О сохранении и нарушении равносильности

при решении уравнений и неравенств

Равносильны ли уравнения:

а) $x^2\sqrt{x+1}=\sqrt{x+1}$ и $x^2=1$

Деление не нарушило равносильность

б) $x^2\sqrt{x-2}=\sqrt{x-2}$ и $x^2=1$

Деление привело к **потере** корня 2 и приобретению **посторонних** корней ± 1

в) $x^2\sqrt{x+4}=9\sqrt{x+4}$ и $x^2=9$

Деление привело к **потере** корня -4

г) $x^2\sqrt{x-2}=4\sqrt{x-2}$ и $x^2=4$

Деление привело к приобретению **постороннего** корня -2

Равносильны ли уравнения:

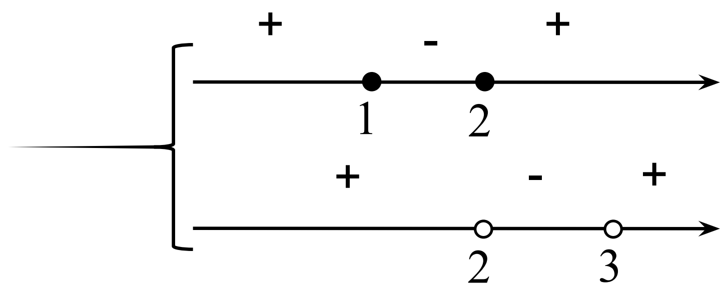
$$\frac{2x-1}{x^2-x-6}=\frac{2x-1}{x-3}$$ и $$x^2-x-6=x-3$$

Отбрасывание числителей и уравнивание знаменателей привело к **потере** корня $\frac{1}{2}$ и приобретению **постороннего** корня 3.

Найдите ошибки в решении неравенства

$$\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x^2-5x+6}\le 0$$

$$\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0 \\ x^2-5x+6<0 \end{cases}$$



Ответ: $(2;\ 3)$.

Найдите ошибки, сделанные в решении уравнения

$$\sqrt{x^4(x-1)}+2x^2=0$$

$$x^2\sqrt{x-1}+2x^2=0$$

$$x^2\left(\sqrt{x-1}+2\right)=0$$

$$x^2=0$$

$$x=0$$

Ответ: $x=0$

Равносильны ли

а) $x^2+\sqrt{x}=\sqrt{x}-2x$ и $x^2+2x=0$

б) $\frac{1}{x}>3$ и $1>3x$

в) $\frac{1}{x}<3$ и $1<3x$

г) $\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x-3)}\geq 0$ и $\frac{(x-1)(x+2)}{x-3}\geq 0$

д) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x-3)}\geq 0$ и $\frac{x+2}{(x-1)(x-3)}\geq 0$

$$\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}=\sqrt[3]{2x-1}$$

$$\left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}\right)^3=\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3$$

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$8x+2+3\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{6x+1}\cdot\underline{\left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}\right)}=2x-1$$

$$8x+2+3\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{6x+1}\cdot\sqrt[3]{2x-1}=2x-1$$

$$3\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{6x+1}\cdot\sqrt[3]{2x-1}=-6x-3$$

$$\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{6x+1}\cdot\sqrt[3]{2x-1}=-(2x+1)$$

$$(2x+1)\cdot(6x+1)\cdot(2x-1)=-(2x+1)^3$$

$$(2x+1)\cdot\left((6x+1)\cdot(2x-1)+(2x+1)^2\right)=0$$

$$(2x+1)\cdot 16x^2=0$$

$x=-\dfrac{1}{2}$ или $x=0$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+1=8\cdot\operatorname{ctg}x$$

$$\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}+1=\frac{8}{\operatorname{tg}x}$$

или

$$\cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z$$

$$(1-\operatorname{tg}x)\cdot\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x\cdot(1+\operatorname{tg}x)=8\cdot(1+\operatorname{tg}x)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\right)+1=8\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$$

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x=8+8\cdot\operatorname{tg}x$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}-\pi k\right)+1=8\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$$

$$6\cdot\operatorname{tg}x=-8$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1=8\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}x=-\frac{4}{3}$$

$$-1+1=8\cdot 0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z$$

$$x=-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi n,\quad n\in Z$$

Ответ: $x=-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi n,\ \ n\in Z;\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z.$

Действия	Используемые математические объекты или процедурные действия	Характер возможного нарушения равносильности
Использование тождеств с разной областью определения левой и правой части.	$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$; $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$; $\log_c\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$; $\log_c a^b = b\cdot\log_c a$; $a^{\log_a b} = b$; $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$; $\sin 2x = \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$; $\cos 2x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$; $\mathrm{tg}2x = \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$; $\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}x}$; $\mathrm{ctg}x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}x}$; $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$; $\sin(\arcsin a) = a$; $\cos(\arccos a) = a$.	В случае расширения ОДЗ возможно приобретение постороннего корня. Достаточна проверка на ОДЗ. В случае сужения ОДЗ возможна потеря корня. Недопустимое действие! Необходим разбор случая тех значений переменной, которые «уходят» из ОДЗ.
Умножение или деление на выражение, содержащее переменную.	Отбрасывание одинаковых знаменателей равных дробей. Отбрасывание одинаковых числителей равных дробей. Сокращение уравнения на один и тот же множитель.	При умножении возможно приобретение постороннего корня. Требуется непосредственная подстановка найденных корней в первоначальное уравнение. При делении возможна потеря корня. Поэтому прежде, чем делить, проверить, не являются ли корнями исходного уравнения числа, обращающие в нуль, удаляемый множитель.

Действия	Используемые математические объекты или процедурные действия	Характер возможного нарушения равносильности
Сокращение дроби		При расширении ОДЗ возможно приобретение постороннего корня. Достаточна проверка на вхождение корня в ОДЗ.
Приведение подобных слагаемых		
Использование функций с ограниченной областью определения	Логарифмирование (функция $y = \log_a x$)	Возможна потеря корня за счёт сужения ОДЗ. Требуется обоснование возможности логарифмирования.
	Потенцирование	Возможно приобретение постороннего корня. Достаточна проверка на вхождение корня в ОДЗ.
	Извлечение корня чётной степени (функции $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[2n]{x}$).	Возможна потеря корня за счёт сужения ОДЗ. Требуется обоснование возможности извлечения корня чётной степени.
Использование немонотонных функций	$y = x^2$, $y = x^{2n}$ $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}x$; $y = \mathrm{ctg}x$	Необходима проверка на вхождение корней уравнения в один и тот же промежуток монотонности функции.
Переход к дизъюнкции	Переход от уравнения вида $f(x) \cdot g(x) = 0$ к совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$	Возможно приобретение посторонних корней. Требуется при найденных корнях существование другого сомножителя. Достаточна проверка на вхождение корня в ОДЗ.
«Обращение к себе»	Подстановка в преобразованное уравнение исходного уравнения.	Возможно приобретение посторонних корней. Требуется непосредственная подстановка найденных корней в первоначальное уравнение.

Тождество	Область определения		Замечания
	Левой части	Правой части	
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$a \geq 0$	$a \in \mathrm{R}$	
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$ab \geq 0$	$a \geq 0$ и $b \geq 0$	В левой части при $a = 0$ множитель b может быть любым, в то время как в правой части при $a = 0$ он неотрицателен.
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{a}{b} \geq 0$	$a \geq 0$ и $b > 0$	В левой части при $a = 0$ множитель b лишь не равен нулю, в то время как в правой части при $a = 0$ он положителен.
$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$	$ab > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$	$a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$	Левая часть допускает одновременно отрицательные a и b, правая – нет.
$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$	$\frac{a}{b} > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$	$a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$	Существование левой части и одного из логарифмов, стоящих в правой части, гарантирует существование второго логарифма, стоящего в правой части.
$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$	$a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1$	$a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1$	
$\log_c a^b = b \cdot \log_c a$	$a^b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$	$a > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$	Применяя тождество слева направо, необходимо помнить об ограничениях при определении степени.
$a^{\log_a b} = b$	$a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1$	$a \in \mathrm{R},\ b \in \mathrm{R}$	Применение тождества справа налево позволяет представлять положительное число в виде степени с наперёд заданным положительным основанием.

<table>
<tr><th rowspan="2">Тождество</th><th colspan="2">Область определения</th><th rowspan="2">Замечания</th></tr>
<tr><th>Левой части</th><th>Правой части</th></tr>
<tr><td>$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$</td><td>$\sin\alpha \neq 0$</td><td>$\cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha \neq 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$</td><td>$\cos\alpha \neq 0$</td><td>$\cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha \neq 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$</td><td>$\cos(\alpha \pm \beta) \neq 0$</td><td>$\cos(\alpha \pm \beta) \neq 0$,
$\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$</td><td>Существование левой части и одного из тангенсов, стоящих в правой части, не гарантирует существование второго тангенса в правой части.</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$</td><td>$\cos 2\alpha \neq 0$</td><td>$\cos 2\alpha \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$</td><td rowspan="3">При решении задач следует рассмотреть отдельно случай $\cos\alpha = 0$.</td></tr>
<tr><td>$\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$</td><td>$\alpha \in \mathrm{R}$</td><td>$\cos\alpha \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$</td><td>$\alpha \in \mathrm{R}$</td><td>$\cos\alpha \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$\sin(\arcsin a) = a$</td><td>$a \in [-1;\ 1]$</td><td>$a \in \mathrm{R}$</td><td rowspan="2">При решении задач часто используется с полным определением аркфункции: полезно вспомнить, что $\arcsin a \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ и $\arccos a \in [0;\ \pi]$.</td></tr>
<tr><td>$\cos(\arccos a) = a$</td><td>$a \in [-1;\ 1]$</td><td>$a \in \mathrm{R}$</td></tr>
</table>