ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

10.1

Расположенные друг за другом n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют числовую последовательность длины n.

Пусть каждому **натуральному** числу n поставлено в соответствие число x_n, тогда говорят, что дана последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, или так: $\{x_n\}$. Общий член последовательности x_n является функцией аргумента n, $x_n = f(n)$. Давая n различные значения ($n = 1, 2, 3, \ldots$,) получаем последовательность значений этой функции:

$$f(1), f(2), \ldots, f(n).$$

Для задания бесконечной последовательности $\{x_n\}$ нужно указать правило, по которому любому n можно поставить в соответствие x_n. Последовательность может быть задана: таблично, графически или с помощью формулы **общего члена** последовательности $x_n = f(n)$, где $f(n)$ – некоторое выражение. Не для каждой последовательности можно подобрать формулу общего члена.

Пусть дана последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, тогда ее члены: 1, 1/2, 1/3, …, $1/n$,… . сть,

Последовательность, для которой $x_n = 2n - 1$ имеет следующий вид:

$$\{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n\text{-}1, \ldots\}.$$

Для последовательности 1.1, 1.01, 1.001,…или 1+1/10, 1+1/100, +… общий член имеет вид: $\left\{1 + \frac{1}{10^n}\right\}$.

Последовательности можно складывать, вычитать, умножать и делить:

1) *сумма* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – это такая последовательность $\{z_n\}$, что $z_n = x_n + y_n$, т.е. $\{z_n\} = \{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$;

2) *разность* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – это такая последовательность $\{z_n\}$, что $z_n = x_n - y_n$, т.е. $\{z_n\} = \{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\}$;

3) *произведение* $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$;

4) *частное* $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, $y_n \neq 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если для любого номера n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если для любого номера n выполняется неравенство $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$).

Все эти последовательности называются *монотонными*, а возрастающие и убывающие последовательности – *строго монотонными*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*ограниченной снизу*), если существует такое число M (или m), что для любого номера n имеет место неравенство $x_n \leq M$ (или $x_n \geq m$). Последовательность называется ограниченной, если она ограничена как сверху, так и снизу.

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия. Конечная или бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$ называется арифметической прогрессией, если каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d. Число d называется разностью арифметической прогрессии, т.е. $a_{n+1} = a_n + d$. Если $d > 0$, то прогрессия является возрастающей, если $d < 0$, то прогрессия является убывающей. Таким образом, n – ый член арифметической прогрессии задаётся следующим образом $a_n = a_1 + d(n - 1)$, сумма первых n членов вычисляется по формуле $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n$.

Свойства арифметической прогрессии. 1. Каждый член a_k арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое его соседних членов:

$$a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} = \frac{a_{k-m}+a_{k+m}}{2}, \text{ где } m < k.$$

2. Для любой арифметической прогрессии верно равенство $a_m + a_k =$ $= a_p + a_s$, если $m + k = p + s$.

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия. Числовая последовательность $\{b_n\}$ называется геометрической прогрессией, если каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число q. Число q называется знаменателем геометрической прогрессии, т.е. $b_n = b_{n-1} \cdot q$, $q \neq 0$, $b_1 \neq 0$.

Если $b_1 > 0$, $q > 1$ или $b_1 < 0$, $0 < q < 1$, то прогрессия является возрастающей.

Если $b_1 > 0$, $0 < q < 1$ или $b_1 < 0$, $q > 1$, то прогрессия является убывающей. При $q < 0$ геометрическая прогрессия $\{b_n\}$ является знакопеременной.

Формула n – го члена геометрической прогрессии задаётся следующим образом $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, сумма первых n членов вычисляется по формуле:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ при } q \neq 1,$$

если $q = 1$, $S_n = n \cdot b_1$.

Свойства геометрической прогрессии. 1. Квадрат любого члена b_k геометрической прогрессии, начиная со второго равен произведению соседних с ним членов: $b_k^2 = b_{k-} \cdot b_{k+}$

2. Для любой геометрической прогрессии верно равенство $b_m \cdot b_k = b_p \cdot b_s$, если $m + k = p + s$.

Если $|q| < 1$, то геометрическая прогрессия называется *бесконечной убывающей геометрической прогрессией*.

Число, к которому стремится сумма n первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии при неограниченном возрастании n, называется ее суммой, т.е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

и имеет место формула:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Понятие предела числовой последовательности

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдётся такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство: $|a - x_n| < \varepsilon$.

Или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называют «ε - окрестностью» точки a.

Геометрически определение предела можно сформулировать следующим образом: число a есть предел последовательности $\{x_n\}$, если какова бы ни была ε - окрестность точки a, начиная с некоторого номера все точки x_n попадут в эту окрестность, т.е. вне интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ останется лишь конечное число членов последовательности.

Если последовательность имеет пределом число a, то говорят, что последовательность *сходится* к числу a и записывают так: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, иначе последовательность – расходится.

Сходящаяся последовательность имеет только один предел!

Необходимое условие сходимости. Чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной. Это условие не является достаточным. Но, если последовательность сходится, то она обязательно ограничена.

Достаточные признаки сходимости.

Теорема. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся и имеют равные пределы

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

и, если $x_n \le y_n \le z_n$ при любом n, то последовательность $\{y_n\}$ сходится и её предел равен a.

Теорема. Неубывающая (невозрастающая) последовательность, ограниченная сверху (снизу), имеет предел.

Например, последовательность с общим членом $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ является возрастающей и ограниченной сверху, причём $x_n \le 3$ при всех n и имеет предел, называемый числом e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e является иррациональным числом, $e =$ 2,71828182… .

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ является *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Укажем некоторые теоремы о бесконечно малых (б.м.) величинах.

Теорема. Сумма (разность) двух б.м. величин есть величина бесконечно малая.

Теорема. Произведение б.м. величины на ограниченную есть бесконечно малая величина.

Следствие 1. Произведение постоянной величины на б.м. есть величина бесконечно малая.

Следствие 2. Произведение двух б.м. величин есть бесконечно малая величина.

Следствие 3. Произведение переменной величины, стремящейся к пределу, на б.м. есть бесконечно малая величина.

Последовательность $\{x_n\}$ является *бесконечно большой*, если для любого положительного числа M найдётся такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > M$. Геометрически это означает, что для любого $M > 0$ все члены последовательности $\{x_n\}$, кроме некоторого конечного числа их лежат вне отрезка $[-M, M]$. Если последовательность бесконечно большая, то это записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая и её члены, кроме, возможно, некоторого числа, положительны, то записывают

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Если члены последовательности $\{x_n\}$ отрицательны, кроме некоторого числа, то записывают

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Укажем некоторые **теоремы** о бесконечно больших (б.б.) величинах:

– б.б. величина предела не имеет;

– произведение постоянной величины не равной нулю на б.б. величину есть величина бесконечно большая;

– произведение двух б.б. величин есть величина бесконечно большая;

– сумма двух б.б. величин одинакового знака есть величина бесконечно большая того же знака;

– отношение б.б. величины к б.м. величине есть величина бесконечно малая.

Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями определяется следующим образом: если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая и все её члены отличны от нуля, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно большая, и наоборот.

Об отношении двух бесконечно больших (бесконечно малых) величин говорят, что оно представляет собой «неопределённость» вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

Процесс отыскания таких «неопределённостей» называется «раскрытием неопределённости». К числу неопределённостей относят выражения вида:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ 1^\infty,$$

Теоремы о пределах

Пусть существуют пределы последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

тогда существуют пределы следующих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}(C \cdot x_n) = C \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = C \cdot a\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}, b \neq 0, b_n \neq 0, \forall n \in N$$

Теоремы о предельном переходе. 1. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то для любого действительного k имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^k) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k, k = 1, 2, 3, \ldots,$$

т.е. можно переходить к пределу в основании степени с любым действительным показателем.

2. Предел корня k – ой степени от сходящейся последовательности равен корню этой же степени от предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} x_n}, k = 2, 3, 4, \ldots \ .$$

3. Если $a > 0$ и x_n принимает только положительные значения, и имеет предел не равный нулю, то имеет место формула:

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right),$$

т.е. можно переходить к пределу под знаком логарифма.

4. Если $a > 0$ и x_n имеет конечный предел, то имеет место формула:

$$\lim_{n\to\infty}(a^{x_n}) = a^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)},$$

т.е. можно переходить к пределу в основании степени при фиксированном основании.