



# Поток событий

## Часть I

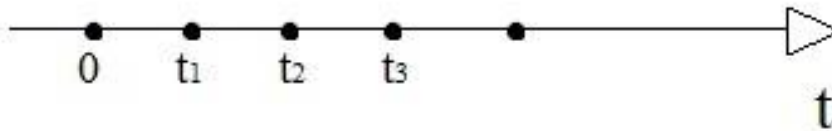
# Вводные определения

При изучении дискретных случайных процессов с непрерывным временем в экономической практике полезным оказывается рассмотрение так называемых "потоков событий".

Опр.1 Поток событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в какие-то, в общем случае, случайные моменты времени.

Опр.2 События в потоке называются однородными, если они различаются только по моментам их наступления, и неоднородными - в противном случае; другими словами, если различаемость событий в потоке помимо момента их наступления осуществляется ещё по каким-нибудь свойствам, то такие события являются неоднородными.

Далее будем рассматривать потоки однородных событий. Такие потоки удобно изображать на оси времени от последовательностью точек  $t_1, t_2, t_3, \dots$ , соответствующих моментам наступления событий.



F

Опр.3 Поток событий называется регулярным, если события в нём наступают последовательно через строго определённые промежутки времени.

Опр.4 Поток событий называется поток без последействия (или поток без памяти), если для любой пары непересекающихся промежутков времени число событий, наступающих за один из них, не зависит от числа событий, наступающих за другой.

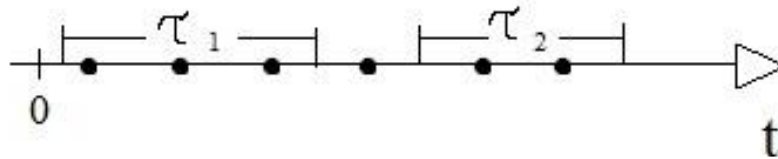


рис.

2

На рис.2  $\tau_1$  и  $\tau_2$  - длины временных непересекающихся промежутков. Отсутствие последействия показывает, что последовательные события в таком потоке наступает независимо друг от друга.

Регулярный поток свойством отсутствия последействия не обладает, поскольку после действия в нём порождается его регулярностью.

Опр.5 Поток событий называется ординарным, если вероятностью наступления за элементарный (малый) промежуток времени более одного события можно пренебречь по сравнению с вероятностью наступления за этот промежуток не более одного события.

Ординарность потока означает, что события в нём за достаточно малый промежуток времени либо не наступают, либо наступают по одному, а не по несколько.

Опр.6 Поток событий называется стационарным, если вероятность того или иного числа событий за какой-либо промежуток времени зависит только от длины этого промежутка и не зависит от момента его начала.

Стационарность потока означает, что его вероятностные характеристики не зависят от времени.

Опр.7 Поток событий, обладающий свойствами отсутствия последствия и ординарности, называется пуассоновским.

Опр.8 Стационарный пуассоновский поток называется простейшим.

Простейший поток является самым простым с точки зрения его математического описания. Регулярный поток с кажущимся простым физическим описанием простейшим не является, так как обладает последствием.

Опр.9 Среднее число событий потока наступающих за единицу времени, называется интенсивностью или средней плотностью потока.

Интенсивность потока  $\Pi$  будем обозначать  $in\Pi$ .

Интенсивность простейшего потока (в силу его стационарности) не меняется с течением времени:

$$in\Pi = \lambda = \text{const.}$$

Интенсивность нестационарного пуассоновского потока зависит от времени  $t$ :  $in\Pi = \lambda(t)$ .

Опр.10 Несколько потоков называются сравнимыми по интенсивности, если интенсивность любого из них не превосходит суммы интенсивностей остальных.

Полезная роль простейшего потока состоит в том, что суммарный поток, образуемый взаимным наложением достаточно большого числа сравнимых по интенсивности потоков, каждый из которых обладает свойством стационарности, ординарности и последствием, можно приближенно считать простейшем, и тем точнее, чем больше число слагаемых потоков.

# Простейший поток

Рассмотрим простейший (т.е. стационарный пуассоновский) поток с интенсивностью  $\lambda = \text{const}$ .  
Одной из важных характеристик потока является дискретная случайная величина  $X(t)$  представляющая собой число событий, наступающих за промежуток времени  $t$ . Т.о. случайная величина  $X(t)$  может принимать значения  $p_m(t)$   $m=1,2,\dots$ . Пусть  $p_m(t)$  -вероятность того, что за промежуток времени  $t$  в потоке наступят точно  $m$  событий.



Теорема I. В простейшем потоке с интенсивностью  $\lambda$  случайное число событий  $X(\tau)$ , наступающих за промежуток времени  $\tau$ , распределено по закону Пуассона.

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (1)$$

Его математическое ожидание (т.е. среднее число событий, наступающих в потоке за промежуток времени  $\tau$ )  $\overline{X(\tau)} = M[X(\tau)]$  и дисперсия  $D[X(\tau)]$  равны  $\lambda\tau$ :

$$M[X(\tau)] = D[X(\tau)] = \lambda\tau, \quad (2)$$

а среднее квадратическое отклонение:  $\sigma[X(\tau)] = \sqrt{\lambda\tau}. \quad (3)$

Следствие I. Для простейшего потока с интенсивностью  $\lambda$  имеют место следующие утверждения:

1) Вероятность того, что за промежуток времени  $\tau$  не наступит ни одного события ( $X(\tau)=0$ , т.е. участок  $\tau$  окажется свободным)

$$2) P(X(\tau) = 0) = P(X(\tau) = 0) = e^{-\lambda\tau}; \quad (4)$$

3) Вероятность того, что за промежуток времени  $\tau$  не наступит менее  $k$  ( $k=1,2,3,\dots$ ) событий ( $X(\tau)<k$ )

$$4) P(X(\tau)<k) = P(X(\tau)<k) = e^{-\lambda\tau} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!}, \quad (k=1,2,3,\dots); \quad (5)$$

5) Вероятность того, что за промежуток времени  $\tau$  наступит не менее  $k$  ( $k=1,2,3,\dots$ ) событий ( $X(\tau)\geq k$ )

$$6) P(X(\tau)\geq k) = P(X(\tau)\geq k) = 1 - e^{-\lambda\tau} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!}, \quad (k=1,2,3,\dots); \quad (6)$$

7) Вероятность того, что за интервал времени наступит хотя бы одно событие, ( $X(\tau)\geq 1$ ) т.е. временной участок  $\tau$  окажется занятым

$$8) P(X(\tau)\geq 1) = P(X(\tau)\geq 1) = 1 - e^{-\lambda\tau}; \quad (7)$$

9) Интенсивность потока  $\lambda$  равна математическому ожиданию  $M[X(1)]$  случайной величины  $X(1)$ .

Опр. II Элементом вероятности появления события в простейшем потоке называется вероятность  $(\Delta t)$  появления события за элементарный (достаточно малый) промежуток времени  $\Delta t$ .

Утв. I Для элемента вероятности появления события справедлива следующая приближенная формула:

$$p_i(\Delta t) \approx \lambda \cdot \Delta t, (\Delta t \rightarrow 0) \quad (8)$$

Для лучшей обозримости полученные формулы, характеризующие случайную величину  $X(t)$ , сведем в таблицу.

### Характеристики случайной величины $X(\tau)$

N n/n	Характеристики	Формулы	N ф-лы в тексте
1.	Интенсивность простейшего потока	$\lambda$	
2.	Закон распределения случайной величины	$p_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau},$ ( $m=0,1,2,\dots$ )	(1)
3.	Вероятность того, что за промежуток времени $\tau$ не наступит ни одного события	$P(X(\tau) = 0) = e^{-\lambda\tau}$	(4)
4.	Вероятность того, что за промежуток времени $\tau$ не наступит менее $k$ ( $k=1,2,3,\dots$ ) событий	$P(X(\tau) < k) = e^{-\lambda\tau} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!},$ ( $k=1,2,3,\dots$ )	(5)
5.	Вероятность того, что за промежуток времени $\tau$ наступит не менее $k$ ( $k=1,2,3,\dots$ ) событий	$P(X(\tau) \geq k) = 1 -$ $e^{-\lambda\tau} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!},$ ( $k=1,2,3,\dots$ )	(6)
6.	Вероятность того, что за интервал времени наступит хотя бы одно событие	$P(X(\tau) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda\tau}$	(7)
7.	Элемент вероятности появления события	$p_i(\Delta t) \approx \lambda \cdot \Delta t, (\Delta t \rightarrow 0)$	(8)
8.	Математическое ожидание случайной величины $X(\tau)$	$M[X(\tau)] = \lambda\tau$	(2)
9.	Дисперсия случайной величины $X(\tau)$	$D[X(\tau)] = \lambda\tau$	(2)
10.	Среднее квадратическое отклонение случайной величины $X(\tau)$	$\sigma[X(\tau)] = \sqrt{\lambda\tau}$	(3)

Теорема 2. В простейшем потоке с интенсивностью  $\lambda$  для случайной величины  $T$ :

1) интегральная функция распределения  $F(t) = P(T < t)$ , ( $t \geq 0$ ), т.е. вероятность  $P(T < t)$  события « $T < t$ » состоящего в том, что промежуток времени  $T$  между двумя любыми соседними событиями будет меньше  $t$ , равна  $1 - e^{-\lambda t}$ , т.е.  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ , ( $t \geq 0$ ); (9)

2) дифференциальная функция распределения (или плотность распределения)

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, (t \geq 0); \quad (10)$$

3) математическое ожидание (средний интервал времени между двумя соседними событиями)

$$\bar{T} = M[T] = \lambda^{-1}; \quad (11)$$

4) дисперсия

$$D[T] = \lambda^{-2}; \quad (12)$$

5) среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[T] = \lambda^{-1}. \quad (13)$$

Следствие 2. Вероятность  $P(T \geq t)$  того, что промежуток времени  $T$  между двумя любыми соседними событиями в простейшем потоке будет не

меньше  $t$ .

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda t}, (t \geq 0). \quad (14)$$

Опр.12 Закон распределение с плотностью, задаваемой формулой (10), называется показательным (экспоненциальным), а величина  $\lambda$  называется параметром этого закона.

Рассмотрим графики интегральной и дифференциальной функции распределения случайной величины  $T$ .

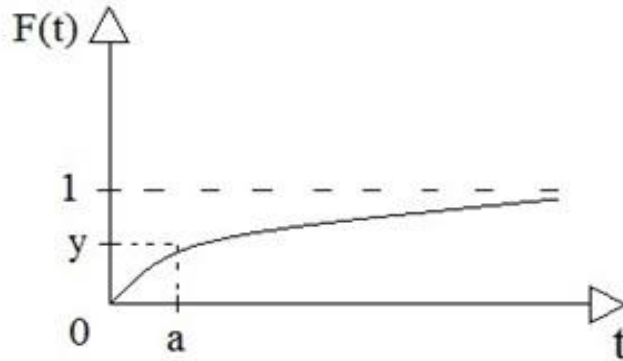


Рис.1

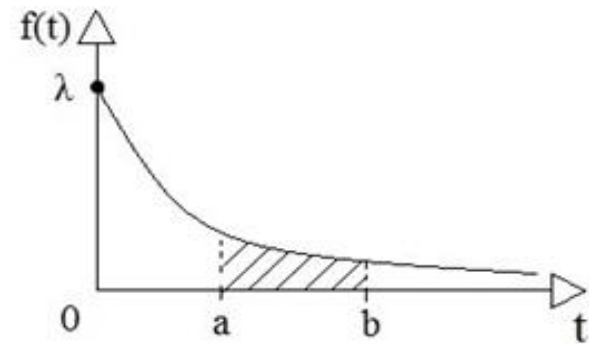


Рис.2

На рис.1 величина вероятности того, что значение промежутка времени  $T$  между двумя соседними событиями в потоке окажется в интервале  $(0, a)$  равна  $y$ . На рис.2 величина вероятности того, что значение промежутка времени  $T$  между двумя соседними событиями в потоке окажется в интервале  $(a, b)$ , равна площади криволинейной трапеции  $aABb$ .



Замечание. Пусть  $v$  - случайная величина, представляющая собой промежуток времени от некоторого произвольного момента времени  $t$ , никак не связанного с моментами появления событий в потоке, до момента первого наступившего после  $t$  события потока. Показательное распределение случайной величины  $T$  эквивалентно совпадению законов распределения случайных величин  $T$  и  $V$ .



## Характеристики случайной величины T

N n/n	Характеристики	Формулы	N ф-лы в тексте
1.	Интенсивность простейшего потока	$\lambda$	
2.	Интегральная функция распределения случайной величины T	$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$ ( $t \geq 0$ )	(9)
3.	Вероятность того, что промежуток времени T между двумя соседними событиями в потоке будет не меньше t	$P(T \geq t) = e^{-\lambda t},$ ( $t \geq 0$ )	(14)
4.	Дифференциальная функция распределения случайной величины T (т.е. плотность распределения) – показательный закон распределения с параметром $\lambda$	$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t},$ ( $t \geq 0$ )	(10)
5.	Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины T	$\bar{T} = M[T] = \lambda^{-1}$	(11)
6.	Дисперсия случайной величины T	$D[T] = \lambda^{-2}$	(12)
7.	Среднее квадратическое случайной величины T	$\sigma[T] = \lambda^{-1}$	(13)

Задача 1. Для анализа изменения с течением времени размера текущего фонда компаний, ведущей дела по страхованию автомобилей, важно обладать информацией о поступающих в компанию требований по выплатам в соответствии со страховыми полисами.

Наблюдение за работой компаний в предшествующий период показало, что число поступающих в компанию требований по выплатам за любой промежуток времени длиной  $t$  не зависит от момента времени, с которого начинается отсчёт промежутка  $t$ , а зависит только от его продолжительности, требования в компанию в любые два непересекающиеся интервала времени поступают независимо; в достаточно малые промежутки времени в компанию поступают по одному требованию. Ожидаемое число требований, поступаемых в компанию за неделю, равно 2.

Какова вероятность того, что:

1. За месяц в компанию поступит 7 требований?
2. За месяц в компанию поступит менее 7 требований?
3. За месяц в компанию поступит не менее 7 требований?
4. За неделю в компанию не поступит ни одного требования?
5. За две недели в компанию поступит хотя бы одно требование?
6. Интервал времени между двумя соседними требованиями будет меньше двух дней?
7. Интервал времени между двумя соседними требованиями будет не менее двух дней?

## Решение.

$\Pi$  - поток требований по выплатам поступающим в компанию.

По условию задачи, число поступающих в компанию требований по выплатам за любой промежуток времени  $t$  не зависит от начала и этого промежутка, а зависит лишь от его длины. Поэтому поток  $\Pi$  будет стационарным.

Так как требования за любые два непересекающиеся интервалы времени поступают в компанию независимо, то поток  $\Pi$  обладает свойством отсутствия последствия.

Так как в достаточно малые промежутки времени в компанию поступает по одному требованию, то поток  $\Pi$  ординарен.

Т.о., поток  $\Pi$  является стационарным пуассоновским простейшим потоком. За единицу времени примем 1 неделю.

По условию примера интенсивность потока  $\Pi$ :  $\lambda = \text{in}\Pi = 2$  требованиям в неделю.

Пусть  $X(t)$  - число требований по выплатам, поступающих в компанию за промежуток  $t$  (недель), и  $T$  - промежуток времени между любыми двумя соседними требованиями по выплатам.

1) 1 месяц = 4 недели

$$\tau = 4 \text{ недели}, m = 7, \lambda = 2$$

Вероятность  $p_7(4)$  поступлений в компания в компанию за месяц семи требований по выплатам вычисляем по формуле (1):

$$p_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} \Rightarrow$$

$$p_7(4) = \frac{(2*4)^7}{7!} e^{-2*4} \approx 0,143$$

2) Вероятность  $P(X(4) < 7)$  поступления в компанию менее семи требований по выплатам за месяц вычисляем по формуле (5):

$$P(X(\tau) < k) = e^{-\lambda\tau} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} \Rightarrow$$

$$P(X(4) < 7) = e^{-2*4} \sum_{m=0}^6 \frac{(2*4)^m}{m!} \approx 0,321$$



3) Вероятность  $P(X(4) \geq 7)$  поступления в компанию не менее семи требований по выплатам за месяц вычисляем по формуле (6):

$$P(X(\tau) \geq k) = 1 - e^{-\lambda\tau} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} \Rightarrow$$

$$P(X(4) \geq 7) = 1 - e^{-2*4} \sum_{m=0}^6 \frac{(2*4)^m}{m!} \approx 0,679$$

4) В четвертом вопросе  $\tau = 1$  неделя. Вероятность  $p_0(1)$  того, что за неделю в компанию не поступит ни одного требования по выплатам вычисляем по формуле (4):

$$p_0(\tau) = P(X(\tau) = 0) = e^{-\lambda\tau} \Rightarrow$$

$$p_0(1) = e^{-2*1} \approx 0,135$$

5) В пятом вопросе  $\tau = 2$  недели. Вероятность  $P(X(\tau) \geq 1)$  поступления в компанию за две недели хотя бы одного требования по выплатам вычисляем по формуле (7):

$$P(X(\tau) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda\tau} \Rightarrow$$

$$P(X(2) \geq 1) = 1 - e^{-2*2} \approx 0,981$$

6) Вероятность  $P(T < \frac{2}{7})$  того, что интервал времени  $T$  между двумя соседними требованиями будет меньше двух дней вычисляем по формуле (9):

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, (t \geq 0) \Rightarrow$$

$$P(T < \frac{2}{7}) = F(\frac{2}{7}) = 1 - e^{-2 * \frac{2}{7}} \approx 0,435$$

7) Вероятность  $P(T \geq \frac{2}{7})$  того, что интервал времени  $T$  между двумя соседними требованиями будет не меньше двух дней вычисляем по формуле (14):

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda t}, (t \geq 0) \Rightarrow$$

$$P(T \geq \frac{2}{7}) = e^{-2 * \frac{2}{7}} \approx 0,565$$