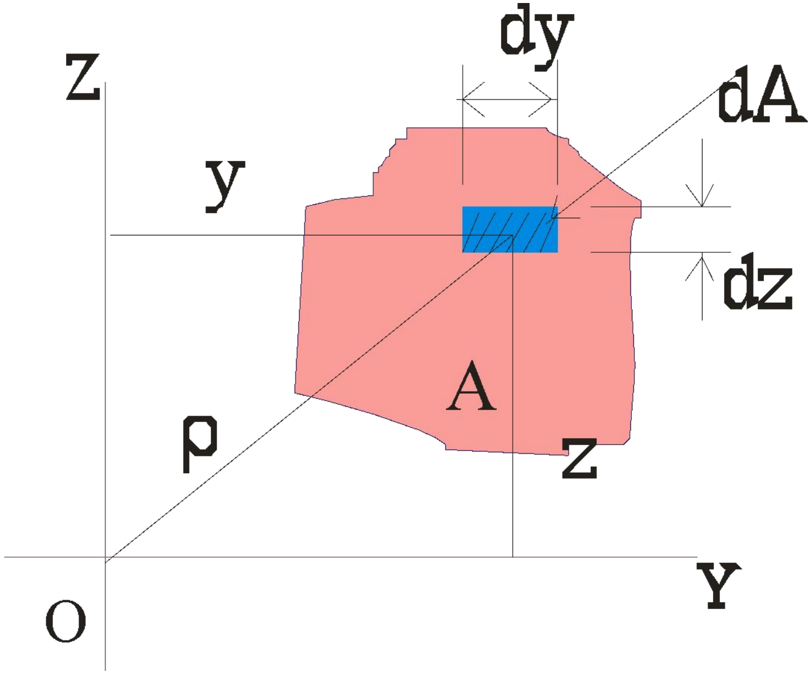
Главные центральные оси сечения

Моменты инерции



Интеграл вида:

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

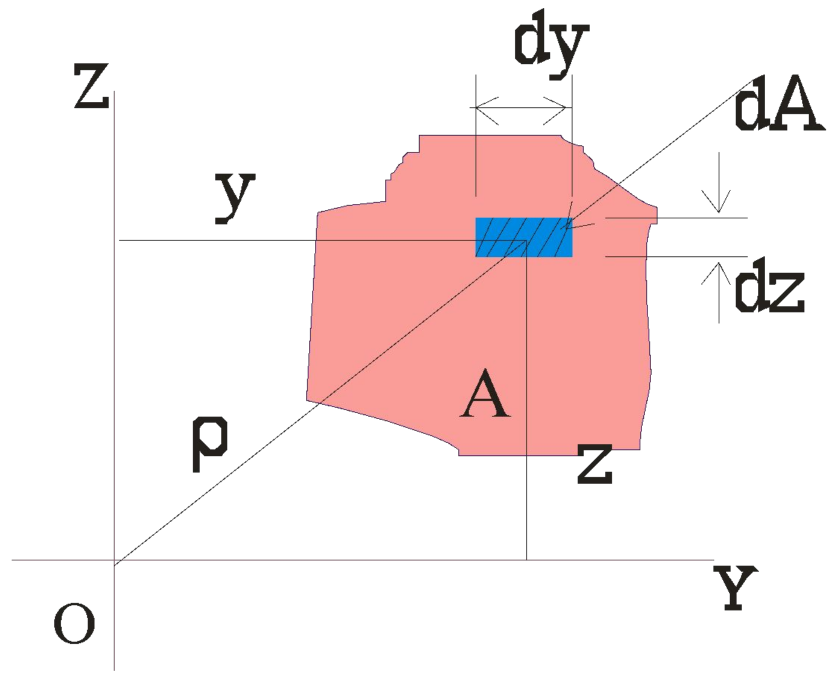
момент инерции сечения относительно оси ***y***,

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

момент инерции сечения относительно оси ***z***.

$$I_{yz} = \int_A y \cdot z dA$$

центробежный момент инерции сечения относительно осей *y* и *z*,



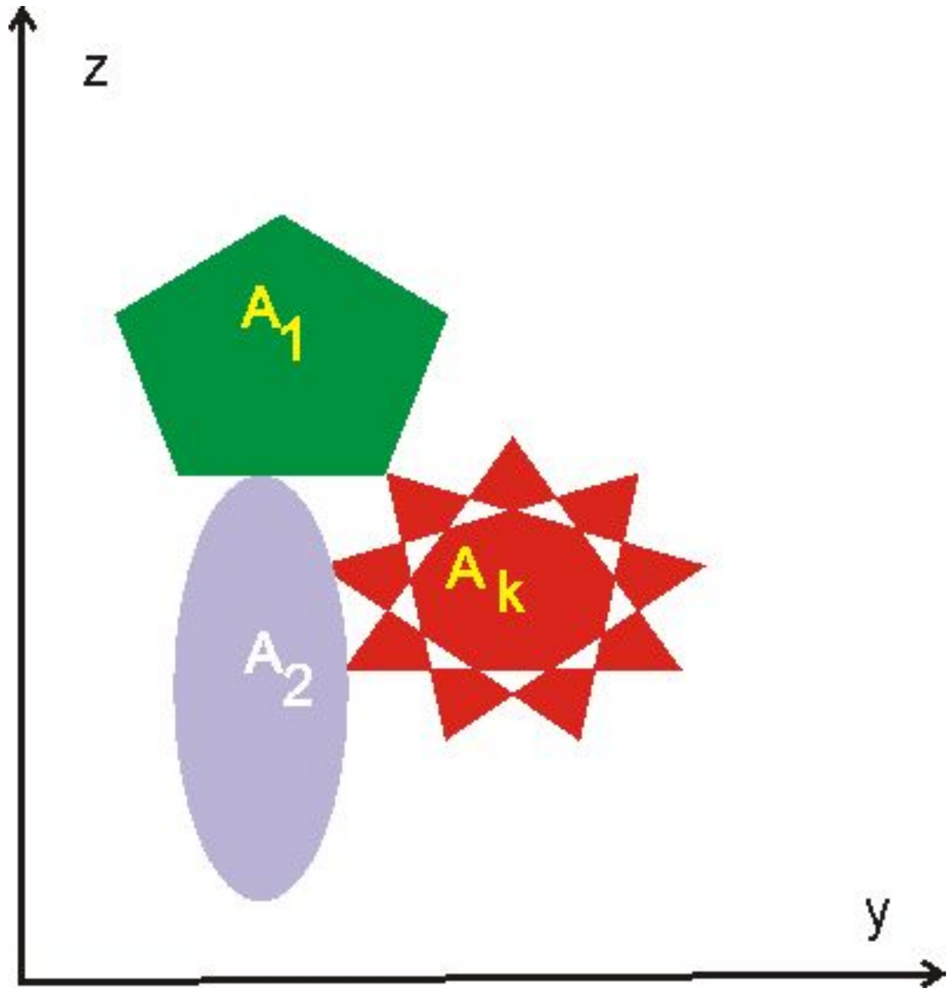
$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA$$

полярный момент инерции

$$\rho^2 = y^2 + z^2$$

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_z + I_y$$

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ



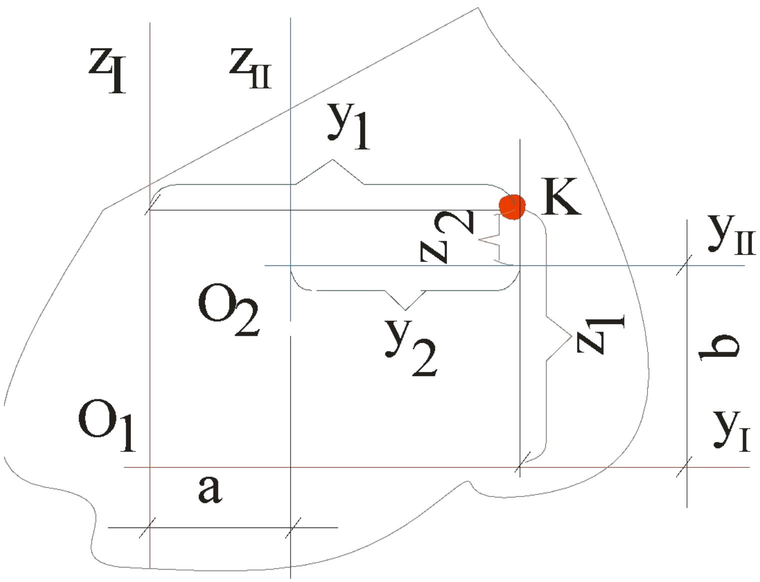
$$\mathrm{I_y} = \int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{z^2 dA}. \quad A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k = \sum_{r=1}^{k} A_r,$$

$$I_y = \int_0^{A_1+A_2+\ldots+A_k} z^2 dA = \int_0^{A_1} z^2 dA + \int_{A_1}^{A_2} z^2 dA + \ldots + \int_{A_{k-1}}^{k} z^2 dA.$$

$$I_y = I_{1y} + I_{2y} + \ldots + I_{ky}$$

$$I_z = I_{1z} + I_{2z} + \ldots + I_{kz}$$

Моменты инерции относительно параллельных осей



$y_{12}.=a$; $z_{12}=b$.

$y_2=y_1-a$; $z_2=z_1-b$.

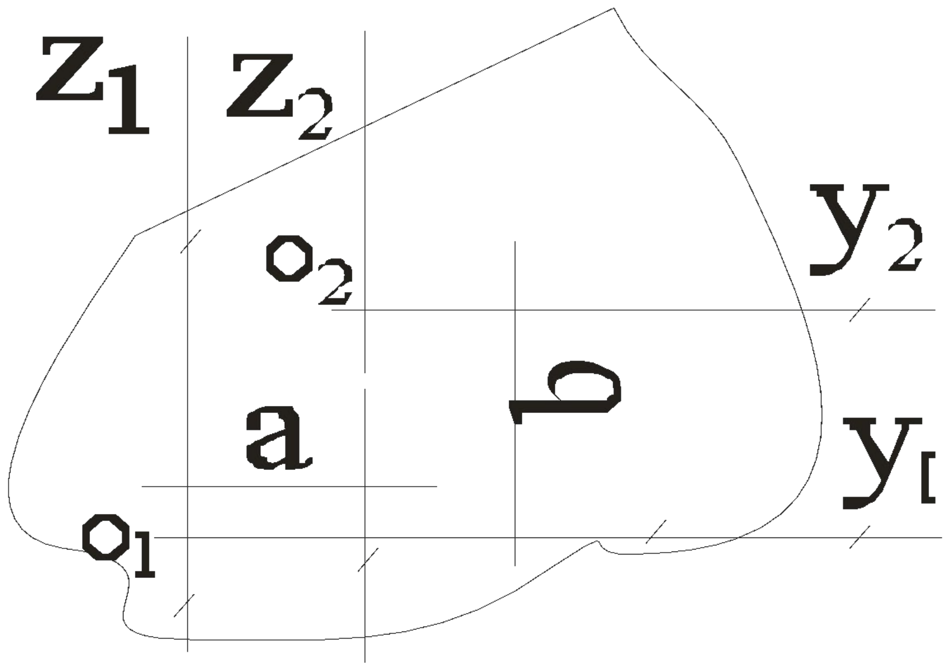
$$I_{y_2} = \int\limits_{(A)} z_2^2 dA = \int\limits_{(A)} (z_1 - b)^2 dA =$$

$$= \int\limits_{(A)} z_1^2 dA - 2b \int\limits_{(A)} z_1 dA + b^2 \int\limits_{(A)} dA =$$

$$= I_{y_1} - 2bS_{y_1} + b^2 A,$$

$$S_{y_1} = \int\limits_{A} z_1 dA$$

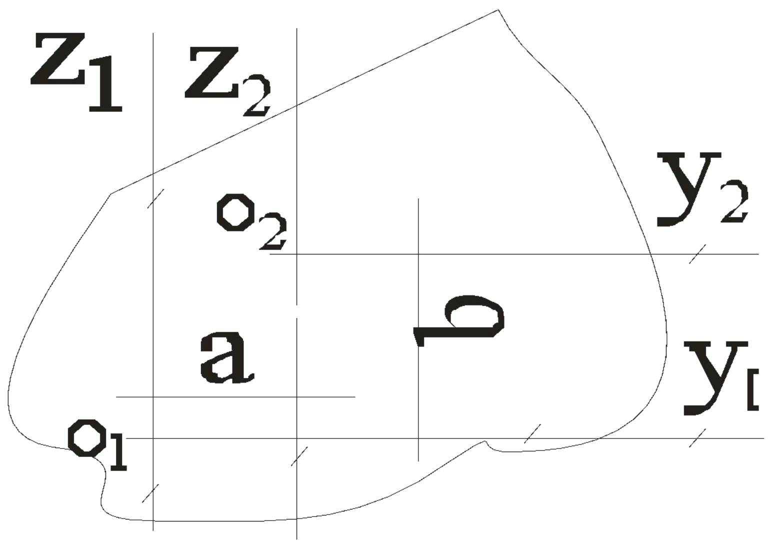
Пусть оси $y_I o_I z_I$ будут центральными, тогда $S_{y1}.=0$ и



$$I_{y_2} = I_{y_1} + b^2 A$$

$$I_{z_2} = I_{z_1} + a^2 \cdot A$$

$$I_{y_2 z_2} = I_{y_1 z_1} + a \cdot b \cdot A;$$

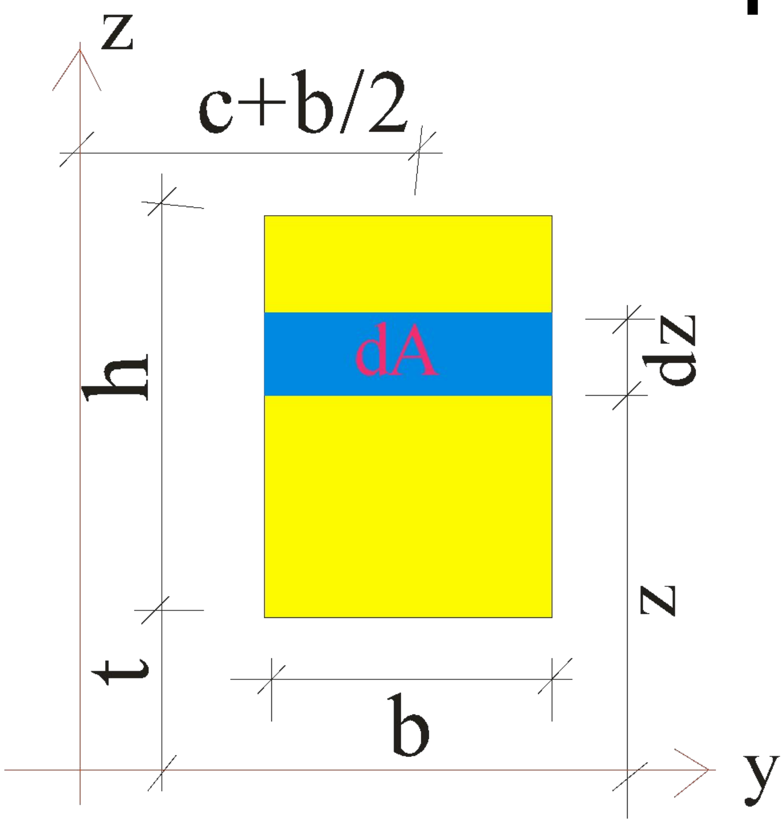


$$I_{y_1} = I_{y_2} - b^2 A.$$

$$I_{z_1} = I_{z_2} - a^2 \cdot A$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{y_2 z_2} - a \cdot b \cdot A.$$

например

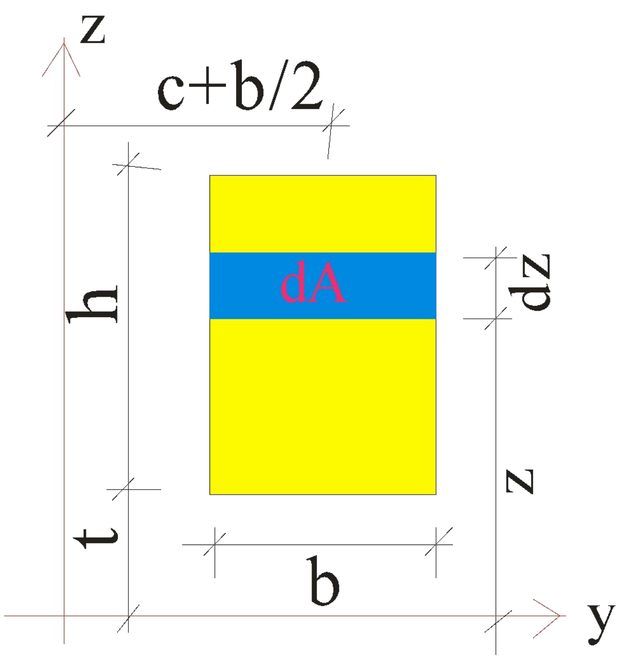


$$I_y = \int_t^{h+t} z^2 b dz = \frac{b \cdot z^3}{3} =$$

$$= \frac{b \cdot (h+t)^3}{3} - \frac{b \cdot t^3}{3} =$$

$$= \frac{b \cdot h^3}{3} + A \cdot (t+h) \cdot t$$

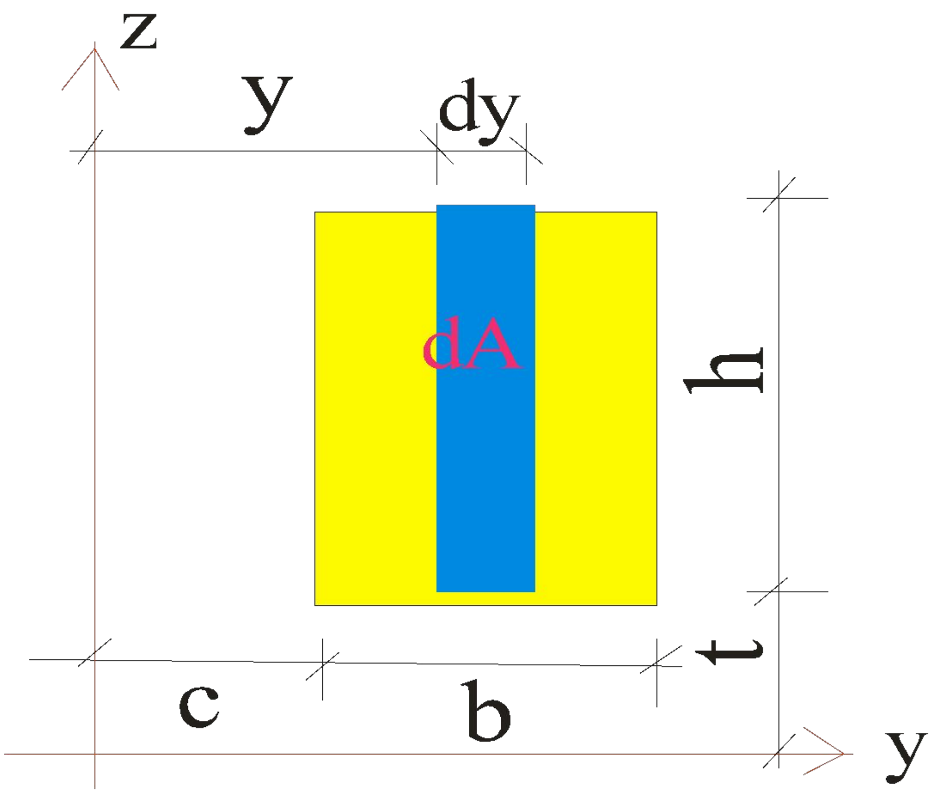
$dA = b \cdot dz$;



$$I_{yz} = \int_{t}^{h+t} z(c+\frac{b}{2})bdz = \frac{z^2(c+\frac{b}{2})b}{2} =$$

$$= \frac{((h+t)^2 - t^2)\cdot(c+\frac{b}{2})\cdot b}{2} =$$

$$= \frac{h^2\cdot b^2}{4} + \frac{1}{2}A\cdot(bt+hc) + A\cdot tc;$$



$$I_z = \int_c^{b+c} y^2 h\,dy =$$

$$= \frac{h\cdot(b+c)^3}{3} - \frac{h\cdot c^3}{3} =$$

$$= \frac{h\cdot b^3}{3} + A\cdot(c+b)\cdot c$$

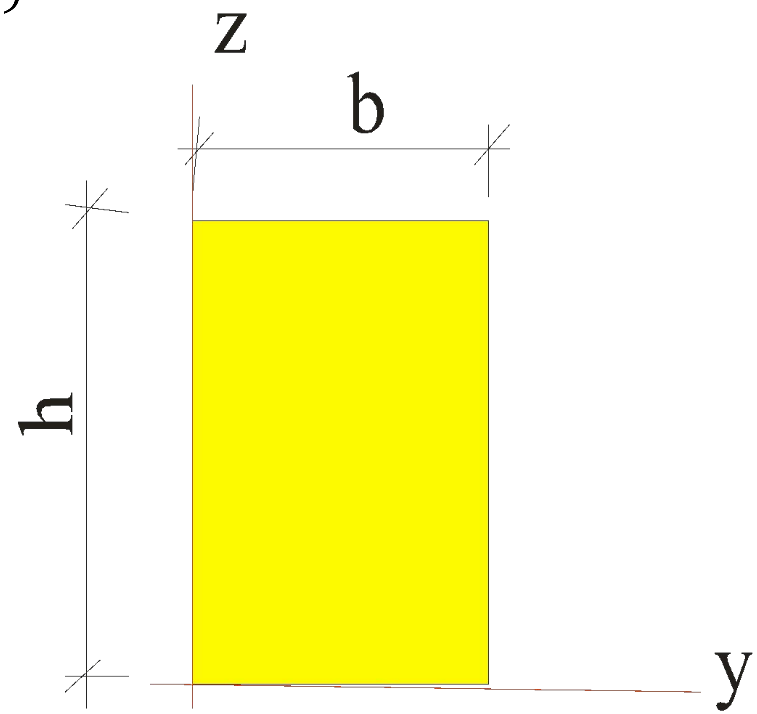
$dA = h\cdot dy$

$$c=0;\ t=0$$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{3}$$

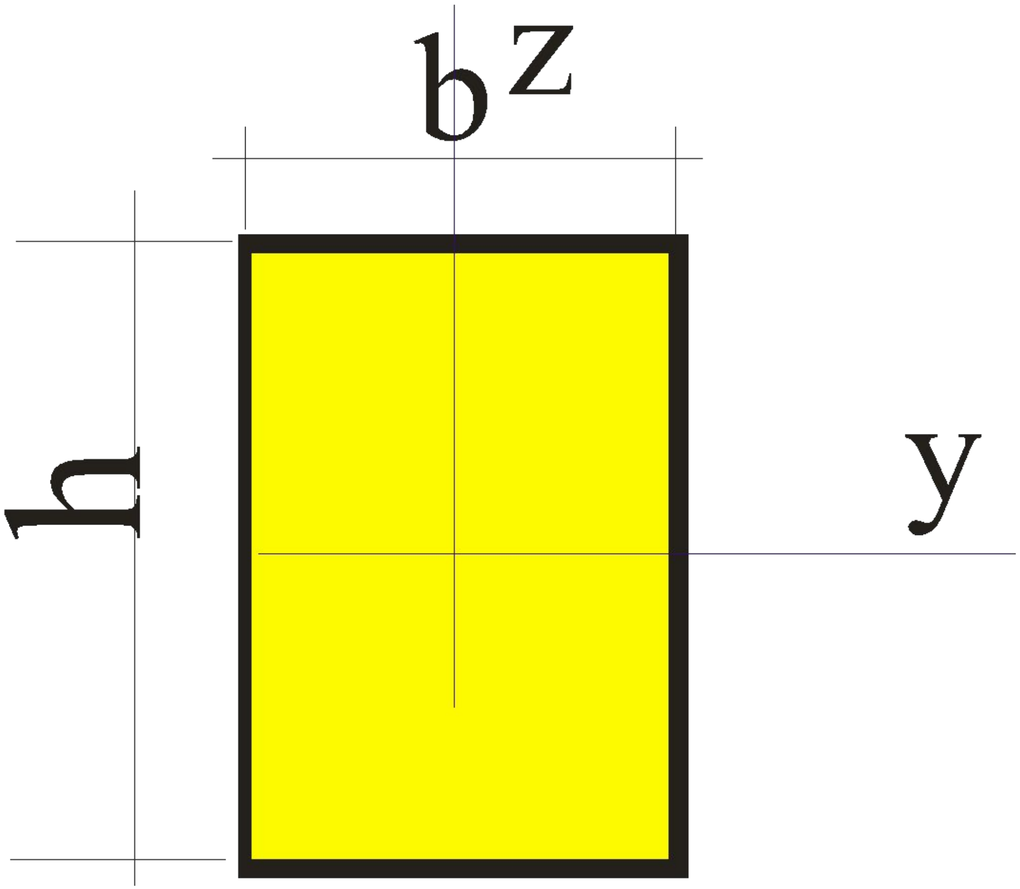
$$I_{yz} = \frac{h^2 \cdot b^2}{4}$$



Размерность моментов инерции

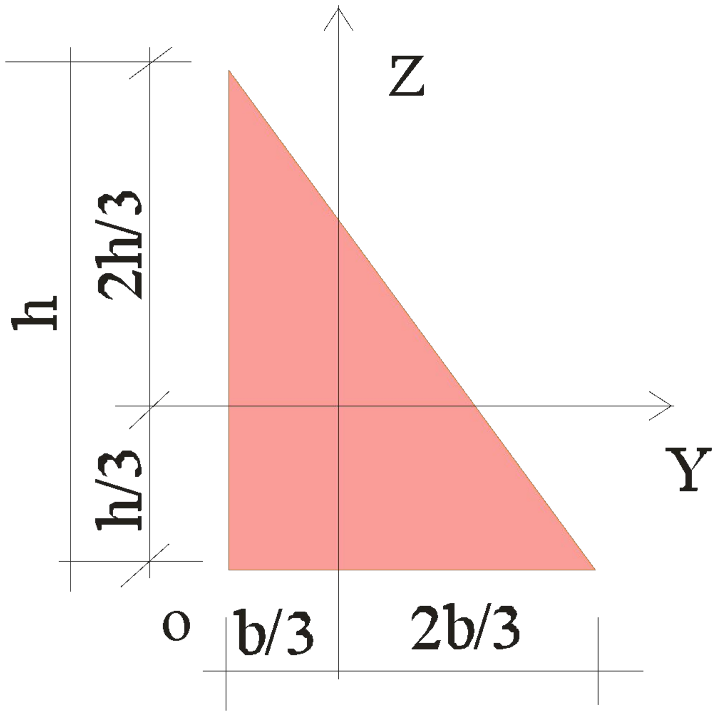
$I_z > 0 \quad I_y > 0 \quad I_{zy} \le 0$ или $I_{zy} \ge 0$

Момент инерции простых сечений



$$I_z = \frac{b^3 h}{12}.$$

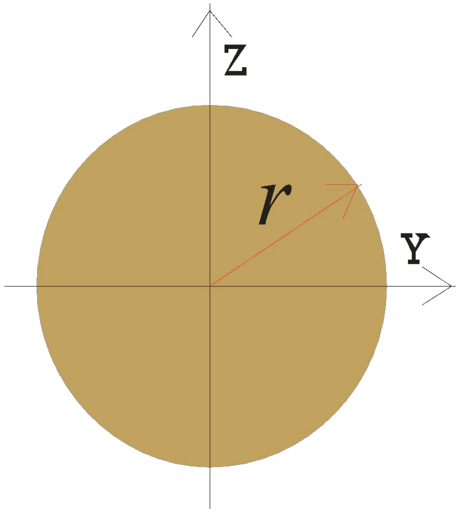
$$I_y = \frac{b h^3}{12};$$



$$I_z = \frac{b^3h}{36}.$$

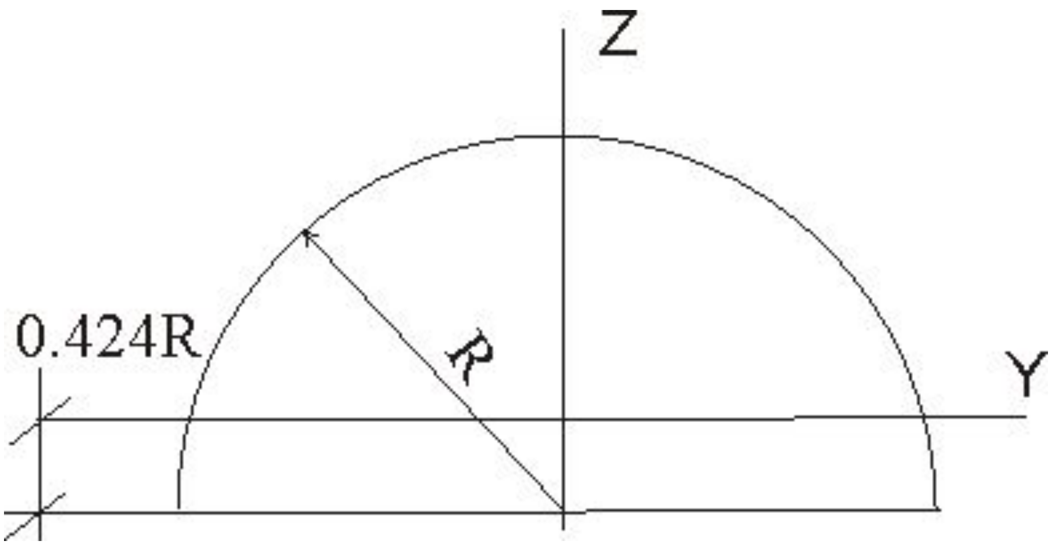
$$I_y = \frac{bh^3}{36}.$$

$$I_{zy} = -\frac{b^2h^2}{72}.$$



$$I_\rho = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

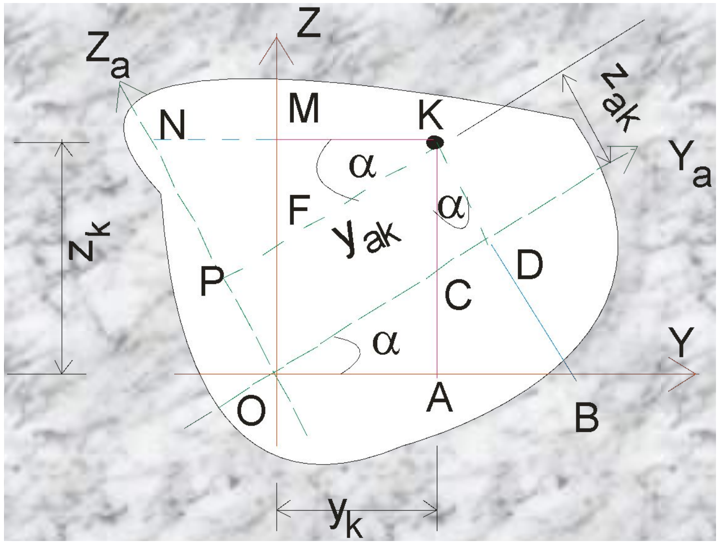
$$\mathrm{I_y} = I_z = \frac{\mathrm{I_\rho}}{2} = \frac{\pi \cdot \mathrm{r}^4}{4} = \frac{\pi \cdot \mathrm{D}^4}{64}.$$



$$I_z = \frac{\pi \cdot D^4}{128}$$

$$I_y = 0.00220\pi D^4$$

МИ относительно повёрнутых осей



$$y_{ak}=y_k\cdot\cos\alpha+z_k\cdot\sin\alpha$$

$$z_{ak}=z_k\cdot\cos\alpha-y_k\cdot\sin\alpha.$$

$$I_{za}=\int_{(A)} y_{ak}^{\,2}\,dA=\int_{(A)} (y_k\times\cos\alpha+z_k\times\sin\alpha)^2\,dA$$

$$I_{ya} = I_z\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{za} = I_y\cos^2\alpha + I_z\sin^2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{Z2} + I_{y2} = I_{z1} + I_{y1}$$

$$I_{max} + I_{min} = I_{z1} + I_{y1}$$

$$\frac{dI_{y_\alpha}}{d\alpha} = 0; \qquad \frac{dI_{z_\alpha}}{d\alpha} = 0.$$

ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ

$$I_{y0z0} = 0.$$

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

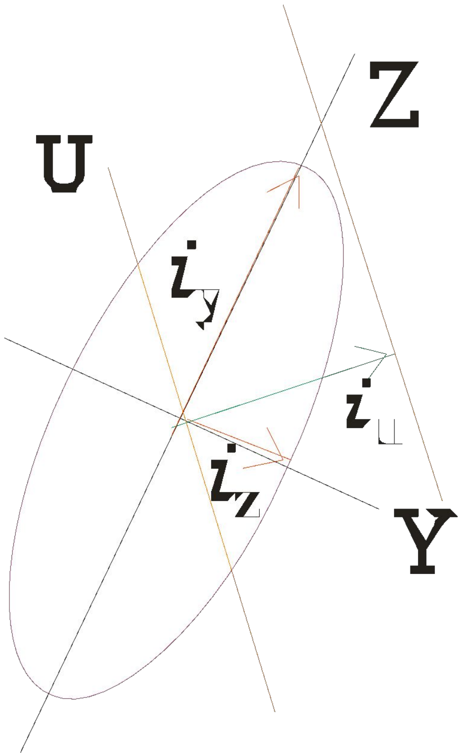
$$I_{y_0} = I_z\cos^2\alpha_0 + I_y\sin^2\alpha_0 + I_{yz}\sin 2\alpha_0$$

$$I_{z_0} = I_y\cos^2\alpha_0 + I_z\sin^2\alpha_0 - I_{yz}\sin 2\alpha_0$$

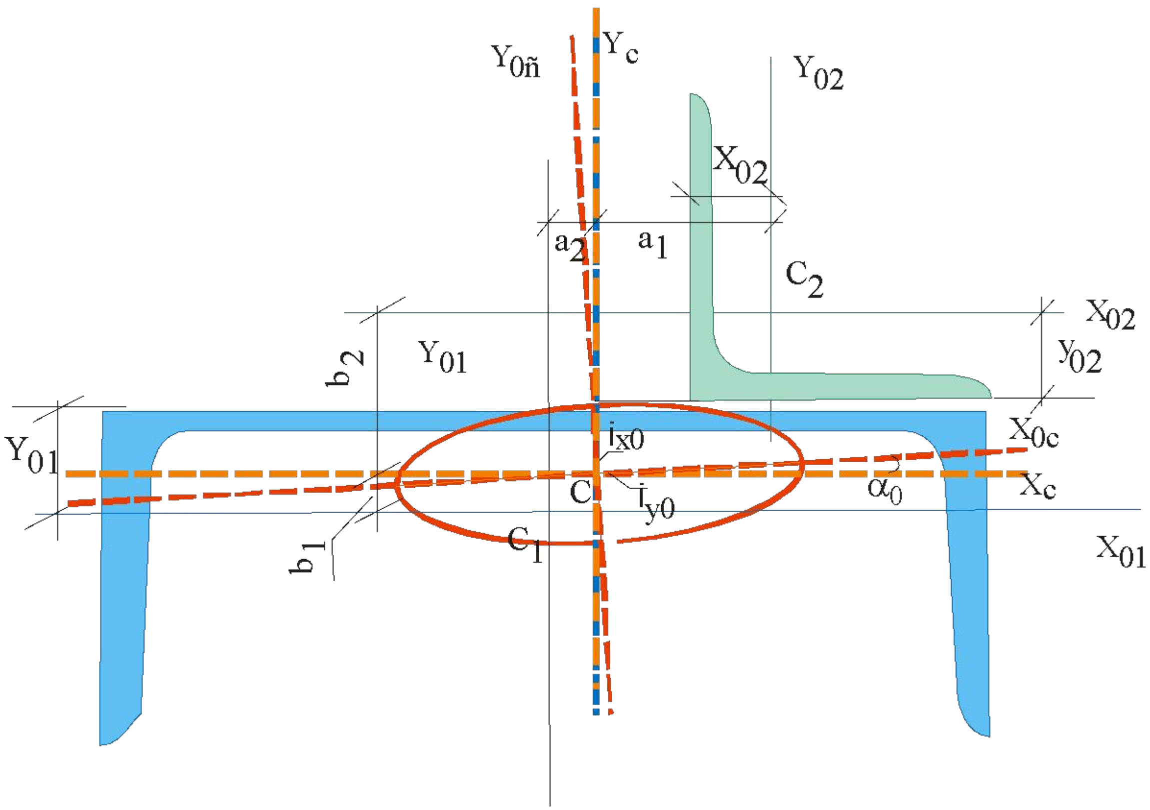
$I_{zy} > 0$ $\quad$ $I_{y_0} = I_{max};\ I_{z_0} = I_{min}$

$I_{zy} < 0$ $\quad$ $I_{z_0} = I_{max};\ I_{y_0} = I_{min}$

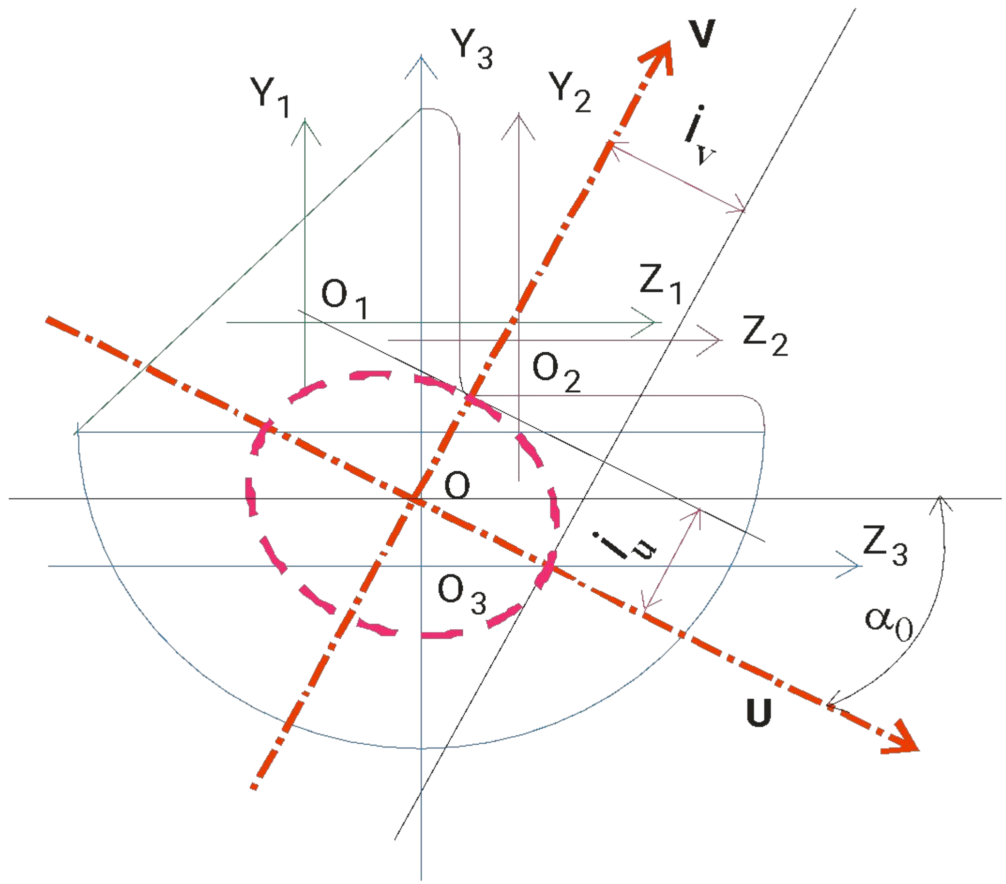
Радиусы инерции



$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$



$Y_{0ñ}$
Y_c
Y_{02}
X_{02}
a_2
a_1
C_2
X_{02}
b_2
Y_{01}
y_{02}
Y_{01}
i_{x0}
X_{0c}
α_0
X_c
C
i_{y0}
b_1
C_1
X_{01}


V
Y_3
Y_1
Y_2
i_v
Z_1
O_1
Z_2
O_2
O
i_u
Z_3
O_3
α_0
U