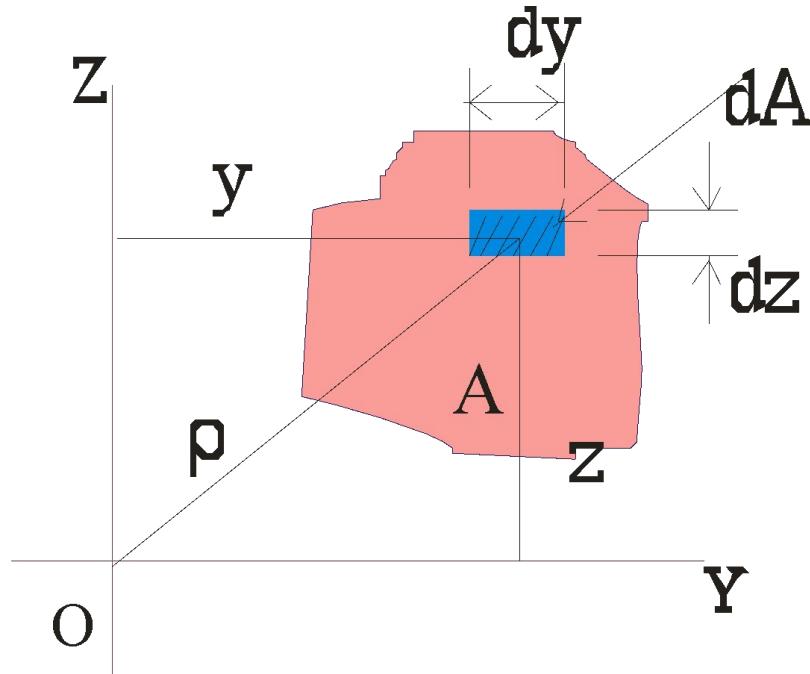


Главные центральные оси сечения

Моменты инерции



Интеграл вида:

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

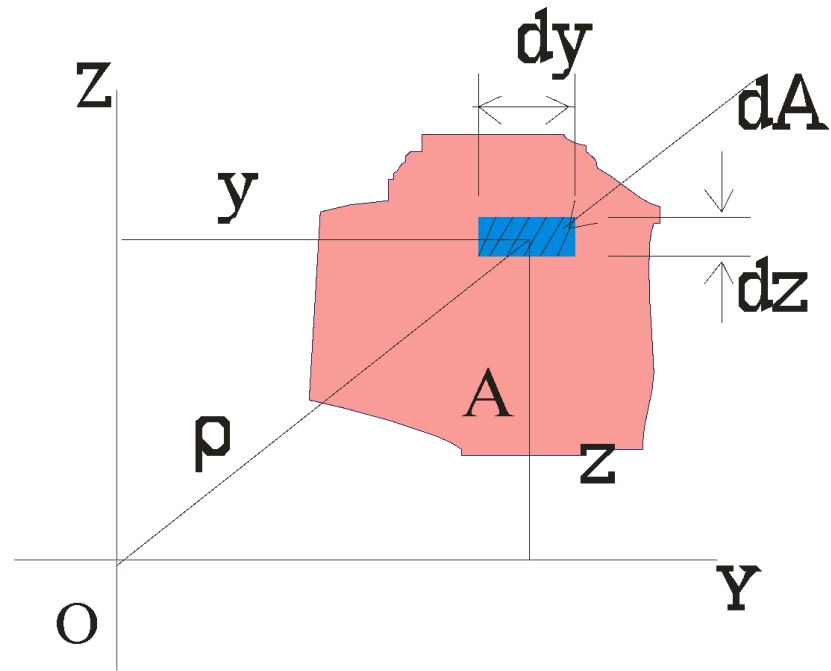
*момент инерции сечения относительно оси **y**.*

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

*момент инерции сечения относительно
оси **z**.*

$$I_{yz} = \int_A y \cdot z dA$$

центробежный момент
инерции относительно осей y и z ,
момента сечения



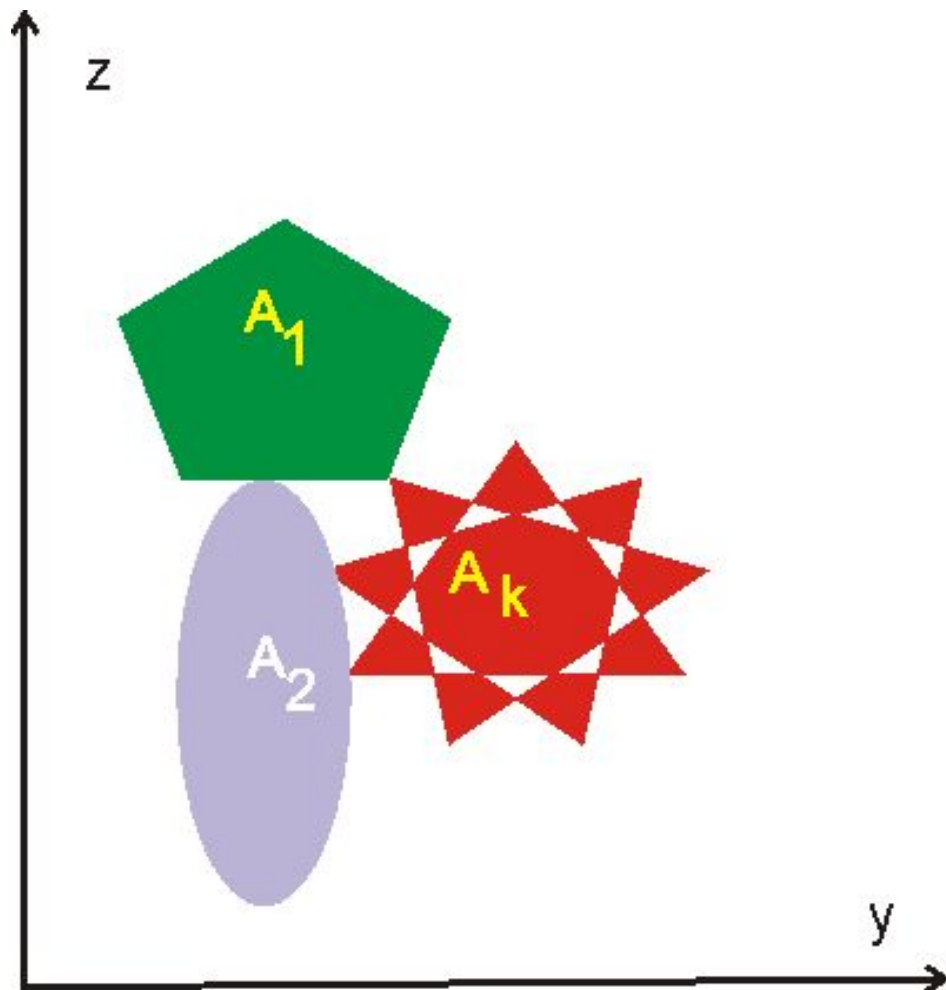
$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA$$

полярный момент инерции

$$\rho^2 = y^2 + z^2$$

$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_z + I_y$$

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ



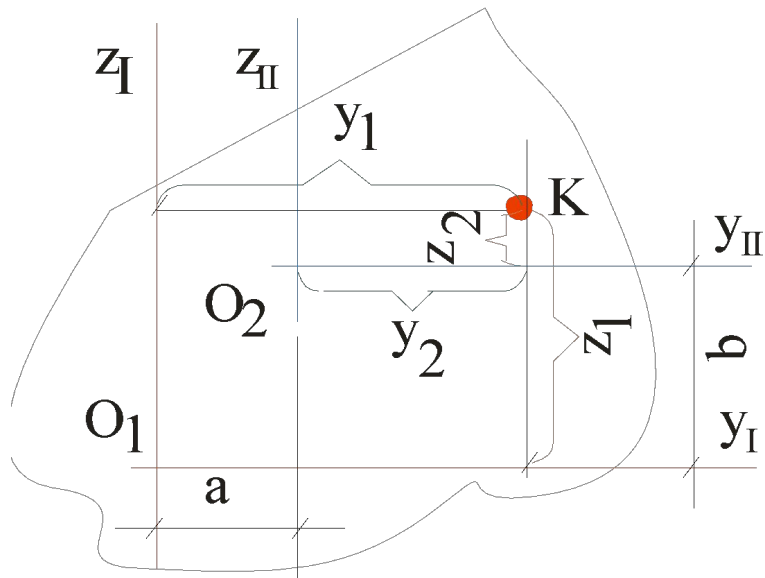
$$I_y = \int_0^A z^2 dA. \quad A = A_1 + A_2 + \dots + A_k = \sum_{r=1}^k A_r,$$

$$I_y = \int_0^{A_1+A_2+\dots+A_k} z^2 dA = \int_0^{A_1} z^2 dA + \int_{A_1}^{A_2} z^2 dA + \dots + \int_{A_{k-1}}^k z^2 dA.$$

$$I_y = I_{1y} + I_{2y} + \dots + I_{ky}$$

$$I_z = I_{1z} + I_{2z} + \dots + I_{kz}$$

Моменты инерции относительно параллельных осей



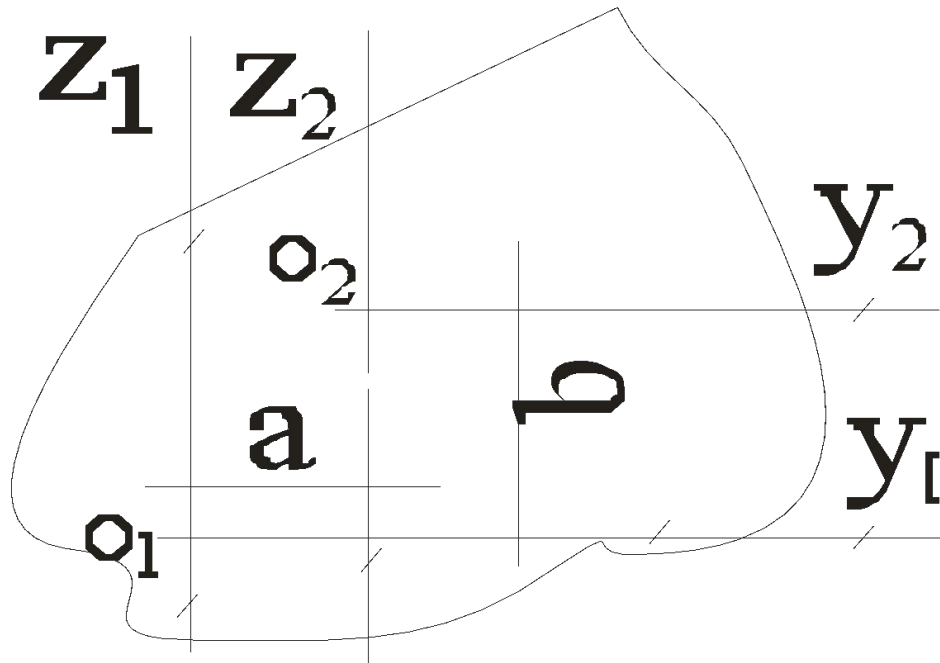
$$y_{12} = a; \quad z_{12} = b.$$

$$y_2 = y_1 - a; \quad z_2 = z_1 - b.$$

$$\begin{aligned} I_{y_2} &= \int_{(A)} z_2^2 dA = \int_{(A)} (z_1 - b)^2 dA = \\ &= \int_{(A)} z_1^2 dA - 2b \int_{(A)} z_1 dA + b^2 \int_{(A)} dA = \\ &= I_{y_1} - 2bS_{y_1} + b^2 A, \end{aligned}$$

$$S_{y_1} = \int_A z_1 dA$$

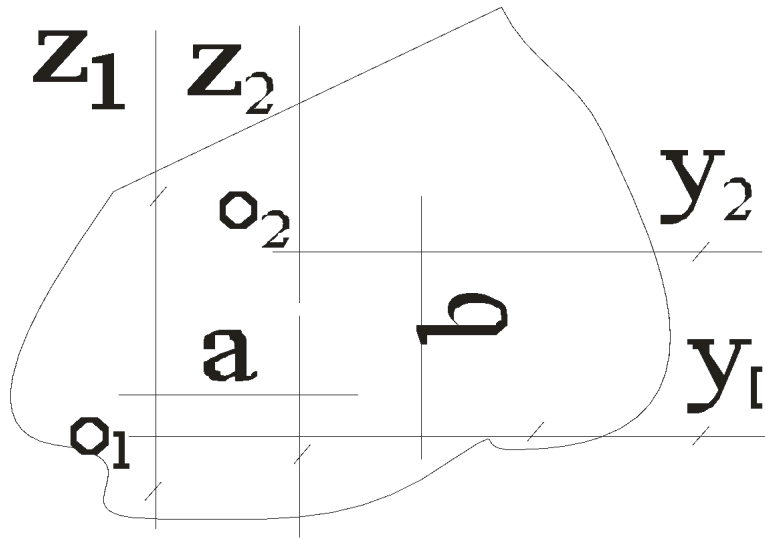
Пусть оси y_1, z_1 будут центральными, тогда $S_{y_1} = 0$ и



$$I_{y_2} = I_{y_1} + b^2 A$$

$$I_{z_2} = I_{z_1} + a^2 \cdot A$$

$$I_{y_2 z_2} = I_{y_1 z_1} + a \cdot b \cdot A;$$

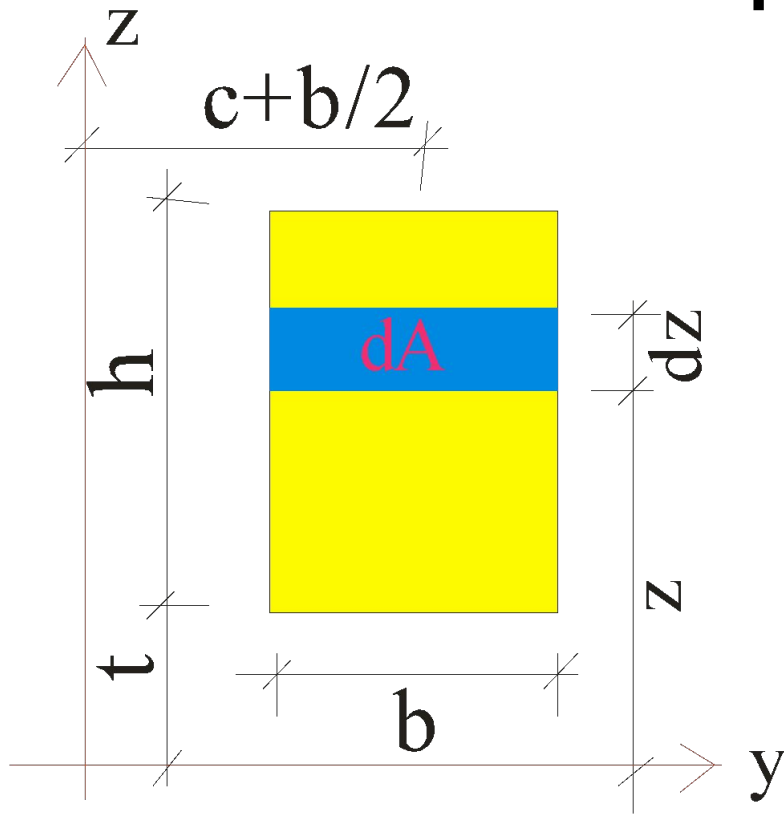


$$I_{y_1} = I_{y_2} - b^2 A.$$

$$I_{z_1} = I_{z_2} - a^2 \cdot A$$

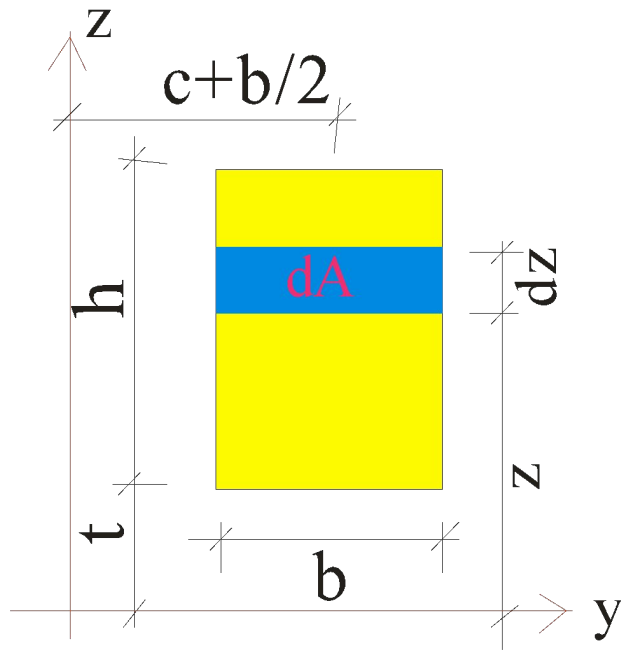
$$I_{y_1 z_1} = I_{y_2 z_2} - a \cdot b \cdot A.$$

например

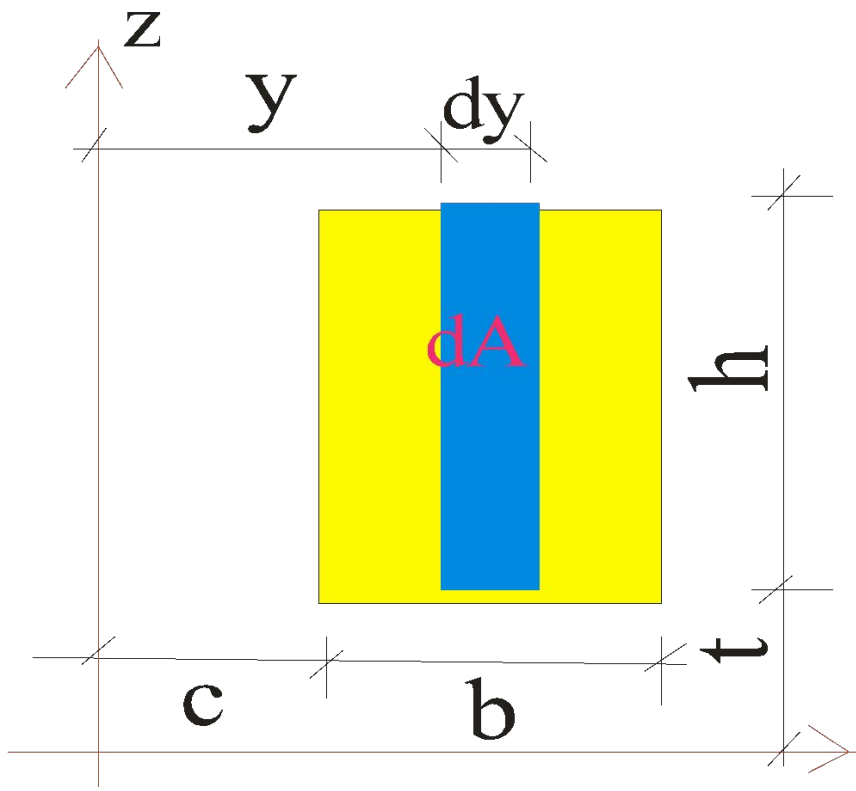


$$\begin{aligned} I_y &= \int_t^{h+t} z^2 b dz = \frac{b \cdot z^3}{3} = \\ &= \frac{b \cdot (h+t)^3}{3} - \frac{b \cdot t^3}{3} = \\ &= \frac{b \cdot h^3}{3} + A \cdot (t+h) \cdot t \end{aligned}$$

$$dA = b \cdot dz$$



$$\begin{aligned}
 I_{yz} &= \int_t^{h+t} z \left(c + \frac{b}{2}\right) b dz = \frac{z^2 \left(c + \frac{b}{2}\right) b}{2} = \\
 &= \frac{\left((h+t)^2 - t^2\right) \cdot \left(c + \frac{b}{2}\right) \cdot b}{2} = \\
 &= \frac{h^2 \cdot b^2}{4} + \frac{1}{2} A \cdot (bt + hc) + A \cdot tc;
 \end{aligned}$$



$$I_z = \int_c^{b+c} y^2 h dy =$$

$$= \frac{h \cdot (b+c)^3}{3} - \frac{h \cdot c^3}{3} =$$

$$y = \frac{h \cdot b^3}{3} + A \cdot (c+b) \cdot c$$

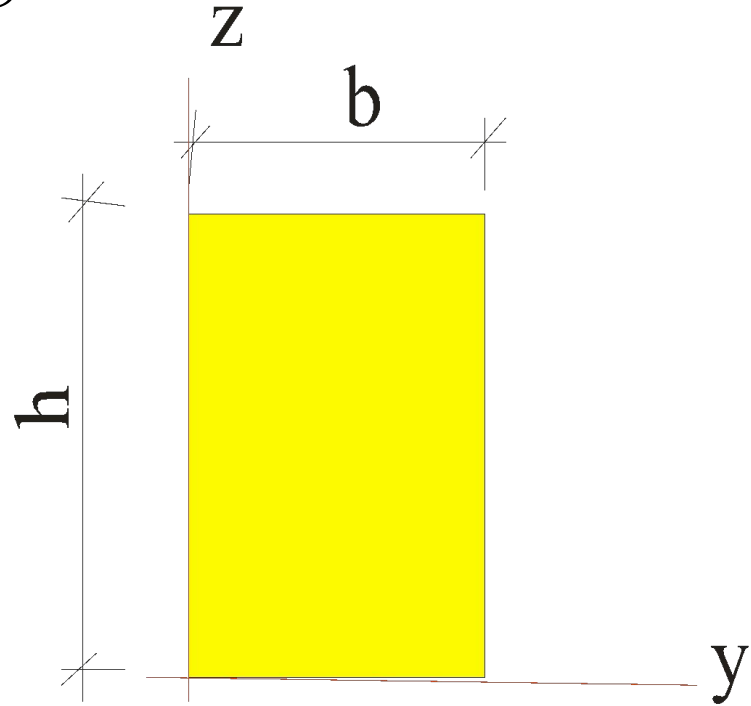
$$dA = h \cdot dy$$

$c=0; t=0$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{3}$$

$$I_{yz} = \frac{h^2 \cdot b^2}{4}$$



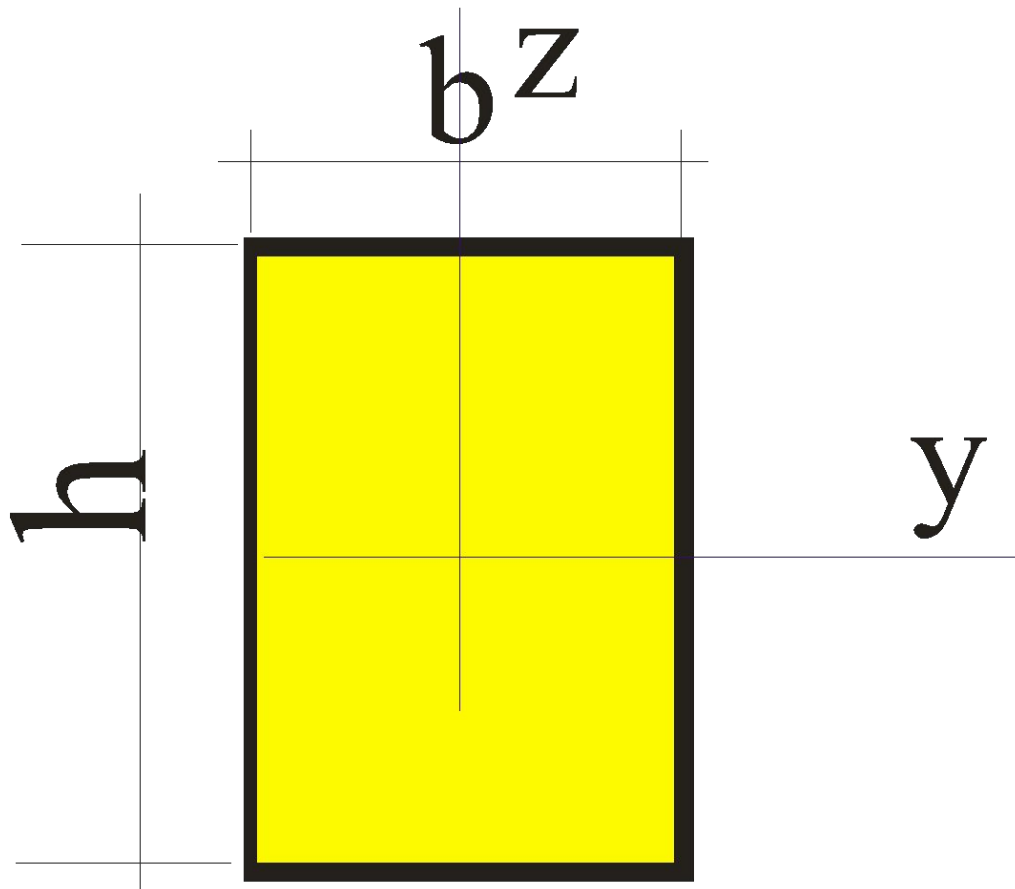
Размерность моментов инерции

$$I_z > 0$$

$$I_y > 0$$

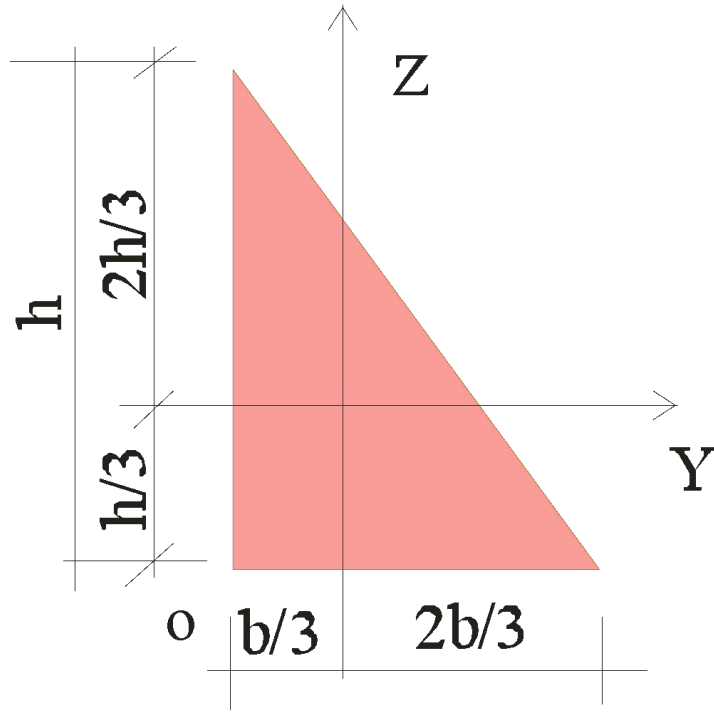
$$I_{zy} \leq 0 \text{ или } I_{zy} \geq 0$$

Момент инерции простых сечений



$$I_z = \frac{b^3 h}{12}.$$

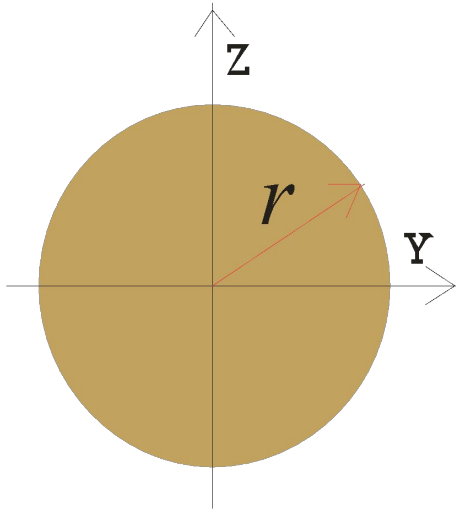
$$I_y = \frac{b h^3}{12};$$



$$I_z = \frac{b^3 h}{36}.$$

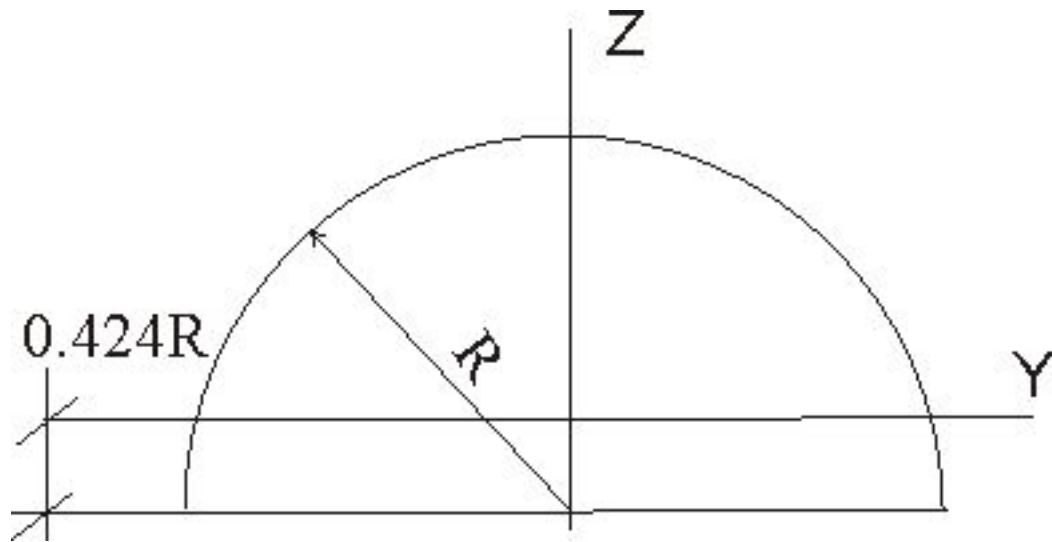
$$I_y = \frac{bh^3}{36}.$$

$$I_{zy} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$



$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

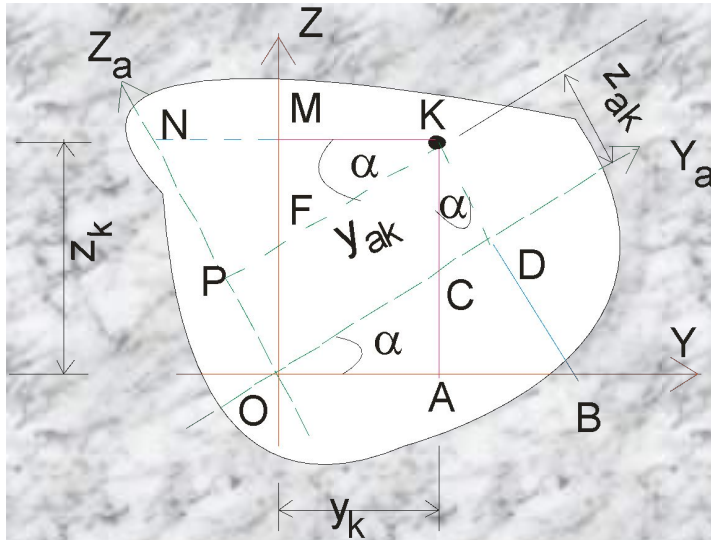
$$I_y = I_z = \frac{I_{\rho}}{2} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}.$$



$$I_z = \frac{\pi \cdot D^4}{128}$$

$$I_y = 0.00220\pi D^4$$

МИ относительно поворнутых осей



$$y_{ak} = y_k \cdot \cos \alpha + z_k \cdot \sin \alpha$$

$$z_{ak} = z_k \cdot \cos \alpha - y_k \cdot \sin \alpha$$

$$I_{za} = \int_{(A)} y_{ak}^2 dA = \int_{(A)} (y_k \times \cos \alpha + z_k \times \sin \alpha)^2 dA$$

$$I_{y\alpha} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{z\alpha} = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{z2} + I_{y2} = I_{z1} + I_{y1}$$

$$I_{max} + I_{min} = I_{z1} + I_{y1}$$

$$\frac{dI_{y\alpha}}{d\alpha} = 0; \quad \frac{dI_{z\alpha}}{d\alpha} = 0.$$

ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ

$$I_{y_0 z_0} = 0.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

$$I_{y_0} = I_z \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 + I_{yz} \sin 2\alpha_0$$

$$I_{z_0} = I_y \cos^2 \alpha_0 + I_z \sin^2 \alpha_0 - I_{yz} \sin 2\alpha_0$$

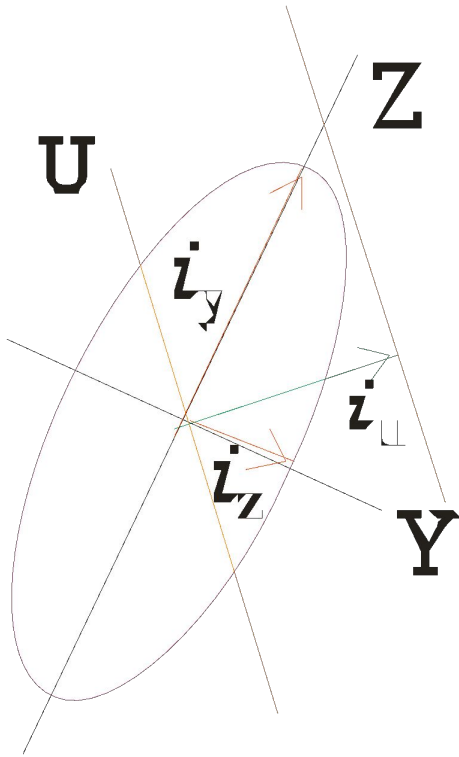
$$I_{zy} > 0$$

$$I_{y_0} = I_{\max}; \quad I_{z_0} = I_{\min}$$

$$I_{zy} < 0$$

$$I_{z_0} = I_{\max}; \quad I_{y_0} = I_{\min}$$

Радиусы инерции



$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}};$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

