

§4 Падпросторы лінейнай прасторы

Нагадаем некаторыя факты з першага параграфа.

Азн. 1. Падмноства $U \subset V$ называецца падпросторай лінейнай прасторы V над P , калі U - лінейная прастора ў дачыненні да аперацыяў, вызначаных у V .

- **Тэарэма 1.** Падмноства $U \subset V$ з'яўляецца падпросторай лінейнай прасторы V над P тады і толькі тады, калі : 1) $\forall a, b \in U, a + b \in U$; 2) $\forall a \in U, \forall \alpha \in P, \alpha a \in U$.
- **Доказ. Неабходнасць.** Так як U падпростора V , то па азначэнню яна ёсць лінейная прастора. Значыць, мноства U замкнёна адносна аперацый складання і множання на элемент поля.
- **Дастатковасць.** Так як U замкнёна адносна аперацый складання і множання на элемент поля, то гэтыя аперацыі вызначаны на U . Аперацыі здавальняюць аксіёмам лінейнай прасторы, так як гэтыя аксіёмы дзейсны для адвольных элементаў з V , а, значыць, і для элементаў з U .

- **Вынік.** $U \subset V$ - падпрастора лінейнай прасторы V тады і толькі тады, калі
 - $\forall a, b \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}: \alpha a + \beta b \in U$.
 - Доказ прыведзены ў першым параграфі.
 - *У §1 прыводзіліся прыклады падпрастораў для лінейных прастораў, вызначаных на канкрэтных мноствах. Разгледзім зараз падпрасторы, якія нараджаюцца лінейнай прасторай у агульным выпадку.*
 - 1. $\bar{0}$ - прастора. Разгледзім падмноства адвольнай лінейнай прасторы V , якое складаецца толькі з нулявога вектару : $\bar{0} = \{\bar{0}, \bar{0} \in V\}$. Па **Выніку** маем: $\alpha \bar{0} + \beta \bar{0} \in \bar{0}$. Значыць, $\bar{0}$ – падпрастора V , якую называюць нулявой.
 - 2. Відавочна, што саму прастору V можна лічыць сваёй падпрасторай $V \subset V$.

- 3. Разгледзім агульны падыход да пабудовы падпрастораў дадзенай лінейнай прасторы. Няхай выбрана адвольная сістэма вектараў з V :

$$a_1, a_2, \dots, a_k \in V. \quad (1)$$

Так як сума лінейных камбінацый вектараў сістэмы (1) і здабытак лінейнай камбінацыі на элемент поля зноў з яўляецца лінейнай камбінацыяй вектараў сістэмы (1), то лінейная абалонка (гл. §1) сістэмы (1) ёсць лінейная падпрастора V :

$$L(a_1, a_2, \dots, a_k) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k \mid a_i \in V, \alpha_i \in P, i = 1, 2, \dots, k, k \in N\}.$$

- **Заўвага.** Відавочна, што базіс лінейнай абалонкі вектараў складаецца з максімальнай колькасці л.н.з. вектараў сістэмы (1) .

§5 Сума і перасячэнне падпрастораў

- Разгледзім падпрасторы U_1, U_2, \dots, U_k (1) лінейнай прасторы V .

- Азн.1. Перасячэннем падпрастораў (1) называецца мноства ўсіх вектараў, якія належаць кожнай з гэтых прастораў.

- Абазначэнне:
$$\bigcap_{i=1}^k U_i = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k.$$

- Азн.2. Сумай падпрастораў (1) называецца мноства ўсіх вектараў $a \in V$, якія задаюцца ў выглядзе:

- $$a = a_1 + a_2 + \dots + a_k, \text{ дзе } a_i \in U_i, i = 1, 2, \dots, k.$$

- Абазначэнне:
$$\sum_{i=1}^k U_i = U_1 + U_2 + \dots + U_k.$$

- Сцв.1. Сума і перасячэнне падпрастораў лінейнай прасторы ёсць яе падпрасторы.

- Доказ.

-

- Тэарэма 1. Вымернасць сумы двух канцоўных падпрастораў л.п. роўна суме іх вымернасцяў мінус вымернасць перасячэння.

- Доказ. Калі U_1, U_2 ненулявыя канцоўнавымерныя падпрасторы V , то патрабуе доказу наступная роўнасць:

- $$\dim (U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim (U_1 \cap U_2)$$

.....

- Азн. 3. Няхай $S = U_1 + U_2 + \dots + U_k$ - сума ненулявых падпрастораў л.п. V . Тады сума S называецца прамой, калі кожны вектар $a \in S$ толькі адзіным чынам можа быць зададзены ў выглядзе

- $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, дзе $a_i \in U_i, i = 1, 2, \dots, k$.

- Па – іншаму, S – прамая сума, калі з кожнай роўнасці віду

- $u_1 + u_2 + \dots + u_k = v_1 + v_2 + \dots + v_k$, дзе $u_i, v_i \in U_i$, вынікае роўнасць

- $u_i = v_i, i = 1, 2, \dots, k$.

- Абзначэнне: $S = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k.$ (2)

- Хай S – прямая сума (2). Тады па азначэнню з умовы
- $u_1 + u_2 + \dots + u_k = \bar{0}$, $u_i \in U_i$ (3) вынікае роўнасць $u_i = \bar{0}$, (4) для ўсіх $i = 1, 2, \dots, k$.
- Апошняя ўмова з яўляецца неабходнай і дастатковай для таго, каб сума была прамая.
- Сапраўды, хай $u_1 + u_2 + \dots + u_k = v_1 + v_2 + \dots + v_k$, дзе $u_i, v_i \in U_i$.
- Тады
- $(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots + (u_k - v_k) = \bar{0}$ і $u_i - v_i = \bar{0}$, $u_i = v_i$.
- Сцв.2. Вымернасць прамой сумы падпростораў роўна суме іх вымернасцяў:
- $$\dim (U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k) = \dim U_1 \oplus \dim U_2 \oplus \dots \oplus \dim U_k.$$