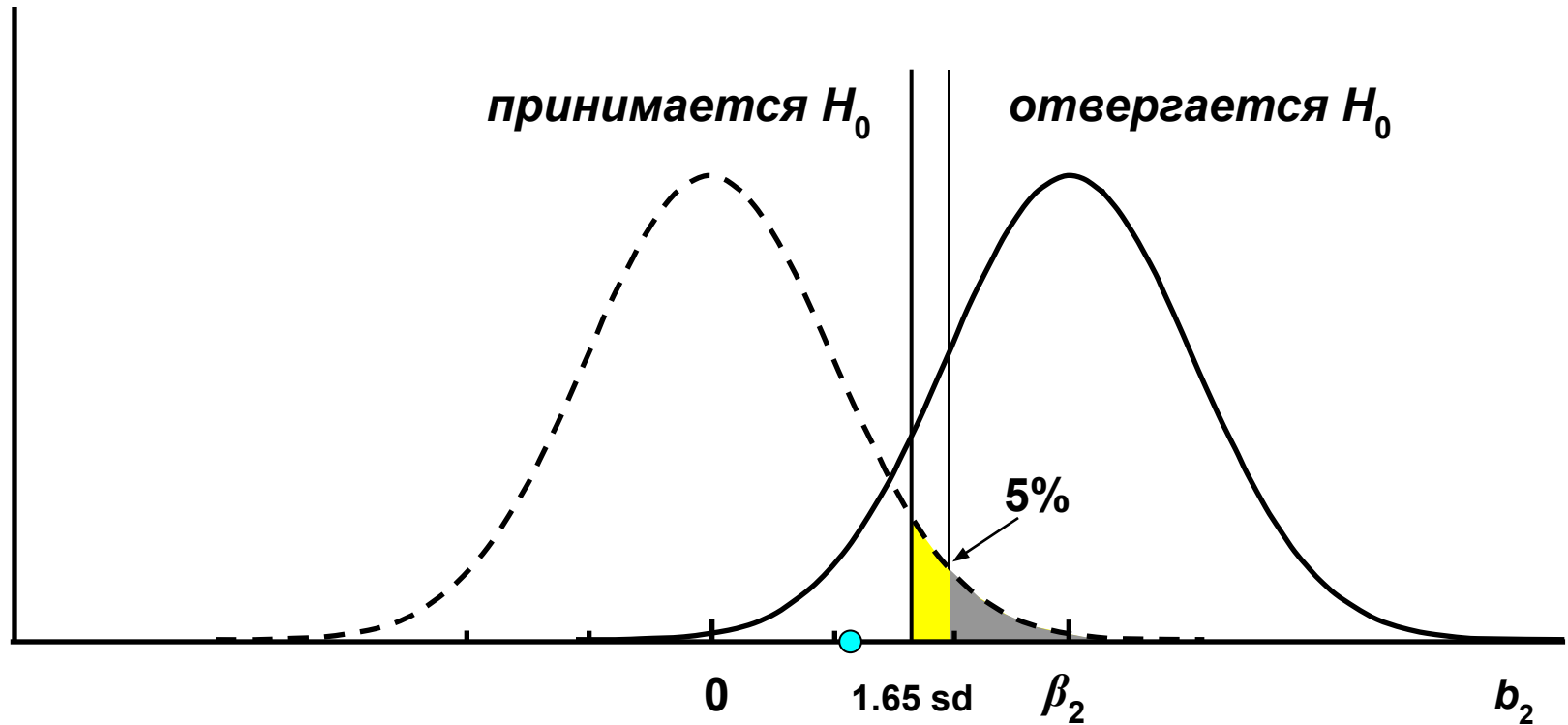
Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2$

> 0

плотность вероятности
функция b_2



Что мы делаем, если b_2 , как на графике? Мы не отвергаем H_0 , независимо от того, мы выполняем двусторонний тест или нет. В любом случае мы допустим ошибку типа II.

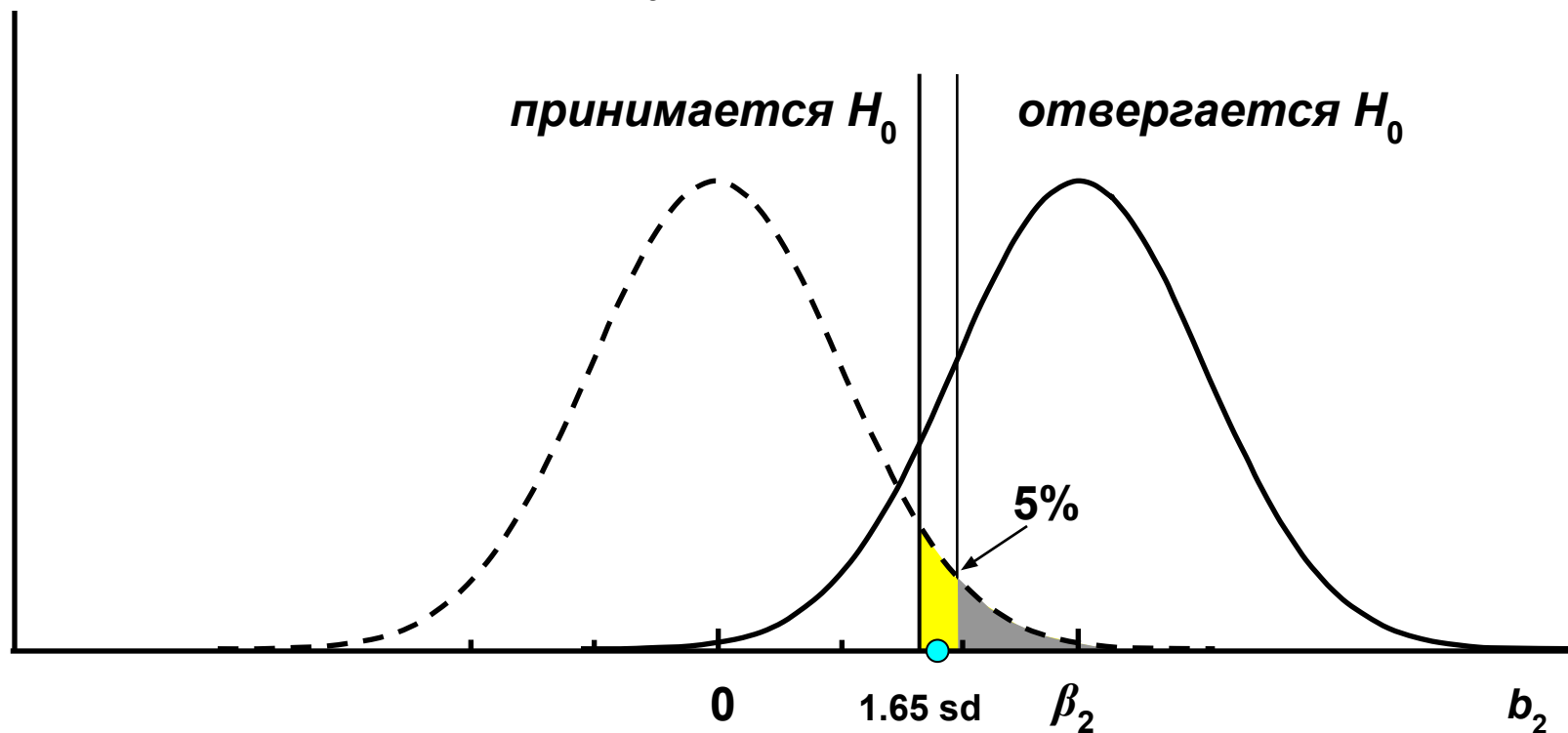
Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2$

> 0

плотность вероятности
функция b_2



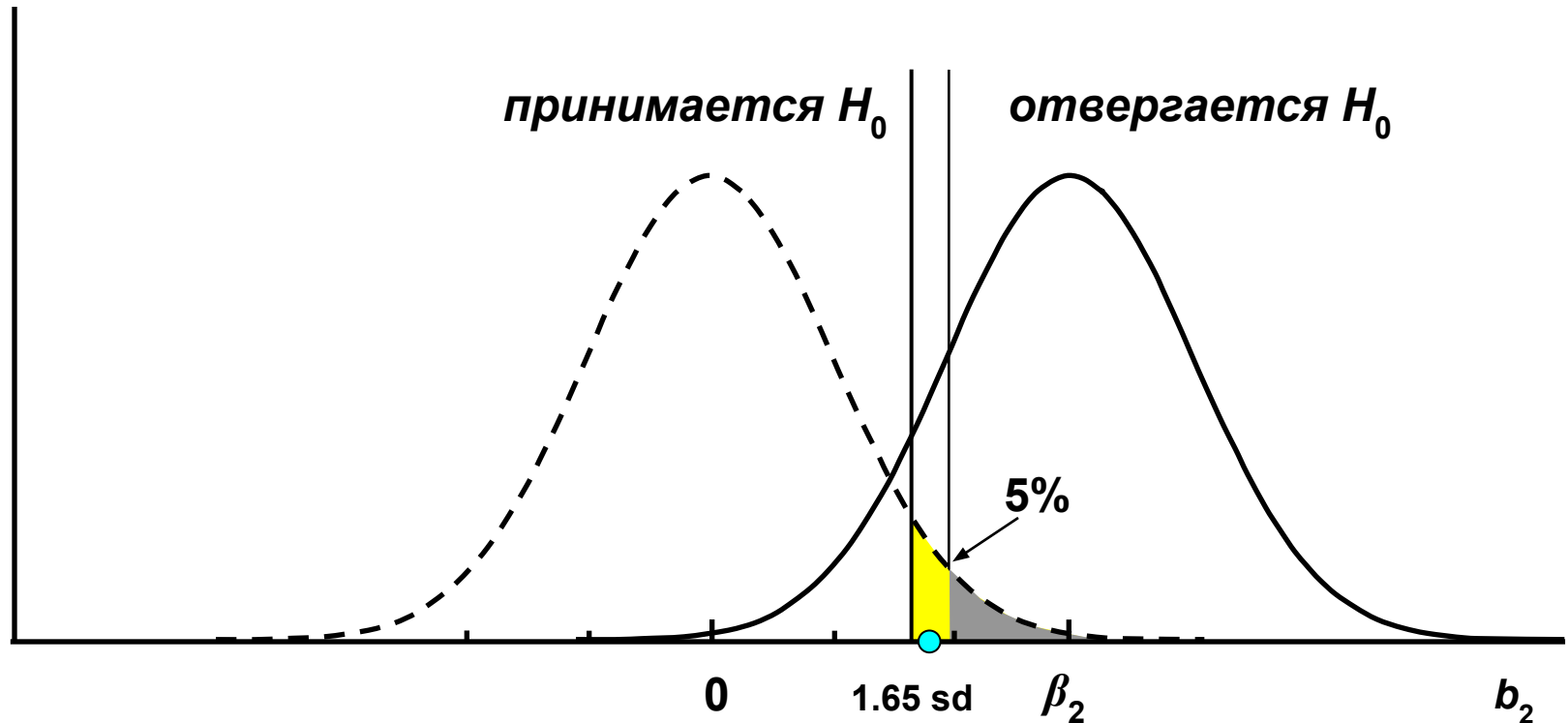
Что мы делаем, если b_2 , как показано здесь? В случае двухстороннего испытания b_2 не находится в области отклонения. Мы не можем отказаться от H_0 .

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 > 0$

плотность вероятности
функция b_2



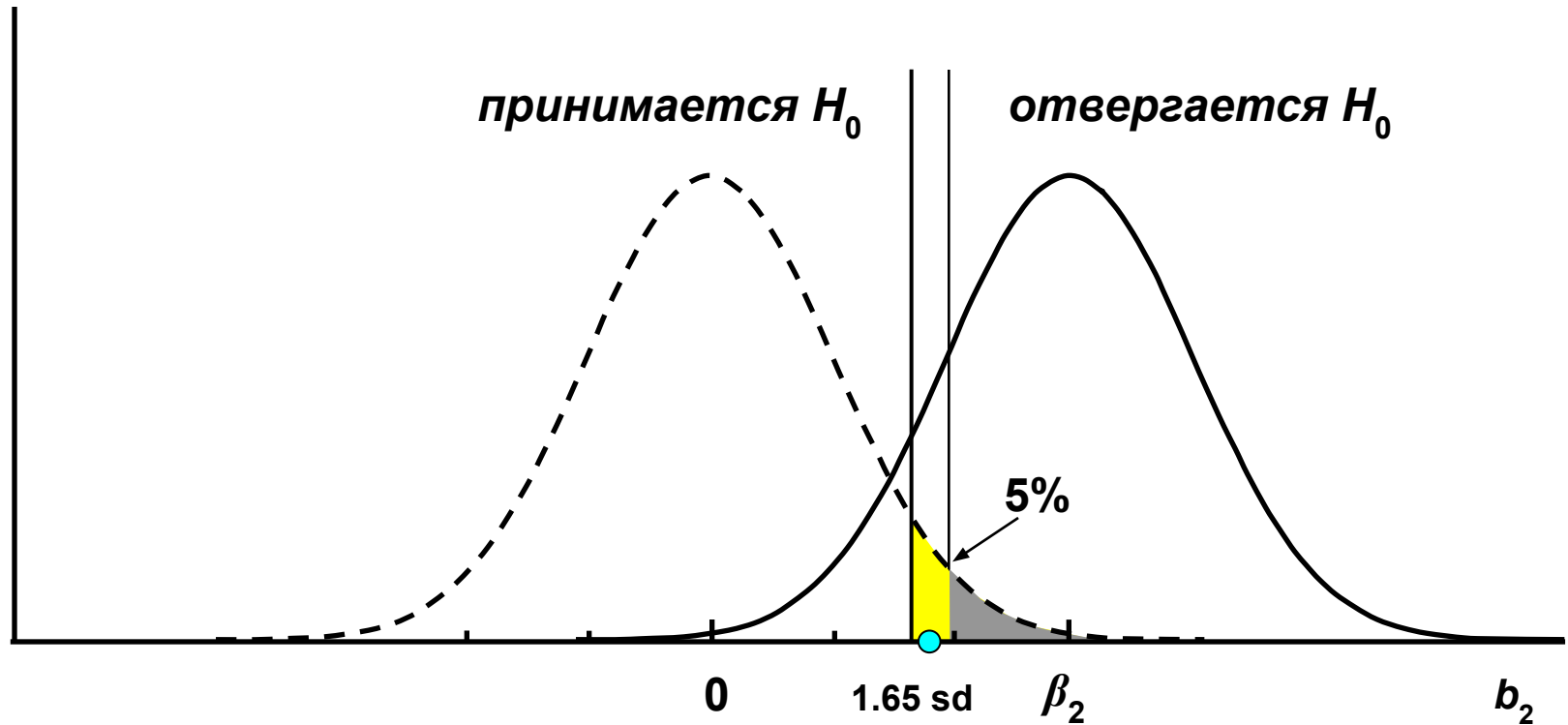
Это значит, что мы не можем доказать, что X существенно влияет на Y . Это не дает желаемого результата, потому что мы надеялись показать, что X является определяющим для Y .

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 > 0$

плотность вероятности
функция b_2



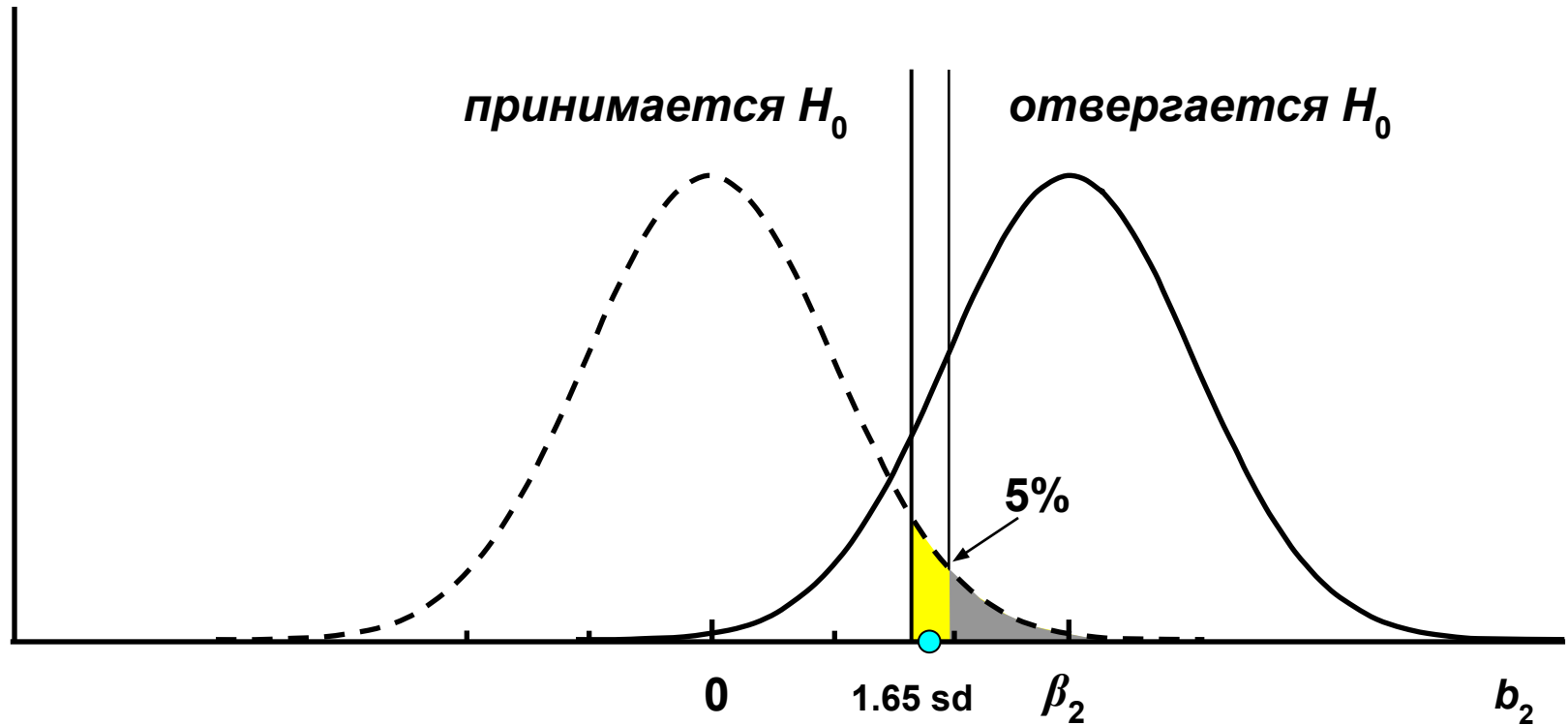
Однако, если мы в состоянии выполнить односторонний тест, b_2 лежит в области отклонения, и поэтому мы продемонстрировали, что X оказывает значительное влияние на Y (на уровне значимости 5%).

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 > 0$

плотность вероятности
функция b_2



Таким образом, мы получаем положительный результат, который мы не могли получить при двустороннем тесте.

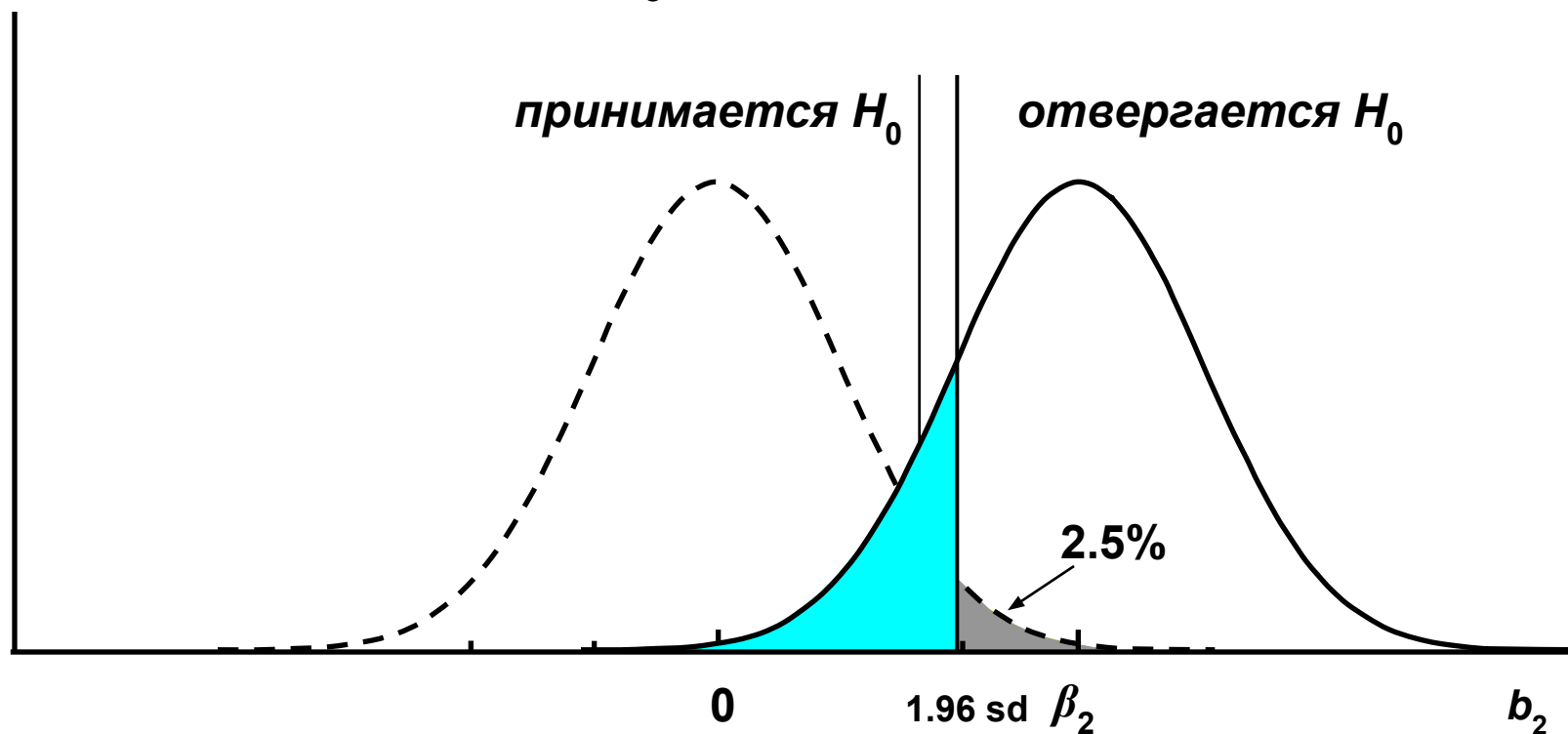
Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2$

> 0

плотность вероятности
функция b_2



Если говорить более формально, то сила одностороннего теста больше, чем у двустороннего. Синяя область показывает вероятность совершения ошибки типа II с помощью двухстороннего теста. Это область под истинной кривой слева от области отклонения.

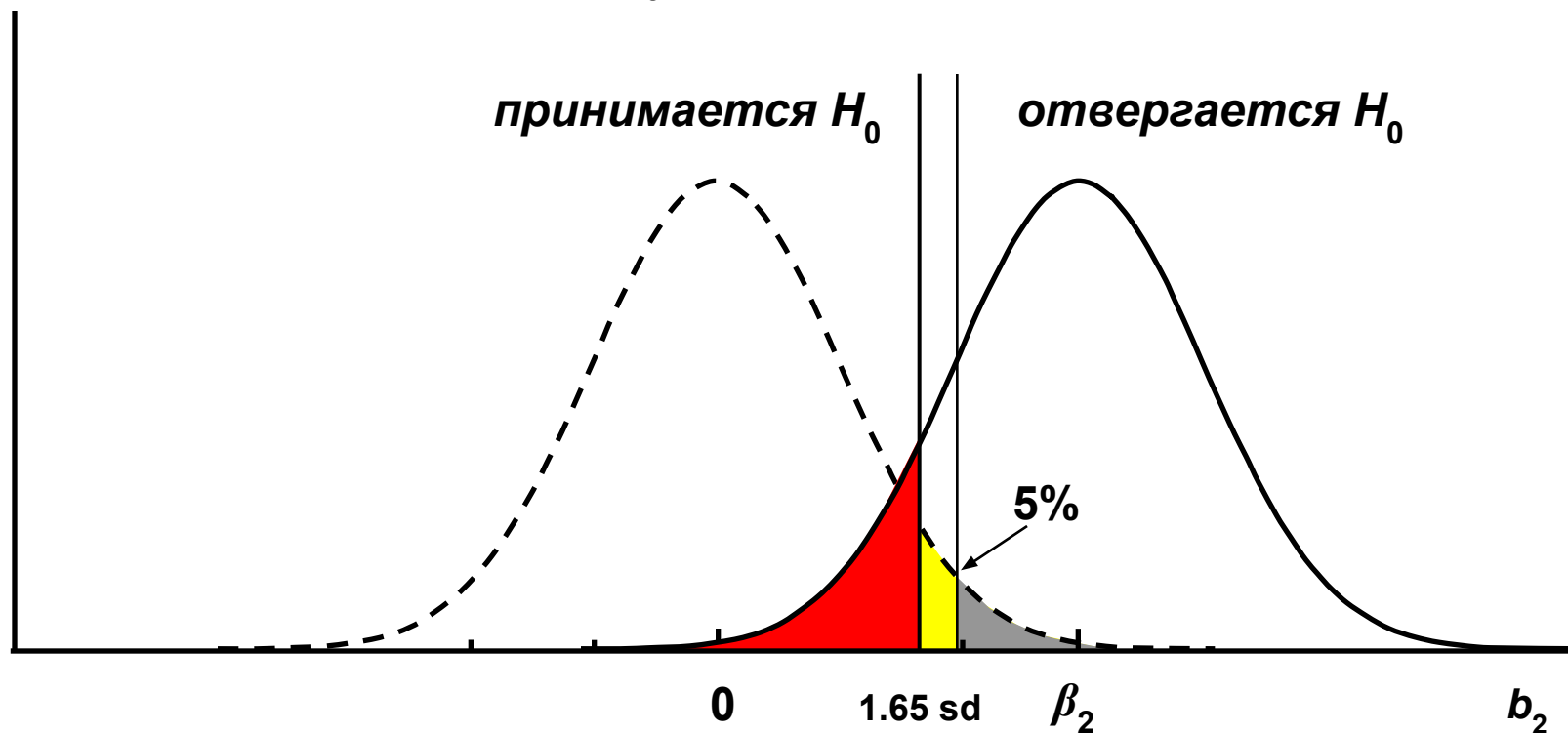
Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2$

> 0

плотность вероятности
функция b_2



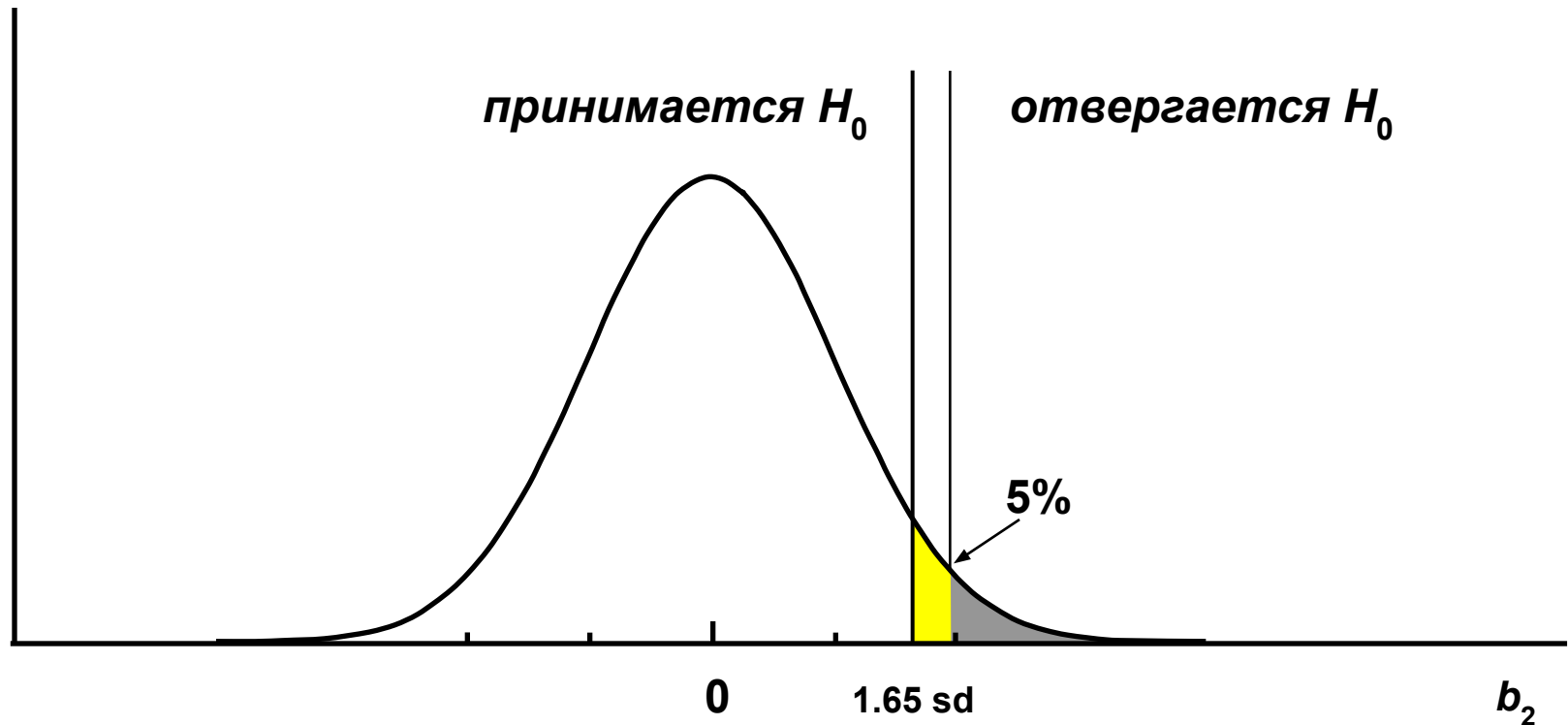
Красная область показывает вероятность совершения ошибки типа II с помощью одностороннего теста. Он меньше, поскольку сила испытания (1-вероятность совершения ошибки типа II, когда H_0 ложен), сила одностороннего испытания больше, чем у двустороннего испытания.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 > 0$

плотность вероятности
функция b_2



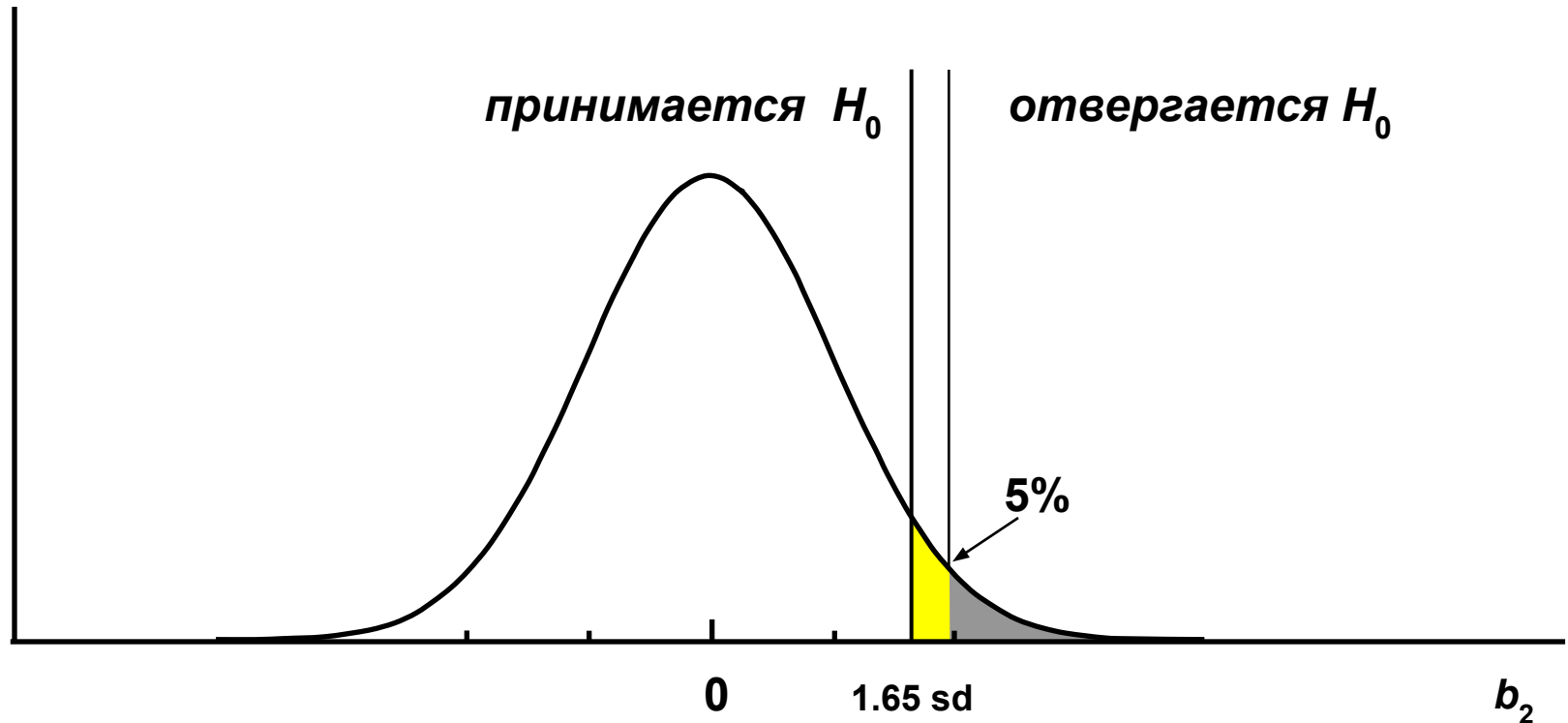
Мы предположили, что знаем стандартное отклонение распределения b_2 . На практике, конечно, стандартное отклонение должно оцениваться как стандартная ошибка, а распределение t является соответствующим распределением. Однако, логика точно такая же.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 > 0$

плотность вероятности
функция b_2



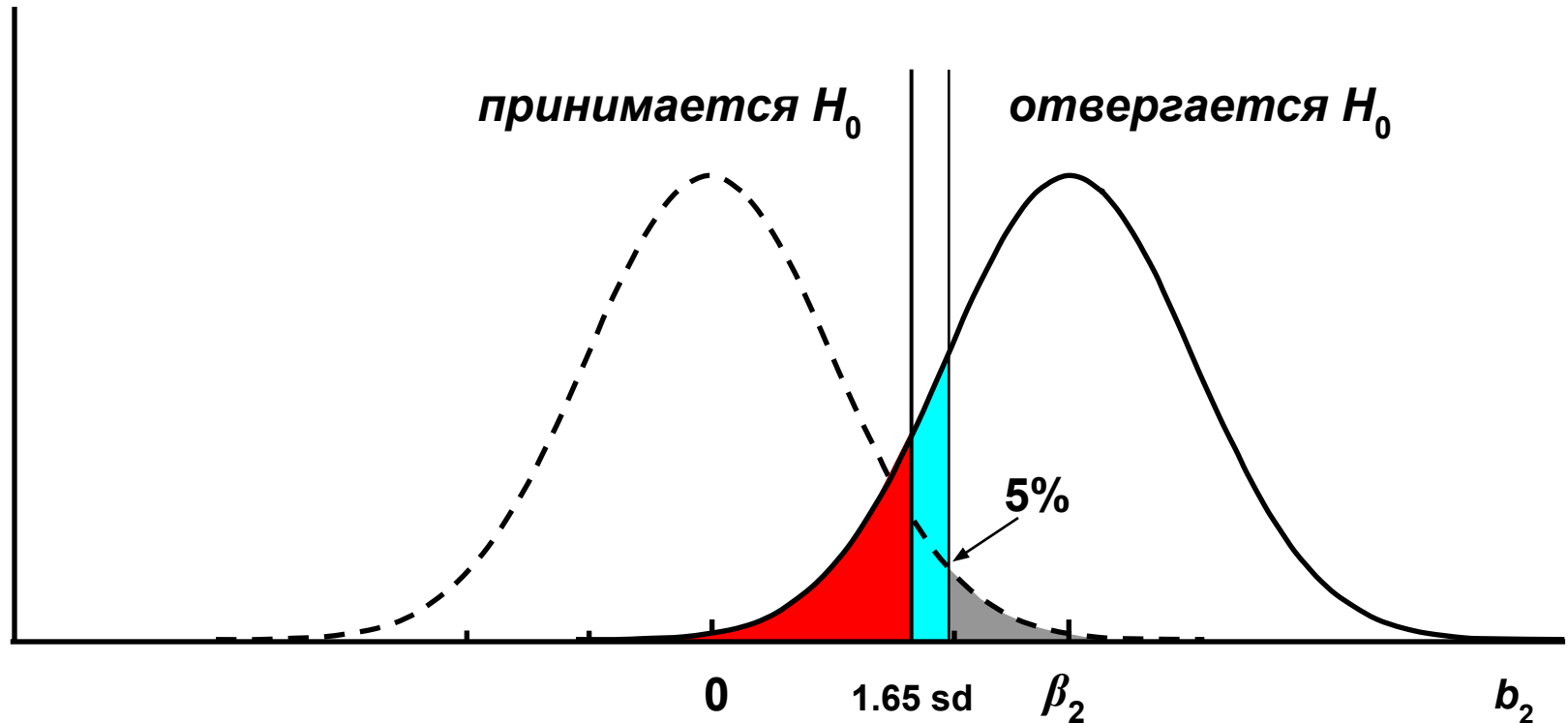
При любом заданном уровне значимости критическое значение t для одностороннего испытания ниже, чем для двустороннего испытания.

Односторонние Т-тесты гипотез, относящихся к коэффициентам регрессии

Нулевая гипотеза: $H_0: \beta_2 = 0$

Альтернативная гипотеза: $H_1: \beta_2 > 0$

плотность вероятности
функция b_2



Следовательно, если значение H_0 является ложным, то риск того, что он не будет отклонен, что приведет к ошибке типа II, меньше, и поэтому сила одностороннего испытания больше, чем у двустороннего испытания.