

Биматричные игры

- Биматричная игра — конечная игра двух игроков
- с ненулевой суммой (выигрыш игрока A не равен проигрышу игрока B)
 - выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока
 - строка соответствует стратегии игрока A , столбец — стратегии игрока B , на пересечении строки и столбца находится выигрыш

Биматричные игры

Общий вид платежной матрицы биматричной игры

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}	...	a_{1n}, b_{1n}
A_2	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}	...	a_{2n}, b_{2n}
...
A_m	a_{m1}, b_{m1}	a_{m2}, b_{m2}	...	a_{mn}, b_{mn}

Ситуация равновесия в доминантных стратегиях

Определение. *Доминантная стратегия - это стратегия, дающая игроку максимальный по сравнению с другими его стратегиями выигрыш, независимо от действий противника.*

Определение. *Если для каждого игрока A и B существует доминантная стратегия, то пара этих стратегий называется равновесием в доминантных стратегиях.*

Ситуация равновесия в доминантных стратегиях

Пример 1.

Лиса Алиса и Кот Базилио хотят разделить между собой 5 золотых. Судьей в споре за 1 золотой согласился быть Карабас. Если только один из них даст взятку Карабасу 1 золотой, то Карабас присудит деньги взяточнику. Если взятку дадут оба или никто не даст, то Карабас разделит деньги пополам. Сколько золотых получит каждый?

Решение.

		Кот Базилио	
		Дать взятку	Не дать
Лиса Алиса	Дать взятку	1 , 1	3 , 0
	Не дать	0 , 3	2 , 2

Пример 2. Дилемма заключенных

		В	
		Признаться	Отрицать
А	Признаться	-8 , -8	0 , -10
	Отрицать	-10 , 0	-1 , -1

Пример 3. Уборка

		Ольга	
		Убрать	Не убрать
Ирина	Убрать	5,5	0,8
	Не убрать	8,0	1,1

Ситуация оптимальности по Парето

Принцип Парето.

Если для ситуации x существует такая ситуация y , что выигрыш каждого из игроков при реализации ситуации y не меньше, чем при реализации ситуации x , и по крайней мере один игрок получает выигрыш, строго больший, то игроки предпочтут ситуацию y ситуации x .

В оптимальной по Парето ситуации игроки не могут совместными усилиями увеличить выигрыш одного из игроков, не уменьшив при этом выигрыш другого.

Ситуация равновесия в доминантных стратегиях и ситуация оптимальности по Парето

Различие ситуации равновесия от ситуации, оптимальной по Парето, состоит в следующем:

- ✓ в ситуации равновесия ни один из игроков, действуя в одиночку, не может увеличить своего собственного выигрыша (индивидуализм);*
- ✓ в ситуации, оптимальной по Парето, игроки, действуя совместно, не могут (даже нестрого) увеличить выигрыш каждого (кооперация).*

Пример 4. Задача о картелях

Рассмотрим две нефтедобывающие страны, которые назовём А и В.

Эти две страны могут кооперироваться (а), договариваясь об объёмах ежедневной добычи нефти, ограничиваясь добычей в 2 млн. баррелей в день, для каждой страны.

С другой стороны страны могут действовать некооперативно (б), добывая, 4 млн. баррелей в день.

Цена 1барр. = 100\$, если на рынке 4млн. баррелей в день

Цена 1барр. = 60\$, если на рынке 6млн. баррелей в день

Цена 1барр. = 40\$, если на рынке 8млн. баррелей в день

1) Найти ситуацию равновесия в доминантных стратегиях

2) Выявить оптимальный режим поведения стран по Парето.

Ситуация равновесия по Нэшу

Ситуации равновесия по Нэшу

характеризуются тем, что отклонение от данной ситуации равновесия одним из игроков не может увеличить его выигрыша.

Пара стратегий A_i и B_j называется *равновесием по Нэшу*, если выбор A_i оптимален при заданном выборе B_j , и выбор B_j оптимален при заданном выборе A_i .

Ситуация называется равновесной по Нэшу, если она устойчива относительно индивидуального отклонения игроков

Пример 5. Биологическая система

		Большая свинья	
		Нажать	Ждать
Поросенок	Нажать	-1,9	-1,10
	Ждать	6,4	0,0

Пример 5.

1) Есть ли доминантная стратегия для поросенка?

2) Есть ли доминантная стратегия для большой свиньи?

3) Найти ситуацию равновесия по Нешу для этой игры. Имеет ли игра более одной ситуации равновесия по Нешу?

4) Какая свинья получит больше пищи в ситуации равновесия по Нешу?

Пример 6.

Виктор и Анна - муж и жена. Виктор предпочитает смотреть футбол, чем смотреть телесериал. Анна предпочитает смотреть телесериал, чем смотреть футбол. Оба считают, что будет хуже, если они не договорятся и не будут вообще смотреть телевизор.

- 1) Имеет ли игра доминантную стратегию?
- 2) Найти две ситуации равновесия по Нешу.

Пример 6.

		Жена	
		Футбол	Телесериал
Муж	Футбол	2,1	0,0
	Телесериал	0,0	1,2

Смешанные стратегии

- *Если каждый игрок всегда придерживается одной стратегии, то эта стратегия называется чистой стратегией.*
- *Если каждый игрок случайным образом выбирает свою стратегию (каждая стратегия выбирается с определенной вероятностью), то такая стратегия называется смешанной.*
- *Задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его стратегии.*

Алгоритм решения матричной игры

Как находить решение матричной игры?

Пусть v – цена игры и оптимальные смешанные стратегии:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_m^* \end{pmatrix} \quad B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \dots & q_n^* \end{pmatrix}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока A состоит из стратегий A_i :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* = v$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока B состоит из стратегий B_j :

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* = v$$

Пример 7.

Пример. Имеются две конкурирующие фирмы A и B , выпускающие однотипные изделия, соответственно видов I и II , которые могут быть окрашены в один из двух цветов: красный (кр.) или синий (син.). Изучение спроса покупателей показало, что если выпущены изделия I кр. и II кр., то 40% покупателей получают I кр. и 60% – II кр. Если выпущены I кр. и II син., то 90% покупателей приобретают I кр. Если изготовлены I син. и II кр. будет продано 70% I син. Если сделаны I син. и II син., то 20% покупателей получают I син.

Найти оптимальные стратегии и цену матричной игры.

Пример 7.

	II кр.	II син.
I кр.	-20	80
I син.	40	-60

Пример 7.

	II кр.	II син.	α_i
I кр.	-20	80	-20
I син.	40	-60	-60
β_j	40	80	

$$\begin{array}{l} \alpha = \max\{-20, -60\} = -20 \\ \beta = \min\{40, 80\} = 40 \end{array} \Bigg| \Rightarrow \alpha \neq \beta$$

Пример 7.

Пусть фирма A придерживается своей оптимальной стратегии

$$\underline{p}^* = (p_1^*; p_2^*)$$

По теореме об активных стратегиях, при применении фирмой B чистой стратегии B_1 или B_2 фирма A получит средний выигрыш, равный цене игры:

$$\begin{cases} -20p_1^* + 40p_2^* = v; \\ 80p_1^* - 60p_2^* = v; \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} -20p_1^* + 40p_2^* - v = 0; \\ 80p_1^* - 60p_2^* - v = 0; \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -20 & 40 & -1 \\ 80 & -60 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 7.

Решим систему трех уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} p_1^* = 1 - p_2^*; \\ -20(1 - p_2^*) + 40p_2^* = 80(1 - p_2^*) - 60p_2^*, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2^* = 1/2; \\ p_1^* = 1 - 1/2, \end{cases} \quad \begin{cases} p_1^* = 1/2; \\ p_2^* = 1/2, \end{cases}$$

$$v = 80 \cdot \frac{1}{2} - 60 \cdot \frac{1}{2} = 10 \quad \text{— цена игры.}$$

Пример 7.

Составим систему уравнений для определения

$\underline{q}^* = (q_1^*; q_2^*)$ оптимальной стратегии игрока B .

$$\begin{cases} -20q_1^* + 80q_2^* = v; \\ 40q_1^* - 60q_2^* = v; \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -20 & 80 & -1 \\ 40 & -60 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решая систему, найдем

$$\underline{q}^* = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

При таких оптимальных стратегиях: изделия фирмы A будут покупать в среднем 55% покупателей, изделия фирмы B – 45% покупателей.

(55%+45%=100%) и (55%-45%=10%)

Пример 8.

		Нападающий	
		Удар влево	Удар вправо
Вратарь	Прыгнуть влево	1,0	0,1
	Прыгнуть вправо	0.5, 0.5	1,0

Пример 8

- 1. Есть ли доминантная стратегия?*
- 2. Есть ли ситуация равновесия по Нешу?*
- 3. Найти смешанные стратегии.*

Пример 9.

		Таможенный инспектор	
		Досмотреть	Не досматривать
Турист	Декларировать	-6, 4	-5,5
	Не декларировать	-11, 9	7,-5

Пример 9

- 1. Есть ли доминантная стратегия?*
- 2. Есть ли ситуация равновесия по Нешу?*
- 3. Найти смешанные стратегии.*