Вычислительная математика

Введение

«die ganze Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles anderes ist Menshenwerk»
(целые числа созданы богом, все остальное – творение человека)
Л. Кронекера (1823–1891)

Как зовут преподавателя?

Дударин Павел Владимирович, к.т.н. доцент каф. “Информационные системы”

Преподаватель – любитель
- Исследование операций и методы оптимизации
- Вычислительная математика
- Дискретная математика в биоинформатике
- Математические методы в научных исследования

Образование:
- Аспиртанура УлГТУ (математическое моделирование, численные методы и комплексы программ)
- Специалитет УлГУ (прикладная математика и информатика)

В обычной жизни:
- ИБС - технический директор продуктового направления (7 лет)
- Авиакомпания Волга-Днепр (10 лет)

Правила игры

1. Старосты – списки групп в гуглдоке или яндекс документах.

2. Два семестра, каждый по два цикла. В каждом семестре сначала лекции и семинары (решение задач в группах по 3-4 человека).

3. Потом лабораторные работы в классе (по 2-4 лабы в каждом семестре). Лабы будут по командам. Плюсы / минусы?

4. Самые активные на паре (лекции и семинары) получают 5, 8 или 10 баллов.

5. В первом семестре зачет. Допуск к зачету - все лабы вовремя. Зачет = репетиция экзамена на объеме семестра.

6. Во втором семестре экзамен. Автоматов не будет, но будут плюшки на экзамене:
    - Готовиться только к 2-м вопросам
    - Возможность отвечать на экзамене только на 1 вопрос по выбору из двух
    - Плюс 1 или 2 балла (можно прибавлять только к 3-ке и 4-ке)
    - Ваши предложения?

Вычислительная математика

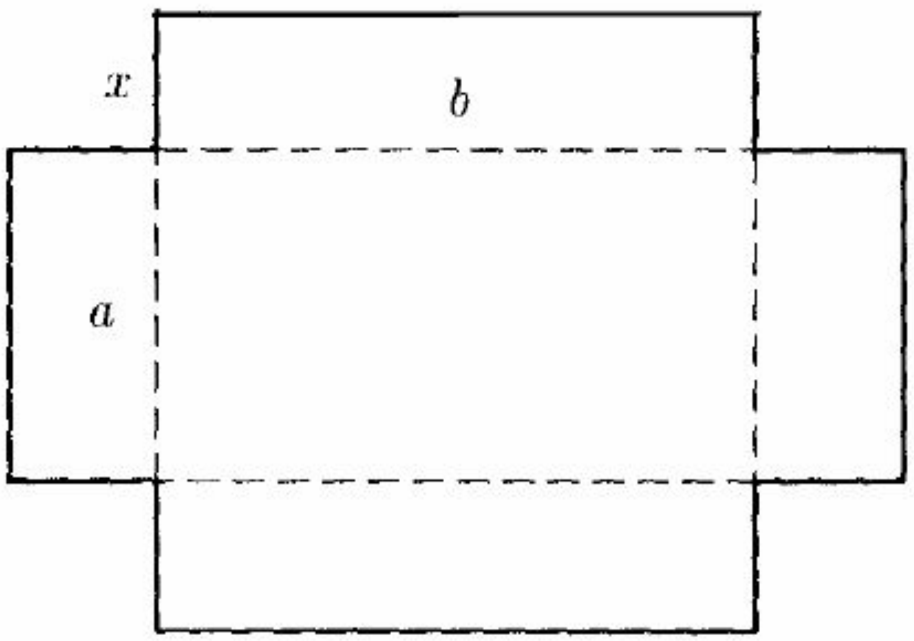
1. Численные методы / Численный анализ

2. Зачем, если мы уже и так умеем решать уравнения?
    1. Практика языка
    2. Гимнастика
    3. Меньше магии

Задача-разминка

1. Задача из области оптимального проектирования.
Пусть коробка изготовляется из прямоугольного листа материала размером $a \times b$, $a < b$. Для этого из четырех углов прямоугольника вырезаются квадраты со стороной x и материал сгибается вдоль линий, отмеченных на рисунке штриховыми линиями

Задача определить x при котором достигается максимальный объем получившейся коробки



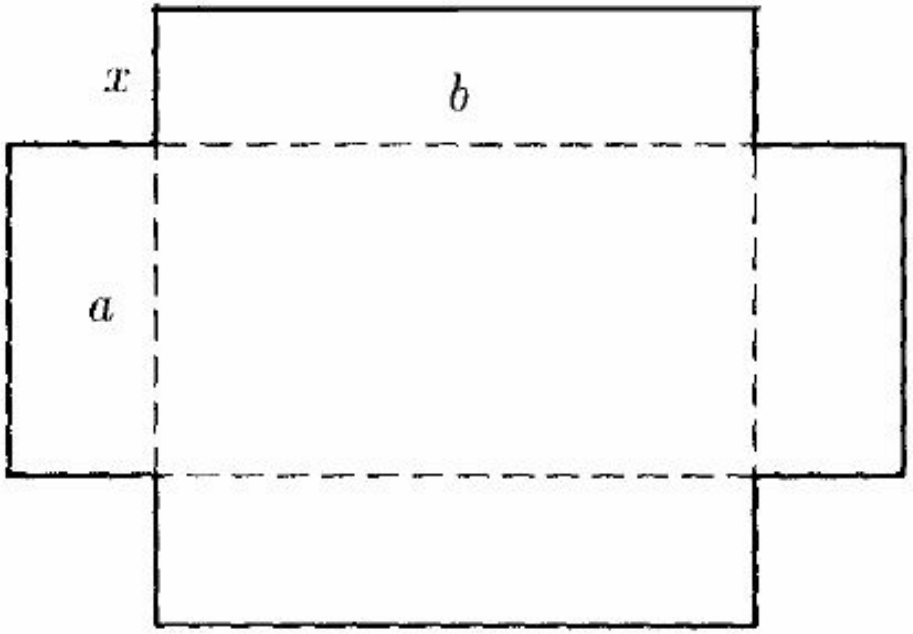
Задача-разминка

1. Задача из области оптимального проектирования.
Пусть коробка изготовляется из прямоугольного листа материала размером $a \times b$, $a < b$. Для этого из четырех углов прямоугольника вырезаются квадраты со стороной x и материал сгибается вдоль линий, отмеченных на рисунке штриховыми линиями

Задача определить x при котором достигается максимальный объем получившейся коробки

В результате получается коробка с основанием в виде прямоугольника размером $(a-2x)(b-2x)$ и высотой x. Здесь стратегия $x \in X = (0, a/2)$ может быть оценена целевой функцией $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ - объемом коробки. Максимум функции $V(x)$ на множестве X достигается в точке

$$x^* = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$



Основные темы вычислительной математики

1. Методы оценки погрешностей
2. Численные методы решения систем и уравнений
3. Аппроксимация и интерполяция таблично заданных функций
4. Численное интегрирование
5. Численные методы решения дифференциальных уравнений
6. Модели линейного программирования и его приложения
7. Модели нелинейного программирования

В предыдущих сериях...

Рассмотрим функцию $f(x) = \cos(x)$. Ее производная равна $f'(x) = -\sin(x)$, и ее первообразная функция — $F(x) = \sin(x) + C$. Эти формулы известны из анализа. Первая используется для определения тангенса угла наклона $m = f'(x_0)$ кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, а последняя — для вычисления площади под кривой для $a \le x \le b$.

Тангенс угла наклона в точке $(\pi/2; 0)$ равен $m = f'(\pi/2) = -1$ и может использоваться для нахождения касательной в этой точке (рис. 1.1(a)):

$$y_{\tan} = m\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -x + \frac{\pi}{2}.$$

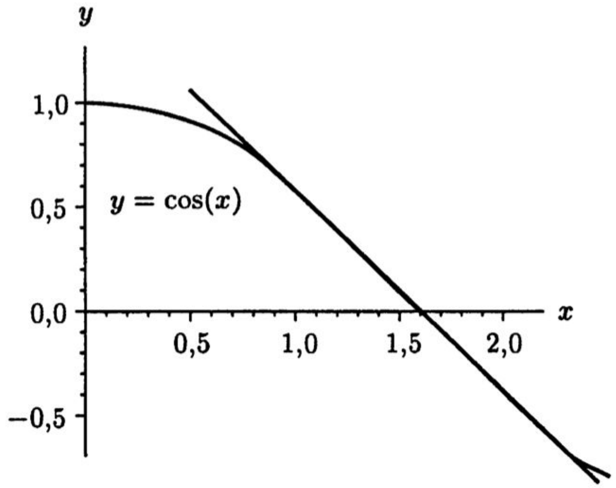


Рис. 1.1. (a). Касательная к кривой $y = \cos(x)$ в точке $(\pi/2, 0)$

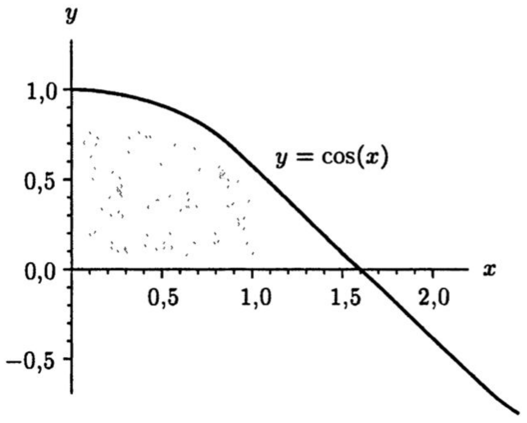


Рис. 1.1. (b). Площадь под кривой $y = \cos(x)$ на интервале $[0; \pi/2]$

Площадь под кривой для $0 \le x \le \pi/2$ вычисляется интегрированием (см. рис. 1.1(b)):

$$\text{площадь} = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = 1.$$

В предыдущих сериях... (Пределы)

Определение 1.1. Пусть $f(x)$ определена на множестве S действительных чисел. Тогда говорят, что функция f имеет ***предел*** в точке $x = x_0$, и он равен

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \tag{1}$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x \in S$, такого, что $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - L| < \varepsilon$. В обозначениях h-приращений равенство (1) имеет вид

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L. \tag{2}$$

▲

Определение 1.2. Предположим, что $f(x)$ определена на множестве S действительных чисел, и пусть $x_0 \in S$. Тогда f ***непрерывна в*** $\boldsymbol{x = x_0}$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3}$$

Говорят, что функция f непрерывна на S, если она непрерывна в каждой точке $x \in S$. Обозначим через $C^n(S)$ множество всех таких функций f, что f и ее первые n производных непрерывны на S. Когда S – интервал, допустим, $[a; b]$, используется обозначение $C^n[a; b]$. Например, рассмотрим функцию $f(x) = x^{4/3}$ на интервале $[-1; 1]$. Очевидно, что $f(x)$ и $f'(x) = (4/3)x^{1/3}$ непрерывны на $[-1; 1]$, в то время как $f''(x) = (4/9)x^{-2/3}$ не непрерывна в точке $x = 0$. ▲

В предыдущих сериях... (Последовательности)

Определение 1.3. Предположим, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечная последовательность. Тогда говорят, что последовательность имеет *предел* L,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L, \tag{4}$$

если для любого заданого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное целое число $N = N(\varepsilon)$, что $n > N$ влечет $|x_n - L| < \epsilon$. ▲

Когда последовательность имеет предел, то мы говорим, что она является ***сходящейся последовательностью***. Часто используют обозначение "$x_n \to L$ при $n \to \infty$." Равенство (4) эквивалентно

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - L) = 0. \tag{5}$$

Таким образом, можно рассматривать последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n - L\}_{n=1}^{\infty}$ как ***последовательность ошибок***. Следующая теорема связывает понятия сходимости последовательности и непрерывности.

Теорема 1.1. Предположим, что $f(x)$ определена на множестве S и $x_0 \in S$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(6)

(a) Функция f непрерывна в x_0.

(b) Если $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, то $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

В предыдущих сериях... (значения функции)

Теорема 1.2 (теорема о промежуточном значении[1]). Предположим, что $f \in C[a;b]$ и L — любое число между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда существует такое число c, $c \in (a;b)$, что $f(c) = L$.

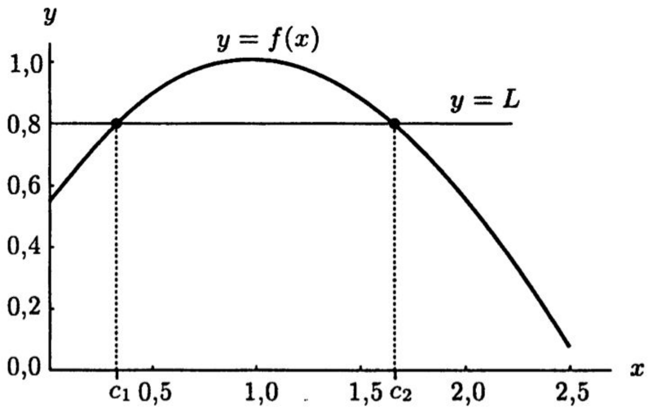


Рис. 1.2. Применение теоремы о промежуточном значении к функции $f(x) = \cos(x-1)$ на интервалах $[0;1]$ и $[1;2{,}5]$

Пример 1.1. Функция $f(x) = \cos(x-1)$ непрерывна на $[0;1]$, и константа $L = 0{,}8 \in (\cos(0); \cos(1))$. Решением уравнения $f(x) = 0{,}8$ на $[0;1]$ является $c_1 = 0{,}356499$. Аналогично $f(x)$ непрерывна на отрезке $[1;2{,}5]$ и $L = 0{,}8 \in (\cos(2{,}5); \cos(1))$. Решением $f(x) = 0{,}8$ на $[1;2{,}5]$ является $c_2 = 1{,}643502$. Оба эти случая показаны на рис. 1.2. ■

Теорема 1.3 (теорема о наибольшем (наименьшем) значении непрерывной функции[2]). Предположим, что $f \in C[a;b]$. Тогда существуют нижняя граница M_1, верхняя граница M_2 и такие два числа x_1, $x_2 \in [a;b]$, что

(7) $$M_1 = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = M_2 \quad \text{для любого } x \in [a;b].$$

Иногда эти утверждения записывают в виде

(8) $$M_1 = f(x_1) = \min_{a \le x \le b}\{f(x)\} \quad \text{и} \quad M_2 = f(x_2) = \max_{a \le x \le b}\{f(x)\}.$$

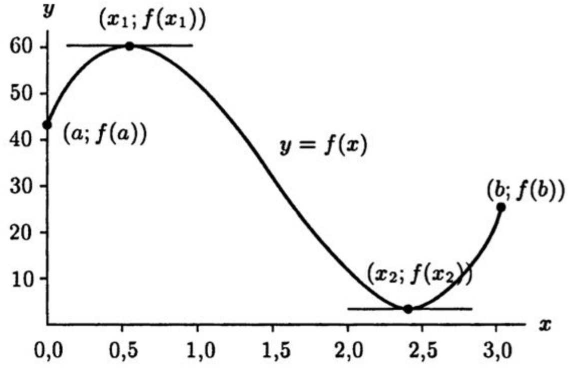


Рис. 1.3. Применение теоремы о наибольшем (наименьшем) значении к функции $f(x) = 35 + 59{,}5x - 66{,}5x^2 + 15x^3$ на интервале $[0;3]$

В предыдущих сериях… (Дифференцирование 1)

Определение 1.4. Пусть $f(x)$ определена на открытом интервале, содержащем x_0. Тогда говорят, что f дифференцируема в x_0, если существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{9}$$

Когда предел существует, он обозначается как $f'(x_0)$ и называется ***производной*** f в x_0. В терминах h-приращений его можно выразить следующим образом:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \tag{10}$$

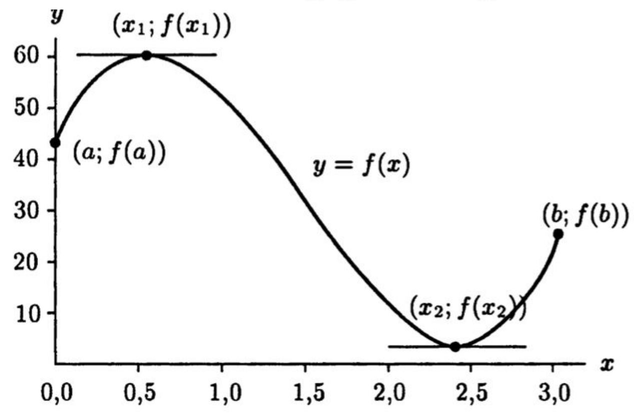


Рис. 1.3. Применение теоремы о наибольшем (наименьшем) значении к функции $f(x) = 35 + 59{,}5x - 66{,}5x^2 + 15x^3$ на интервале $[0; 3]$

О функции, которая имеет производную в каждой точке множества S, говорят, что она ***дифференцируема*** на S. Отметим, что число $m = f'(x_0)$ является тангенсом угла наклона касательной на графике функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$. ▲

Теорема 1.4. Если $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

Из теоремы 1.3 следует, что, если функция f дифференцируема на замкнутом интервале $[a; b]$, она принимает наибольшее (наименьшее) значение на концах интервала или в критических (стационарных — *Прим. ред.*) точках (решение $f'(x) = 0$) открытого интервала $(a; b)$.

Пример 1.2. Функция $f(x) = 15x^3 - 66{,}5x^2 + 59{,}5x + 35$ дифференцируема на интервале $[0; 3]$. Решениями уравнения $f'(x) = 45x^2 - 123x + 59{,}5 = 0$ являются $x_1 = 0{,}54955$ и $x_2 = 2{,}40601$. Максимальным и минимальным значениями f на $[0; 3]$ являются:

$$\min\{f(0); f(3); f(x_1); f(x_2)\} = \min\{35; 20; 50{,}10438; 2{,}11850\} = 2{,}11850$$

и

$$\max\{f(0); f(3); f(x_1); f(x_2)\} = \max\{35; 20; 50{,}10438; 2{,}11850\} = 50{,}10438. \quad ■$$

В предыдущих сериях... (Дифференцирование 2)

Теорема 1.5 (теорема Ролля). Предположим, что $f \in C[a;b]$ и что $f'(x)$ существует для всех $x \in (a;b)$. Если $f(a) = f(b) = 0$, существует такое число c, $c \in (a;b)$, что $f'(c) = 0$.

Теорема 1.6 (теорема о среднем значении[3]). Предположим, что $f \in C[a;b]$ и что $f'(x)$ существует для всех $x \in (a;b)$. Тогда существует такое число c, $c \in (a;b)$,

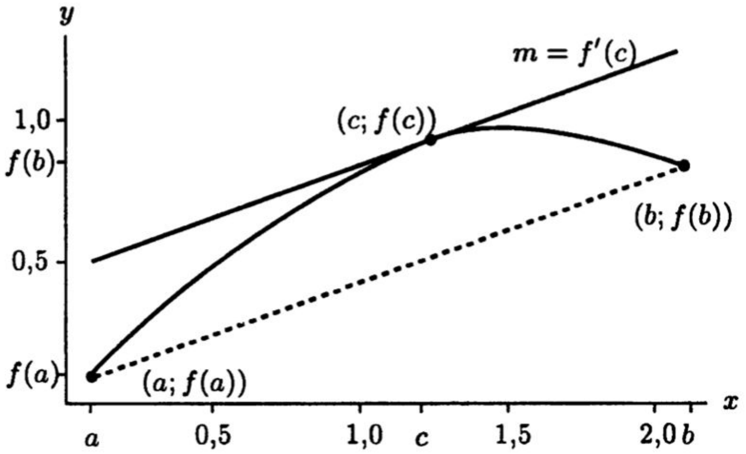


Рис. 1.4. Применение теоремы о среднем значении к $f(x) = \sin(x)$ на интервале $[0{,}1; 2{,}1]$

что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{11}$$

Геометрически это означает, что согласно теореме о среднем значении существует по крайней мере одно такое число $c \in (a;b)$, что тангенс угла наклона касательной графика $y = f(x)$ в точке $(c; f(c))$ равен тангенсу угла наклона секущей, проходящей через точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$.

Пример 1.3. Функция $f(x) = \sin(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[0{,}1; 2{,}1]$ и дифференцируема на открытом интервале $(0{,}1; 2{,}1)$. Таким образом, согласно теореме о среднем значении существует такое число c, что

$$f'(c) = \frac{f(2{,}1) - f(0{,}1)}{2{,}1 - 0{,}1} = \frac{0{,}863209 - 0{,}099833}{2{,}1 - 0{,}1} = 0{,}381688.$$

Решением уравнения $f'(c) = \cos(c) = 0{,}381688$ на интервале $(0{,}1; 2{,}1)$ является значение $c = 1{,}179174$. График $f(x)$, секущая $y = 0{,}381688x + 0{,}099833$ и касательная $y = 0{,}381688x + 0{,}474215$ показаны на рис. 1.4. ■

Теорема 1.7 (обобщенная теорема Ролля). Предположим, что $f \in C[a;b]$, что $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ существуют на $(a;b)$ и $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a;b]$. Если $f(x_j) = 0$ для $j = 0, 1, \ldots, n$, то существует такое число c, $c \in (a;b)$, что $f^{(n)}(c) = 0$.

В предыдущих сериях... (Интегралы 1)

Теорема 1.8 (первая фундаментальная теорема[4]). Если $f(x)$ непрерывна на интервале $[a;b]$ и F — любая первообразная функция от f на интервале $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x). \tag{12}$$

Теорема 1.9 (вторая фундаментальная теорема). Если $f(x)$ непрерывна на интервале $[a;b]$ и $x \in (a;b)$, то

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{13}$$

Пример 1.4. Функция $f(x) = \cos(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.9 на интервале $[0;\pi/2]$, поэтому согласно цепному правилу

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \cos(t)\,dt = \cos(x^2)(x^2)' = 2x\cos(x^2).$$ ■

Теорема 1.10 (теорема о среднем значении для интегралов). Предположим, что $f(x) \in C[a;b]$. Тогда существует такое число c, $c \in (a;b)$, что

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

Значение $f(c)$ называется *средним значением* f на интервале $[a;b]$.

Пример 1.5. Функция $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.10 на интервале $[0;2{,}5]$. Первообразной функцией от f является $F(x) = -\cos(x) - \frac{1}{9}\cos(3x)$. Среднее значение функции $f(x)$ на интервале $[0;2{,}5]$ равно

$$\frac{1}{2{,}5-0}\int_0^{2{,}5} f(x)\,dx = \frac{F(2{,}5)-F(0)}{2{,}5} = \frac{0{,}762629-(-1{,}111111)}{2{,}5} = \frac{1{,}873740}{2{,}5} = 0{,}749496.$$

Существуют три решения уравнения $f(c) = 0{,}749496$ на интервале $[0;2{,}5]$: $c_1 = 0{,}440566$, $c_2 = 1{,}268010$ и $c_3 = 1{,}873583$. Площадь прямоугольника с основанием $b-a = 2{,}5$ и высотой $f(c_j) = 0{,}749496$ равна $f(c_j)(b-a) = 1{,}873740$. Площадь прямоугольника имеет такое же численное значение, как интеграл от $f(x)$, вычисленный по интервалу $[0;2{,}5]$. Сравнение площади под кривой $y = f(x)$ и площади этого прямоугольника можно видеть на рис. 1.5. ■

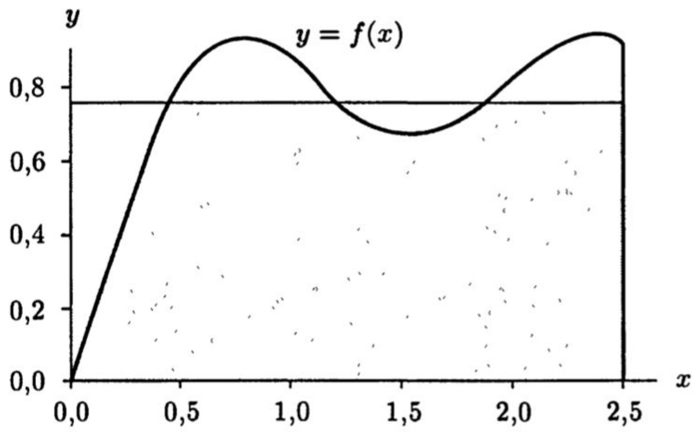


Рис. 1.5. Применение теоремы о среднем значении для интегралов к $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$ на интервале $[0;2{,}5]$

В предыдущих сериях... (Интегралы 2)

Теорема 1.11 (теорема о среднем значении взвешенного интеграла). Предположим, что $f, g \in C[a;b]$ и $g(x) \geq 0$ для $x \in [a;b]$. Тогда существует такое число c, $c \in (a;b)$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{14}$$

Пример 1.6. Функции $f(x) = \sin(x)$ и $g(x) = x^2$ удовлетворяют условиям теоремы 1.11 на интервале $[0;\pi/2]$. Тогда существует такое число c, что

$$\sin(c) = \frac{\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x)\,dx}{\int_0^{\pi/2} x^2\,dx} = \frac{1{,}14159}{1{,}29193} = 0{,}883631$$

или $c = \sin^{-1}(0{,}883631) = 1{,}08356$. ■

В предыдущих сериях... (Ряды)

Определение 1.5. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — бесконечный ряд. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ называется n-й *частичной суммой* ряда. Бесконечный ряд ***сходится*** тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к пределу S, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S. \tag{15}$$

Если ряд не сходится, то говорят, что он ***расходящийся***. ▲

Пример 1.7. Рассмотрим бесконечную последовательность

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Тогда n-я частичная сумма равна

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, ***сумма*** бесконечного ряда равна

$$S = \lim_{n\to\infty} Sn = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$ ■

В предыдущих сериях... (Ряд Тейлора)

Теорема 1.12 (теорема Тейлора). Предположим, что $f \in C^{n+1}[a,b]$, и пусть $x_0 \in [a;b]$. Тогда для каждого $x \in (a;b)$ существует такое число $c = c(x)$ (значение c зависит от значения x), лежащее между x_0 и x, что

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \tag{16}$$

где

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{17}$$

и

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{18}$$

Пример 1.8. Функция $f(x) = \sin(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.12. Полином Тейлора $P_n(x)$ степени $n = 9$, разложенный в точке $x_0 = 0$, получен путем вычисления следующих производных в точке $x = 0$ и подсчета численных значений в формуле (17).

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x), & f(0) &= 0,\\
f'(x) &= \cos(x), & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= -\sin(x), & f''(0) &= 0,\\
f^{(3)}(x) &= -\cos(x), & f^{(3)}(0) &= -1,\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(9)}(x) &= \cos(x), & f^{(9)}(0) &= 1,
\end{aligned}$$

$$P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.$$

Графики функции f и полинома P_9 на интервале $[0; 2\pi]$ показаны на рис. 1.6. ■

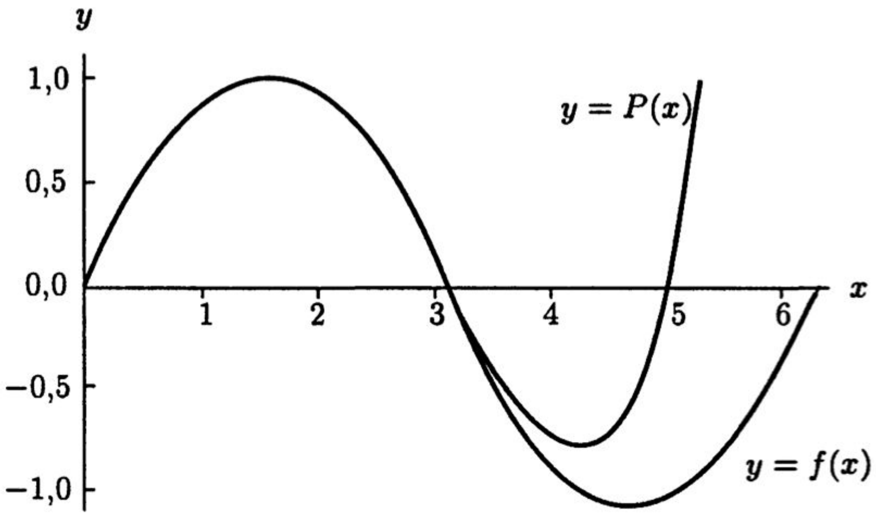


Рис. 1.6. Графики $f(x) = \sin(x)$ и полинома Тейлора $P(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9!$

Следствие 1.1. Если $P_n(x)$ — полином Тейлора степени n из теоремы 1.12, то

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{для } k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{19}$$

В предыдущих сериях... (вычисление полиномов)

Пусть полином $P(x)$ степени n имеет вид

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \tag{20}$$

Метод Горнера или ***искусственное разделение*** является методом вычисления полиномов. Он задуман как вложенное умножение. Например, полином пятой степени может быть записан в виде вложенных умножений

$$P_5(x) = ((((a_5 x + a_4)x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0.$$

Теорема 1.13 (метод Горнера вычисления полиномов). Предположим, что $P(x)$ — полином, заданный уравнением (20), и $x = c$ — число, для которого $P(c)$ нужно вычислить.

Присвоим $b_n = a_n$ и вычислим

$$b_k = a_k + cb_{k+1} \quad \text{для} \quad k = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1,\ 0; \tag{21}$$

тогда $b_0 = P(c)$. Кроме того, если

$$Q_0(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_3 x^2 + b_2 x + b_1, \tag{22}$$

то

$$P(x) = (x - c)Q_0(x) + R_0, \tag{23}$$

где частное $Q_0(x)$ является полиномом степени $n-1$ и $R_0 = b_0 = P(c)$ является остатком.

Доказательство. Подставляя правую часть равенства (22) вместо $Q_0(x)$ и b_0 вместо R_0 в (23), получим, что

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - c)(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_3 x^2 + b_2 x + b_1) + b_0 = \\ &= b_n x^n + (b_{n-1} - cb_n)x^{n-1} + \cdots + (b_2 - cb_3)x^2 + \\ &\quad + (b_1 - cb_2)x + (b_0 - cb_1). \end{aligned} \tag{24}$$

Числа b_k определяются сравнением коэффициентов при x^k равенств (20) и (24), как показано в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Коэффициенты b_k для метода Горнера

x^k	Сравнение (20) и (24)	Решение для b_k
x^n	$a_n = b_n$	$b_n = a_n$
x^{n-1}	$a_{n-1} = b_{n-1} - cb_n$	$b_{n-1} = a_{n-1} + cb_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x^k	$a_k = b_k - cb_{k+1}$	$b_k = a_k + cb_{k+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x^0	$a_0 = b_0 - cb_1$	$b_0 = a_0 + cb_1$

Значение $P(c) = b_0$ легко получить, заменив $x = c$ в равенстве (22) и использовав тот факт, что $R_0 = b_0$:

$$P(c) = (c - c)Q_0(c) + R_0 = b_0. \tag{25}$$

•

В предыдущих сериях... (метод Горнера)

Рекуррентную формулу для b_k, приведенную в (21), можно легко вычислить на компьютере. Простым алгоритмом является алгоритм

```
b(n) = a(n);
for k = n − 1: −1: 0
   b(k) = a(k) + c * b(k + 1);
end
```

Когда метод Горнера выполняется вручную, легче записать коэффициенты $P(x)$ в строку и вычислять $b_k = a_k + cb_{k+1}$ под a_k в столбце. Запись для этой процедуры проиллюстрирована в табл. 1.2.

Пример 1.9. Воспользуемся искусственным разделением (методом Горнера), чтобы найти $P(3)$ для полинома

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40.$$

Таблица 1.2. Таблица Горнера для процесса искусственного разделения

Вход	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
x		xb_n	xb_{n-1}	$\cdots$	xb_{k+1}	$\cdots$	xb_3	xb_2	xb_1
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_k	$\cdots$	b_2	b_1	$b_0 = P(x)$
									Выход

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
Вход	1	−6	8	8	4	−40
$x = 3$		3	−9	−3	15	57
	1	−3	−1	5	19	$17 = P(3) = b_0$
	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	Выход

Таким образом, $P(3) = 17$. ■

Практические задания по введению – команда 1

1. Используйте искусственное разделение (метод Горнера) для нахождения $P(c)$.

   $P(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x - 12,$ c = 3

2. Найдите полином Тейлора степени $n = 4$ в окрестности точки x_0 для следующих функций.

   $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 =$ 1

3. Найдите сумму последовательности или ряда.

   $$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

Практические задания по введению – команда 2

1. Используйте искусственное разделение (метод Горнера) для нахождения $P(c)$.

$$P(x) = 2x^7 + x^6 + x^5 - 2x^4 - x + 23, c = -1$$

2. Найдите полином Тейлора степени $n = 4$ в окрестности точки x_0 для следующих функций.

$$f(x) = x^5 + 4x^2 + 3x + 1, x_0 = 0$$

3. Найдите сумму последовательности или ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$$

Практические задания по введению – команда 3

1. Используйте искусственное разделение (метод Горнера) для нахождения $P(c)$.

$P(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x - 12,$ c = -5

2. Найдите полином Тейлора степени $n = 4$ в окрестности точки x_0 для следующих функций.

$f(x) = \cos(x), x_0 =$ 0

3. Найдите сумму последовательности или ряда.

$$\left\{\frac{2}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Практические задания по введению – команда 4

1. Используйте искусственное разделение (метод Горнера) для нахождения $P(c)$.

$$P(x) = 2x^7 + x^6 + x^5 - 2x^4 - x + 23, c = 3/2$$

2. Найдите полином Тейлора степени $n = 4$ в окрестности точки x_0 для следующих функций.

$f(x) = \sin(x) \quad x_0 = 0$

3. Найдите сумму последовательности или ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$$

Практические задания по введению – команда 5

1. Используйте искусственное разделение (метод Горнера) для нахождения $P(c)$.

   $P(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x - 12$,   с = 10

2. Найдите полином Тейлора степени $n = 4$ в окрестности точки x_0 для следующих функций.

   $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 =$ -1

3. Найдите числа c, используя теорему о среднем значении для интеграла, от следующих функций на указанном интервале.

   $f(x) = 6x^2$ на [-3;4]

Практические задания по введению – команда 6

1. Используйте искусственное разделение (метод Горнера) для нахождения $P(c)$.

   $P(x) = 2x^7 + x^6 + x^5 - 2x^4 - x + 23, c =$ - 2/3

2. Найдите полином Тейлора степени $n = 4$ в окрестности точки x_0 для следующих функций.

   $f(x) = x^5 + 4x^2 + 3x + 1, x_0 =$ -1

3. Найдите числа c, используя теорему о среднем значении для интеграла, от следующих функций на указанном интервале.

   $f(x) = x\cos(x)$ на $[0; 3\pi/2]$

Практические задания по введению – команда 7

1. Используйте искусственное разделение (метод Горнера) для нахождения $P(c)$.

   $P(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x - 12,$ c = -2

2. Найдите полином Тейлора степени $n = 4$ в окрестности точки x_0 для следующих функций.

   $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = \pi / 2$

3. Найдите числа c, используя теорему о среднем значении для интеграла, от следующих функций на указанном интервале.

   $f(x) = 6x^2$ на [-4;3]

Практические задания по введению – команда 8

1. Используйте искусственное разделение (метод Горнера) для нахождения $P(c)$.

   $P(x) = 2x^7 + x^6 + x^5 - 2x^4 - x + 23, c =$ 3/2

2. Найдите полином Тейлора степени $n = 4$ в окрестности точки x_0 для следующих функций.

   $f(x) = \sin(x) \quad x_0 =$ **π** / 2

3. Найдите числа c, используя теорему о среднем значении для интеграла, от следующих функций на указанном интервале.
   $f(x) = x\sin(x)$ на $[0; 3\pi/2]$