§4 Падпрасторы лінейнай прасторы

Нагадаем некаторыя факты з першага параграфа.

Азн.1. Падмноства **U** ⊂ **V** называецца падпрасторай лінейнай прасторы **V** над **P**, калі **U** - лінейная прастора ў дачыненні да аперацыяў, вызначаных у **V**.

- **Тэарэма 1.** Падмноства $U \subset V$ з'яўляецца падпрасторай лінейнай прасторы V над P тады і толькі тады, калі : 1) $\forall a, b \in U$, $a + b \in U$; 2) $\forall a \in U, \forall \alpha \in P, \alpha a \in U$.

- **Доказ. Неабходнасць.** Так як U падпрастора V,то па азначэнню яна ёсць лінейная прастора. Значыць, мноства U **замкнёна** адносна аперацый складання і множання на элемент поля.

- **Дастатковасць.** Так як U замкнёна адносна аперацый складання і множання на элемент поля, то гэтыя аперацыі **вызначаны на U**. Аперацыі здавальняюць аксіёмам лінейнай прасторы, так як гэтыя аксіёмы дзейсны для адвольных элементаў з V, а, значыць, і для элементаў з U.

- **Вынік.** $U \subset V$ - падпрастора лінейнай прасторы V тады і толькі тады, калі
- $\forall a,b \in U, \forall \alpha,\beta \in P: \alpha a+ \beta b \in U$.
- Доказ прыведзены ў першым параграфе.
- *У §1 прыводзіліся прыклады падпрастораў для лінейных прастораў, вызначаных на канкрэтных мноствах. Разгледзім зараз падпрасторы, якія нараджаюцца лінейнай прасторай у агульным выпадку.*
- **1. $\bar{O}$ - прастора.** Разгледзім падмноства адвольнай лінейнай прасторы V, якое складаецца толькі з нулявога вектару : $\bar{O} = \{\bar{o}, \bar{o} \in V\}$. Па **Выніку** маем: $\alpha\bar{o} + \beta\bar{o} \in \bar{O}$. Значыць, $\bar{O}$ – падпрастора V , якую **называюць нулявой**.
- **2.** Відавочна, што саму прастору V можна лічыць сваёй падпрасторай $V \subset V$.

- **3.** Разгледзім агульны падыход да пабудовы падпрастораў дадзенай лінейнай прасторы. Няхай выбрана адвольная сістэма вектараў з V :

$a_1, a_2, \ldots, a_к \in V.$ (1)

Так як сума лінейных камбінацый вектараў сістэмы (1) і здабытак лінейнай камбінацыі на элемент поля зноў з яўляецца лінейнай камбінацыяй вектараў сістэмы (1), то лінейная абалонка (гл. **§1**) сістэмы (1) ёсць лінейная падпрастора V:

$$L(a_1, a_2, \ldots, a_к) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_к a_к \mid a_i \in V, \alpha_i \in P, i = 1, 2, \ldots, к, к \in N\}.$$

- **Заўвага.** Відавочна, што базіс лінейнай абалонкі вектараў складаецца з максімальнай колькасці л.н.з. вектараў сістэмы (1) .

§5 Сума і перасячэнне падпрастораў

- Разгледзім падпрасторы $\boldsymbol{U_1},\boldsymbol{U_2},\ldots,\boldsymbol{U_k}$ (1) лінейнай прасторы V.

- **Азн.1. Перасячэннем** падпрастораў (1) называецца мноства ўсіх вектараў, якія належаць кожнай з гэтых прастораў.
- Абазначэнне: $\bigcap_{i=1}^{k} \boldsymbol{U_i} = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k.$

- **Азн. 2. Сумай** падпрастораў (1) называецца мноства ўсіх вектараў a є V, якія задаюцца ў выглядзе:
- $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_к$, дзе a_i є $\boldsymbol{U_i}$, $i = 1,2,\ldots,k.$
- Абазначэнне: $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{U_i} = U_1 + U_2 + \ldots + U_k.$

- Сцв.1. Сума і перасячэнне падпрастораў лінейнай прасторы ёсць яе падпрасторы.
- Доказ.
- ……………………………………………………………………………

- **Тэарэма 1**. Вымернасць сумы двух канцоўных падпрастораў л.п. роўна суме іх вымернасцяў мінус вымернасць перасячэння.
- **Доказ.** Калі $\boldsymbol{U_1}, \boldsymbol{U_2}$ ненулявыя канцоўнавымерныя падпрасторы V, то патрабуе доказу наступная роўнасць:
- $$\dim(\boldsymbol{U_1} + \boldsymbol{U_2}) = \dim \boldsymbol{U_1} + \dim \boldsymbol{U_2} - \dim(\boldsymbol{U_1} \cap \boldsymbol{U_2})$$

……………………………………………………………………………

- **Азн. 3.** Няхай $S = U_1 + U_2 + \dots + U_k$ - сума ненулявых падпрастораў л.п. V. Тады сума S называецца прамой, калі кожны вектар a є S толькі адзіным чынам можа быць зададзены ў выглядзе
- $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, дзе a_i є $\boldsymbol{U_i}$, $i = 1,2,\dots,k$.
- Па – іншаму, S – прамая сума, калі з кожнай роўнасці віду
- $u_1 + u_2 + \dots + u_k = v_1 + v_2 + \dots + v_k$, дзе u_i, v_i є U_i, вынікае роўнасць
- $u_i = v_i$, $i = 1,2,\dots,k$.
- Абазначэнне: $S = \boldsymbol{U_1} \oplus \boldsymbol{U_2} \oplus \dots \oplus \boldsymbol{U_k}$. (2)

- Хай S – прамая сума (2). Тады па азначэнню з умовы
- $u_1 + u_2 + \ldots + u_k = \bar{o}$, $u_i \in U_i$ **(3)** вынікае роўнасць $u_i = \bar{o}$, **(4)** для ўсіх $i = 1,2 \ldots, k$.
- Апошняя ўмова з яўляецца неабходнай і дастатковай для таго, каб сума была прамая.
- Сапраўды, хай $u_1 + u_2 + \ldots + u_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$, дзе $u_i, v_i \in U_i$.
- Тады
- $(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \ldots + (u_k - v_k) = \bar{o}$ і $u_i - v_i = \bar{o}$, $u_i = v_i$.
- **Сцв.2.** Вымернасць прамой сумы падпрастораў роўна суме іх вымернасцяў:
- $$\boldsymbol{dim\,(U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k) = dim U_1 \oplus dim\, U_2 \oplus \ldots \oplus dim\, U_k}.$$