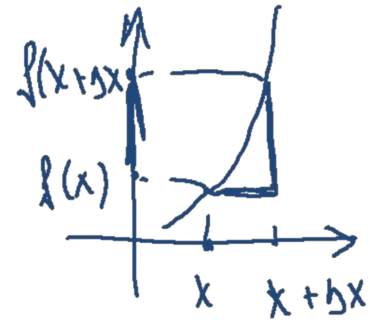
# §4. Дифференцирование функции

**Определение производной**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$




Функция $f(x)$ *дифференцируема* в точке $x$ тогда и только тогда, когда существует ее производная в этой точке. При этом выражение

$$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

есть дифференциал функции.

дифференциал ф-ции

дифференциал аргумента

# Правила дифференцирования

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $(Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $(u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x.$

## Правила дифференцирования

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u + v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{если } v \neq 0.$$

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

## *Правила дифференцирования*

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $\qquad (Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $\qquad (u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

$y' = (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot x(2+x)$

$y' = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)' = \frac{(\arcsin x)' \cdot x - \arcsin x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \arcsin x \cdot 1}{x^2}$

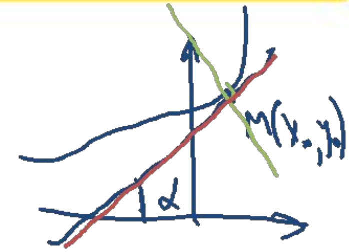
Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x.$

$y' = (5 \cdot \cos x + x^2 + \ln x)' = 5(\cos x)' + (x^2)' + (\ln x)' = -5\sin x + 2x + \frac{1}{x} \to y'(1) = -5\sin 1 + 2 + 1 = 3 - 5\sin 1$

# *Геометрический смысл производной*




Значение производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y = f'(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$: $f'(x_0) = k_{кас.}$

$tg\,\alpha = k = f'(x_0)$

— нормаль

— касательная

Уравнение касательной, проходящим через точку $M_0$, имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$.

$y_0 = y(x_0)$

Нормаль – прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной. Тогда $k_{норм} = -1/k_{кас}$. Уравнение нормали: $y - y_0 = (-1/f'(x_0))\cdot(x - x_0)$.

**Пример.** Составить уравнения нормали к линии $y = x^3 + 3x^2 - 5$, параллельной прямой $2x - 6y + 1 = 0$.

$y = \frac{2x+1}{6} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$

$k = \frac{1}{3}$ – угловой коэф-т нормали

$k_{\text{норм}} = \frac{-1}{y'(x_0)}$

$y' = 3x^2 + 6x$

$\frac{1}{3} = \frac{-1}{3x^2+6x}$

$-3 = 3x^2 + 6x$

$-1 = x^2 + 2x$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)^2 = 0$

$x = -1 = x_0$

$y_0 = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 5 = -3$

$y + 3 = \frac{1}{3}(x+1)$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - 3$

$y = \frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$ – уравнение нормали

## Правила дифференцирования

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u + v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

$y = u^v$

$\ln y = \ln u^v$

$(\ln y)' = (v \ln u)'$

## *Правила дифференцирования*

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u + v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

Метод логарифмического дифференцирования

$\ln y = \ln x^{\ln(x-1)}$

$\ln y = \ln(x-1) \cdot \ln x$

$(\ln y)' = (\ln(x-1))' \ln x + \ln(x-1) \cdot (\ln x)'$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1} \cdot \ln x + \frac{\ln(x-1)}{x}$; $y' = x^{\ln(x-1)} \left( \frac{\ln x}{x-1} + \frac{\ln(x-1)}{x} \right)$

# Правила дифференцирования

Пусть $C$ – постоянная, $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

$C'=0$; $(Cu)'=Cu'$;

$(u+v)'=u'+v'$; $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, если $v\neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y=f(u)$, $u=u(x)$, т. е. $y=f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u=u(x)$ имеют производные, то

$y'_x=y'_u u'_x$.

Используем логарифм. дифференцирование

$\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$

$\ln y = \ln\frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}$

$\ln y = \ln x^2 + \ln(x+1)^{\frac12} - \ln(x-1)^3 - \ln(5x-1)^{\frac15}$

$(\ln y)' = \left(2\ln x + \frac12\ln(x+1) - 3\ln(x-1) - \frac15\ln(5x-1)\right)'$

$\frac1y\cdot y' = 2\cdot\frac1x + \frac12\cdot\frac{1}{x+1}(x+1)' - 3\cdot\frac{1}{x-1} - \frac15\cdot\frac{1}{5x-1}\cdot(5x-1)'$

$\frac{y'}{y} = \frac2x + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5(5x-1)}\cdot 5 \quad \Big| \cdot y$

$y' = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}\left(\frac2x + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5x-1}\right)$

## Правила дифференцирования

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$

$(Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$

$(u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x.$

## *Правила дифференцирования*

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $\quad (Cu)' = Cu'$;

$y' = \left((x^2)'(2\ln x - 3) + x^2(2\ln x - 3)'\right)' =$

$(u + v)' = u' + v'$; $\quad (u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$= \frac{1}{4}\left(2x(2\ln x - 3) + x^2\left(2 \cdot \frac{1}{x} - 0\right)\right) =$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

$= \frac{1}{2}x(2\ln x - 3) + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(2\ln x - 3 + 1) =$

$= \frac{1}{2}x(2\ln x - 2) = x(\ln x - 1)$

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'' = x'(\ln x - 1) + x(\ln x - 1)' = \ln x - 1 + x\left(\frac{1}{x} - 0\right) =$

$y'_x = y'_u u'_x$

$= \ln x - 1 + 1 = \ln x$

## *Правила дифференцирования*

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n$

$C' = 0;$ $\quad 0! = 1 \quad$ $(Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $\quad 1! = 1 \quad$ $(u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

$y^{IV} = -6x^{-4}$

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x.$

$y^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}$

- ***Правила дифференцирования***

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$C' = 0$; $\qquad (Cu)' = Cu'$;

$(u + v)' = u' + v'$; $\qquad (u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$

$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \left[\frac{1-1+\ln 1}{e-e} = \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \left[\frac{2+1}{e}\right] = \frac{3}{e}$

## Правила дифференцирования

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $\qquad (Cu)' = Cu'$;

$(u + v)' = u' + v'$; $\qquad (u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

## *Правила дифференцирования*

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

$=[0\cdot\infty]=$

$=\left[\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{П.Л.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} =$

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

## *Правила дифференцирования*

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $\qquad (Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $\qquad (u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x.$

$(x-1)' = x' - 1' = 1 - 0 = 1$ $\qquad \frac{1}{x} = x^{-1}$ $\qquad \frac{x-1}{x}$

$\lim\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \left[\frac{1}{0} - \frac{1}{0}\right] = \infty - \infty = \lim \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 \cdot \ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim_{x \to 1} \frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x} + \frac{1 \cdot x - (x-1)\cdot 1}{x^2}} = \left[\frac{-1}{1 + \frac{1-0}{1}}\right] = -\frac{1}{2}$

# §5. Исследование функции

Проводится по следующей схеме

1. Область определения функции $D(f)$.

   Множество значений функции $E(f)$.

обязательно

желательно

2. Четность, нечетность, периодичность

$f(x)$ – четная $\Leftrightarrow$ $\forall x, (-x) \in D(f)$ $\quad f(-x) = f(x)$ D(f) симм.

(график симметричен относительно оси $Oy$) относительно

нач. координат

$f(x)$ – нечетная $\Leftrightarrow$ $\forall x, (-x) \in D(f)$ $\quad f(-x) = -f(x)$

(график симметричен относительно начала координат)

Если ни одно условие не выполняется, то

$f(x)$ – функция общего вида.

$f(x)$ – периодическая с периодом $T \Leftrightarrow$

$\forall x, (x-T), (x+T) \in D(f) \quad f(x) = f(x-T) = f(x+T)$

(определяется только для тригонометрических функций)

$\left.\begin{matrix} y=\sin x \\ y=\cos x \end{matrix}\right\} T=2\pi \qquad \left.\begin{matrix} y=\mathrm{tg}\, x \\ y=\mathrm{ctg}\, x \end{matrix}\right\} T=\pi$

3. Точки пересечения графика с осями координат

Пересечение с $Oy$ существует, если $x = 0 \in D(f)$, точка пересечения $(0, f(0))$

(график пересекает $Oy$ не более чем в одной точке).

Пересечение с $Ox$ определяется в результате решения уравнения: $f(x) = 0$.

***Правила дифференцирования***

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $(Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $(u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

# Правила дифференцирования

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$\lim f(x) = \infty$

$C' = 0;$ $\qquad (Cu)' = Cu';$

$(u+v)' = u' + v';$ $\qquad (u \cdot v)' = u'v + uv';$

$f = \lim\limits_{x \to \infty} y(x)$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x.$

# Правила дифференцирования

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $(Cu)' = Cu';$

$(u+v)' = u' + v';$ $(uv)' = u'v + uv';$

возрастает

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

убывает

## Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

## *Правила дифференцирования*

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $\qquad (Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $\qquad (u \cdot v)' = u'v + uv';$

y + + − max

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

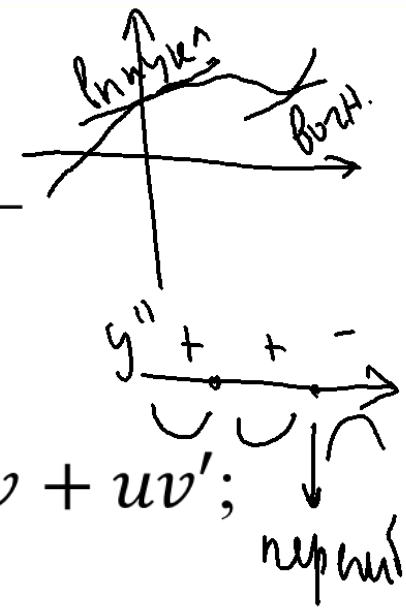
Дифференцирование сложной функции

y + max − min +

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x.$

## ***Правила дифференцирования***




Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $\qquad (Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $\qquad (u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x.$

По результатам исследования строят график функции и при необходимости находят

7.* Дополнительные точки.

## *Правила дифференцирования*

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u+v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т.е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = R \setminus \{0\}$ $E(y) = ?$

2) ни чет. ни нечетн.

$y(-x) = \frac{(-x)^3 + 4}{(-x)^2} = \frac{-x^3 + 4}{x^2}$

$y(-x) \neq y(x)$

$y(-x) \neq -y(x)$

функция общ. вида

3) $\{0\} \notin D(y) \Rightarrow$ график не пересекает $Oy$

Пересечение с $Ox$: $\frac{x^3 + 4}{x^2} = 0$

$\begin{cases} x^3 + 4 = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$

$x^3 = -4$

$x = -\sqrt[3]{4} \approx -1,..$

т. пересечения $(-\sqrt[3]{4}; 0)$

4) Асимптоты

Вертикальная: $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+4}{x^2} = \left[\frac{4}{0}\right] = \infty \Rightarrow x=0$ в. ас.

Невертик.

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = 1$ $(\neq 0 \Rightarrow$ наклонная$)$

$b = \lim\limits_{x\to\infty}(y(x)-kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right) = [\infty-\infty] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2} = 0$

$y = kx+b \Rightarrow y = x$ – накл. ас.

5) $y' = \left(\dfrac{x^3+4}{x^2}\right)' = \dfrac{(x^3+4)'\cdot x^2 - (x^3+4)\cdot(x^2)'}{x^4} = \dfrac{3x^2\cdot x^2 - (x^3+4)\cdot 2x}{x^4} =$

$= \dfrac{x(3x^3-2x^3-8)}{x^4} = \dfrac{x^3-8}{x^3}$

$y' = 0:\ \begin{cases} x^3-8=0 \\ x^3 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$y'$: $+$ (0) $-$ 2 $+$

$y$: $\nearrow$ 0 $\searrow$ 2 $\nearrow$

~~max~~ min

$y(0) = ?$

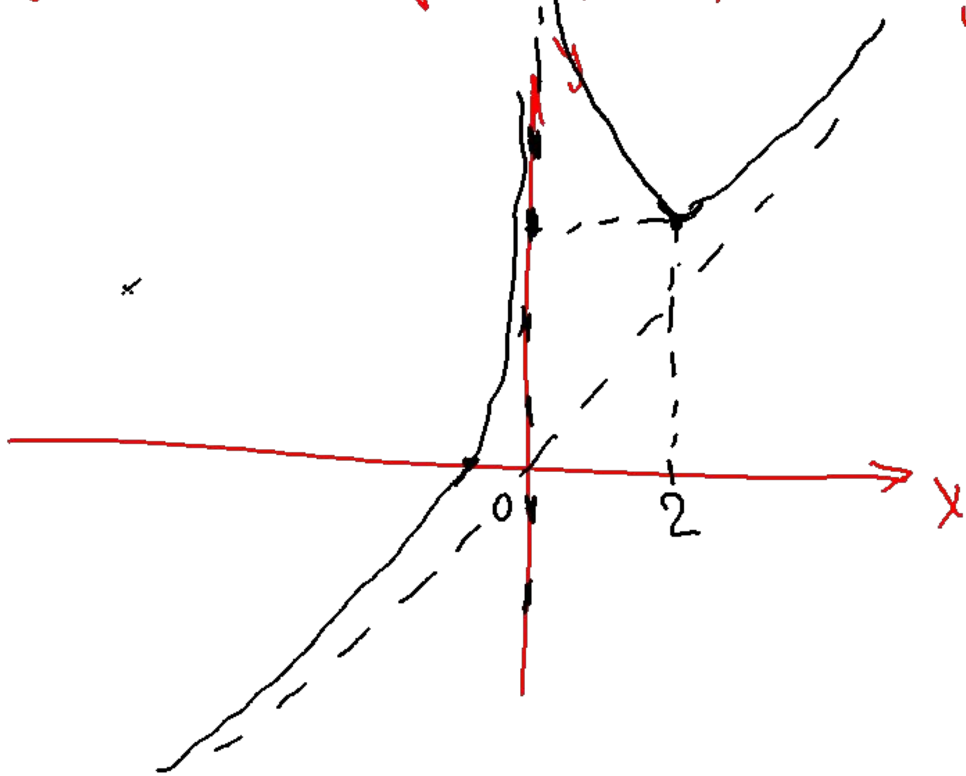
$y(2) = \dfrac{2^3+4}{2^2} = \dfrac{12}{4} = 3$

$(2, 3)$ – min

б) $y''=\left(\dfrac{x^3-8}{x^3}\right)'=\left(1-\dfrac{8}{x^3}\right)'=-8\left(x^{-3}\right)'=24x^{-4}=\dfrac{24}{x^4}$

$y''=0$ нет реш., $x\neq 0$

$y''$: $+$ $0$ $+$



# *Правила дифференцирования*

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $\qquad$ $(Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $\qquad$ $(u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т.е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x.$

1) $D(y) = R = (-\infty, +\infty)$

2) четн., нечет.

$y(-x) = -xe^{x}$ $\quad$ $y(-x) \neq y(x)$ $\quad$ $y(-x) \neq -y(x)$

ф-ция общего вида

3) Пересечение с $Oy$: $y(0) = 0$

Пересеч. с $Ox$: $xe^{-x} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ e^{-x} = 0 \text{ – нет. реш.} \end{array}\right.$

График пересекает оси только $(0,0)$



4) Верт. асимптот нет

Невертик.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = ?$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 = k \text{ (возм. гориз. ас.)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty \text{ (нет ас.)}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-kx) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{П.Л}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} =$$

$$= \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

$y = kx + b \Rightarrow y = 0$ – гориз. ас. (при $x\to+\infty$)

5) $y' = (xe^{-x})' = x'e^{-x} + x\cdot(e^{-x})' = e^{-x} + x\cdot e^{-x}\cdot(-x)' =$

$= e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$y' = 0 \qquad 1-x=0$

$\qquad\qquad x = 1$

$y'\quad + \quad 1 \quad -$

$y \quad \nearrow \quad 1 \quad \searrow$

max

$y(1) = 1\cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$

6) $y'' = \left(e^{-x}(1-x)\right)' = (e^{-x})'(1-x) + e^{-x}(1-x)' =$

$= -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = -e^{-x}(1-x+1) = -e^{-x}(2-x)$

$y'' = 0 \qquad 2-x=0$

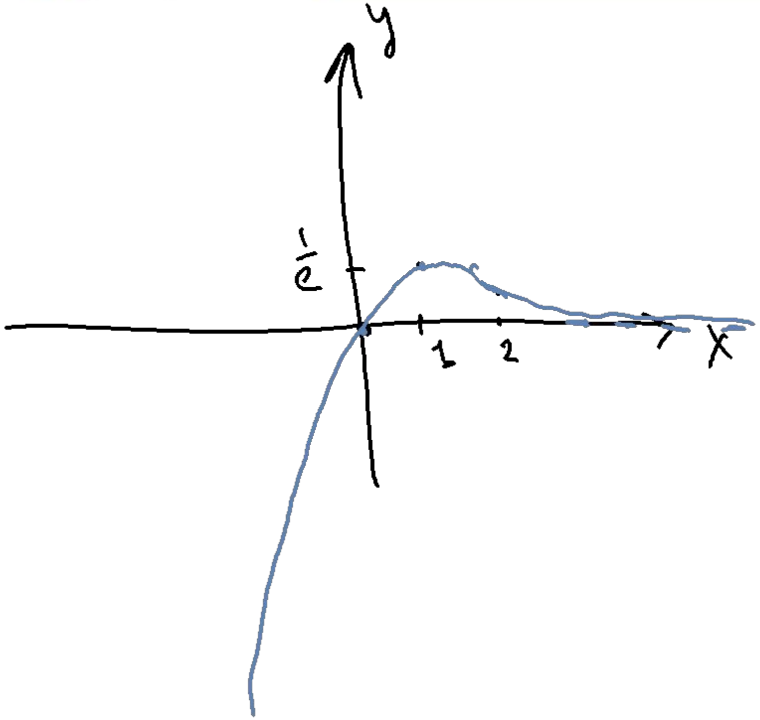
$\qquad\qquad x=2$

$y''\quad - \quad 2 \quad +$

$y \quad \cap \quad 2 \quad \cup$

перегиб

$y(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$




$$\frac{1}{e} > \frac{2}{e^2}$$

$$E = \left(-\infty; \frac{1}{e}\right]$$