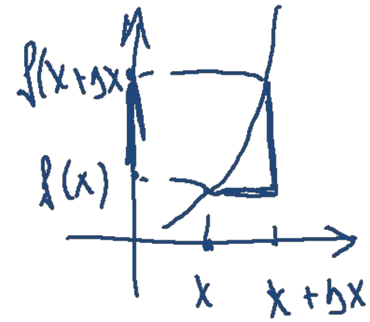
§4. Дифференцирование функции



Определение производной

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Функция $f(x)$ *дифференцируема* в точке x тогда и только тогда, когда существует ее производная в этой точке. При этом выражение

$$df(x)=f'(x)\cdot dx$$

есть дифференциал функции.

дифференциал ф-ции

дифференциал аргумента

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $(Cu)' = Cu';$

$(u+v)' = u' + v';$ $(u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

Уральский федеральный университет

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $(Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $(u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u+v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

$y' = (x^2 \cdot e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot x(2+x)$

$y' = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)' = \frac{(\arcsin x)' \cdot x - \arcsin x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \arcsin x \cdot 1}{x^2}$

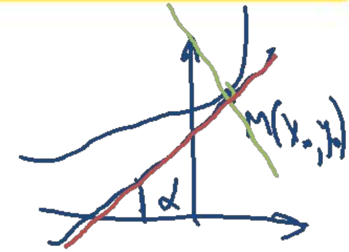
Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

$y' = (5 \cdot \cos x + x^2 + \ln x)' = 5(\cos x)' + (x^2)' + (\ln x)' = -5\sin x + 2x + \frac{1}{x} \to y'(1) = -5\sin 1 + 2 + 1 = 3 - 5\sin 1$

Геометрический смысл производной



Значение производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y = f'(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$: $f'(x_0) = k_{кас.}$

$tg\,\alpha = k = f'(x)$

— нормаль

— касательная

Уравнение касательной, проходящим через точку M_0, имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$.

$y_0 = y(x_0)$

Нормаль – прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной. Тогда $k_{норм} = -\,1/k_{кас}$.

Уравнение нормали: $y - y_0 = (-\,1/f'(x_0))\cdot(x - x_0)$.

Пример. Составить уравнения нормали к линии $y = x^3 + 3x^2 - 5$, параллельной прямой $2x - 6y + 1 = 0$.

$$k_{норм} = \frac{-1}{y'(x_0)}$$

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$\frac{1}{3} = \frac{-1}{3x^2+6x}$$

$$-3 = 3x^2 + 6x$$

$$-1 = x^2 + 2x$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1 = x_0$$

$$y = \frac{2x+1}{6} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$$

$k = \frac{1}{3}$ – угловой коэф-т нормали

$$y_0 = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 5 = -3$$

$$y + 3 = \frac{1}{3}(x+1)$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - 3$$

$y = \frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$ – уравнение нормали

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $\quad (Cu)' = Cu';$

$(u+v)' = u' + v';$ $\quad (u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0.$

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x.$

$y = u^v$

$\ln y = \ln u^v$

$(\ln y)' = (v \ln u)'$

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u+v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

$\ln y = \ln(x-1) \cdot \ln x$

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

$\frac{y'}{y} = (\ln(x-1))' \ln x + \ln(x-1) \cdot (\ln x)'$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1} \cdot \ln x + \frac{\ln(x-1)}{x}$; $y' = x^{\ln(x-1)} \left(\frac{\ln x}{x-1} + \frac{\ln(x-1)}{x} \right)$

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

Использую логарифм. дифференцирование $\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b$

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u+v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

$\ln y = \ln \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}$

$\ln y = \ln x^2 + \ln (x+1)^{\frac{1}{2}} - \ln(x-1)^3 - \ln(5x-1)^{\frac{1}{5}}$

$(\ln y)' = \left(2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - 3\ln(x-1) - \frac{1}{5}\ln(5x-1)\right)'$

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$\frac{1}{y}\cdot y' = 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}(x+1)' - 3\cdot\frac{1}{x-1}(x-1)' - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5x-1}\cdot(5x-1)'$

$y'_x = y'_u u'_x$.

$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5(5x-1)}\cdot 5 \quad \Big| \cdot y$

$y' = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5x-1}\right)$

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u + v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u + v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$

$$y' = \left(\left(x^2\right)'(2\ln x - 3) + x^2(2\ln x - 3)'\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2x(2\ln x - 3) + x^2\left(2 \cdot \frac{1}{x} - 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x(2\ln x - 3) + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(2\ln x - 3 + 1) =$$

$$= \frac{1}{2}(2x(\ln x - 1)) = x(\ln x - 1)$$

$$y'' = x'(\ln x - 1) + x(\ln x - 1)' = \ln x - 1 + x\left(\frac{1}{x} - 0\right) =$$

$$= \ln x - 1 + 1 = \ln x$$

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u + v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$

$0! = 1$

$1! = 1$

$y'' = -x^{-2}$

$y''' = 2x^{-3}$

$y^{IV} = -6x^{-4}$

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

$y^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}$

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u + v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$

Правила дифференцирования

$= \left[\frac{1-1+\ln 1}{e \cdot e} = \frac{0}{0} \right] =$

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \to 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \left[\frac{2+1}{e} \right] = \frac{3}{e}$

$C' = 0;$ $\quad (Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $\quad (u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

Правила дифференцирования

$=\left[0\cdot\infty\right]=$

Пусть C – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$= \left[\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{П.Л.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} =$

$C' = 0;$ $\qquad (Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $\qquad (u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

$(u + v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

$$(x-1)' = x' - 1' = 1 - 0 = 1 \qquad \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad \frac{x-1}{x}$$

$$\lim \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 \cdot \ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \left[\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty\right] = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x} + \frac{1 \cdot x - (x-1)\cdot 1}{x^2}} = \left[\frac{-1}{1 + \frac{1-0}{1}}\right] = -\frac{1}{2}$$

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

§5. Исследование функции

Проводится по следующей схеме

1. Область определения функции $D(f)$. обязательно

   Множество значений функции $E(f)$. желательно

2. Четность, нечетность, периодичность

$f(x)$ – четная $\Leftrightarrow$ $\forall x, (-x) \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$ D(f) симм.

(график симметричен относительно оси Oy) относительно нач. координат

$f(x)$ – нечетная $\Leftrightarrow$ $\forall x, (-x) \in D(f)$ $f(-x) = -f(x)$

(график симметричен относительно начала координат)

Если ни одно условие не выполняется, то

$f(x)$ – функция общего вида.

$f(x)$ – периодическая с периодом $T \Leftrightarrow$

$\forall x, (x-T), (x+T) \in D(f) \quad f(x) = f(x-T) = f(x+T)$

(определяется только для тригонометрических функций)

$\left.\begin{array}{l} y = \sin x \\ y = \cos x \end{array}\right\} T = 2\pi$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} y = \mathrm{tg}\, x \\ y = \mathrm{ctg}\, x \end{array}\right\} T = \pi$

3. Точки пересечения графика с осями координат

Пересечение с Oy существует, если $x = 0 \in D(f)$, точка пересечения $(0, f(0))$

(график пересекает Oy не более чем в одной точке).

Пересечение с Ox определяется в результате решения уравнения: $f(x) = 0$.

Уральский федеральный университет

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $(Cu)' = Cu';$

$(u+v)' = u' + v';$ $(u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$\lim f(x) = \infty$

$C' = 0;$ $(Cu)' = Cu';$

$(u+v)' = u' + v';$ $(u \cdot v)' = u'v + uv';$

$b = \lim_{x \to \infty} y(x)$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $\qquad (Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $\qquad (uv)' = u'v + uv';$

Возрастает

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

убывает

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

• Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $\qquad (Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $\qquad (u \cdot v)' = u'v + uv';$

y' + max + −

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

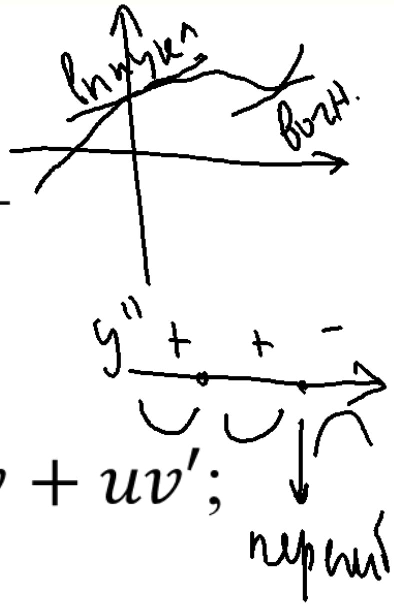
Дифференцирование сложной функции

y' + max − min +

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

Правила дифференцирования



Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C' = 0;$ $\qquad$ $(Cu)' = Cu';$

$(u + v)' = u' + v';$ $\qquad$ $(u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$y'_x = y'_u u'_x$.

По результатам исследования строят график функции и при необходимости находят

7.* Дополнительные точки.

Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u=u(x), v=v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

$C'=0$; $(Cu)'=Cu'$;

$(u+v)'=u'+v'$; $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, если $v\neq 0$.

Дифференцирование сложной функции

Если $y=f(u)$, $u=u(x)$, т.е. $y=f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u=u(x)$ имеют производные, то

$y'_x=y'_u u'_x$.

1) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0,+\infty)=R\setminus\{0\}$ $E(y)=?$

2) $y(-x)=\frac{(-x)^3+4}{(-x)^2}=\frac{-x^3+4}{x^2}$ числит. знамен.

$y(-x)\neq y(x)$

$y(-x)\neq -y(x)$

функция общ. вида

3) $\{0\}\notin D(y) \Rightarrow$ график не пересекает Oy

Пересечение с Ox: $\frac{x^3+4}{x^2}=0$

$\begin{cases} x^3+4=0 \\ x^2\neq 0 \end{cases}$

$x^3=-4$

$x=-\sqrt[3]{4}\approx -1,..$

т. пересечения $(-\sqrt[3]{4};0)$

асимптота

4) Асимптоты

Вертикальная: $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+4}{x^2} = \left[\frac{4}{0}\right] = \infty \Rightarrow x=0$ в. ас.

Невертик.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = 1 \quad (\neq 0 \Rightarrow \text{наклонная})$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(y(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right) = [\infty-\infty] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2} = 0$$

$y = kx+b \Rightarrow y = x$ – накл. ас.

5) $y' = \left(\frac{x^3+4}{x^2}\right)' = \frac{(x^3+4)'\cdot x^2 - (x^3+4)\cdot(x^2)'}{x^4} = \frac{3x^2\cdot x^2 - (x^3+4)\cdot 2x}{x^4} =$

$= \frac{x(3x^3-2x^3-8)}{x^4} = \frac{x^3-8}{x^3}$

$y' = 0$: $\begin{cases} x^3 - 8 = 0 \\ x^3 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

y': $+$ (0) $-$ (2) $+$

y: $\nearrow$ 0 $\searrow$ 2 $\nearrow$

~~max~~ min

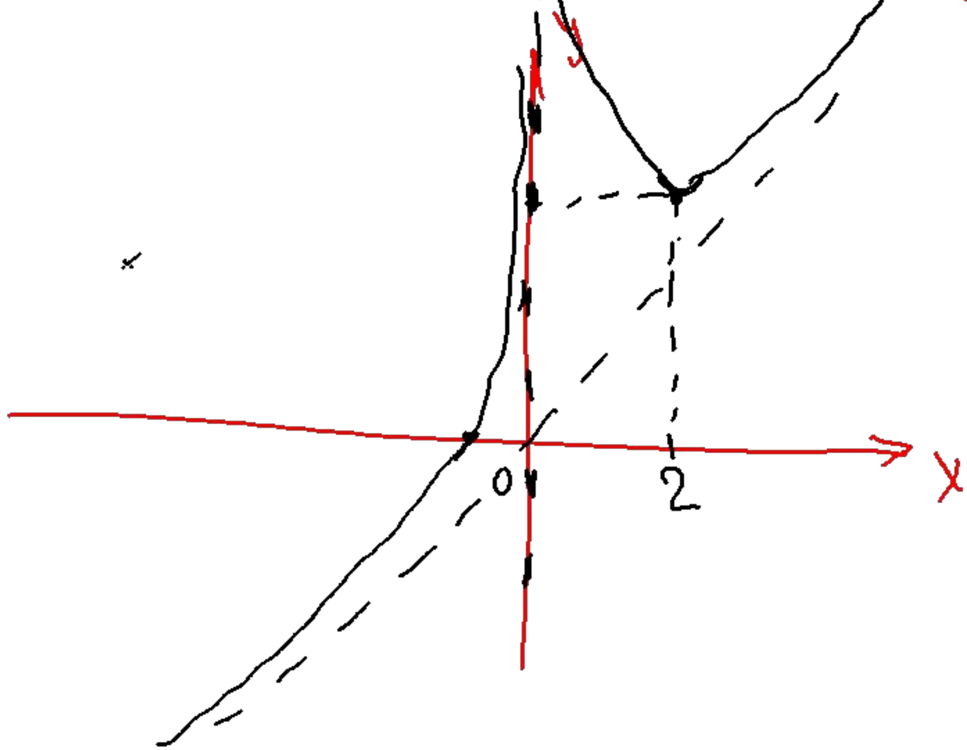
$y(0) = ?$

$y(2) = \frac{2^3+4}{2^2} = \frac{12}{4} = 3$

$(2, 3)$ - min

б) $y'' = \left(\frac{x^3-8}{x^3}\right)' = \left(1 - \frac{8}{x^3}\right)' = -8\left(x^{-3}\right)' = 24x^{-4} = \frac{24}{x^4}$

$y'' = 0$ нет реш., $x \neq 0$



• *Правила дифференцирования*

Пусть C – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

1) $D(y) = R = (-\infty, +\infty)$

$C' = 0$; $(Cu)' = Cu'$;

2) четн., нечет.

$(u + v)' = u' + v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$y(-x) = -x e^{x}$ $y(-x) \neq y(x)$ $y(-x) \neq -y(x)$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

ф-ция общего вида

3) Пересечение с Oy: $y(0) = 0$

Дифференцирование сложной функции

Пересеч. с Ox: $x e^{-x} = 0$

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т.е. $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ e^{-x} = 0 \text{ – нет реш.} \end{array}\right.$ $\Rightarrow x = 0$

$y'_x = y'_u u'_x$.

График пересекает оси только $(0,0)$

4) Верт. асимптот нет

Невертик.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{-x}=?$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0=k \text{ (возм. гориз. ас.)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=\infty \text{ (нет ас.)}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{П.Л}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=$$

$$=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$$

$y=kx+b \Rightarrow y=0$ – гориз. ас. (при $x\to+\infty$)

5) $y' = (xe^{-x})' = x'e^{-x} + x\cdot(e^{-x})' = e^{-x} + x\cdot e^{-x}\cdot(-x)' =$

$= e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$y' = 0 \qquad 1-x=0$

$x = 1$

y': $+$ | $-$

y: $\nearrow$ 1 $\searrow$

max

$y(1) = 1\cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$

6) $y'' = (e^{-x}(1-x))' = (e^{-x})'(1-x) + e^{-x}(1-x)' =$

$= -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = -e^{-x}(1-x+1) = -e^{-x}(2-x)$

$y'' = 0 \qquad 2-x=0$

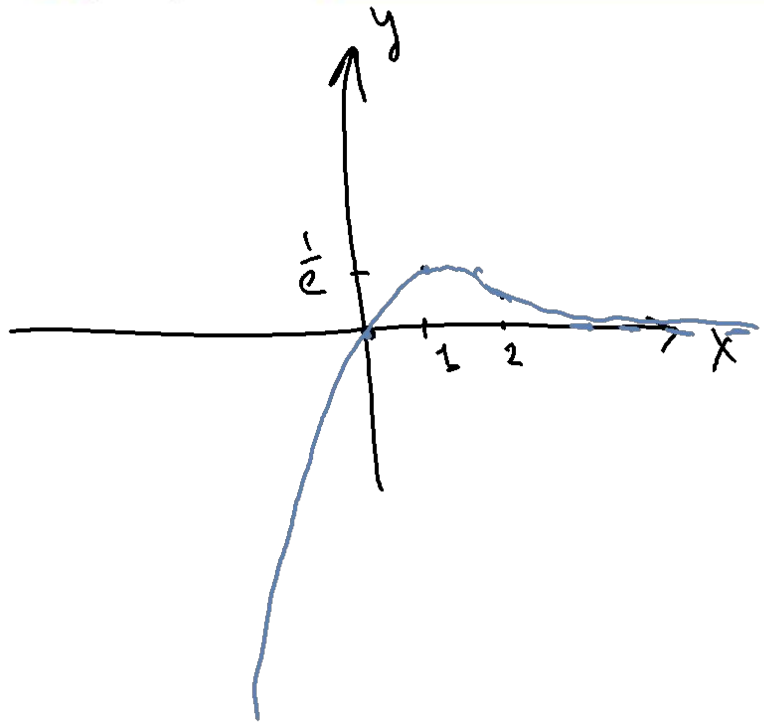
$x = 2$

y'': $-$ | $+$

y: $\cap$ 2 $\cup$

перегиб

$y(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$



$$\frac{1}{e} > \frac{2}{e^2}$$

$$E = \left(-\infty; \frac{1}{e}\right]$$