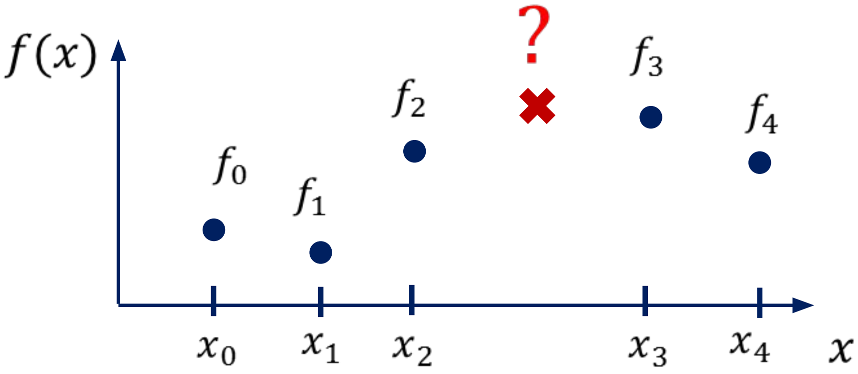
Интерполяция функций

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна

natalia.zavyalova@gmail.com

Задача интерполяции



Интерполяция – это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

x_i - узлы интерполяции

Алгебраическая интерполяция

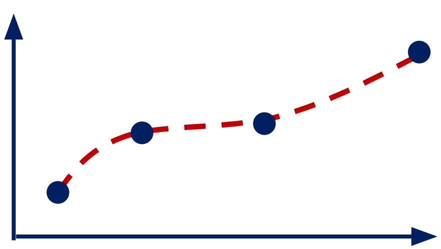
$$\{f_i\}_{i=0}^{N} \xrightarrow{\quad I \quad} P_N(x)$$

Сеточная функция

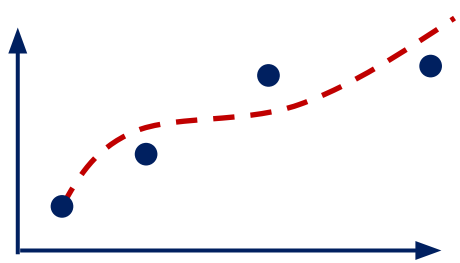
Интерполяционный полином

Основное условие интерполяции: равенство функции и интерполяционного полинома в узлах интерполяции

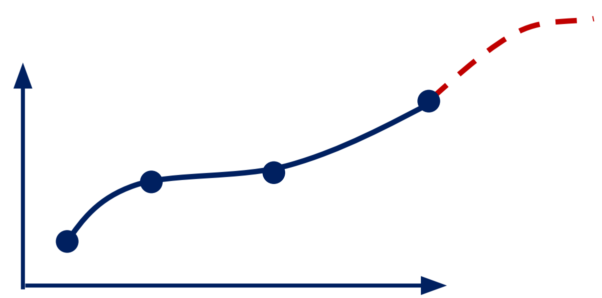
$$\boxed{P_N(x_i) \equiv f_i}$$



Интерполяция

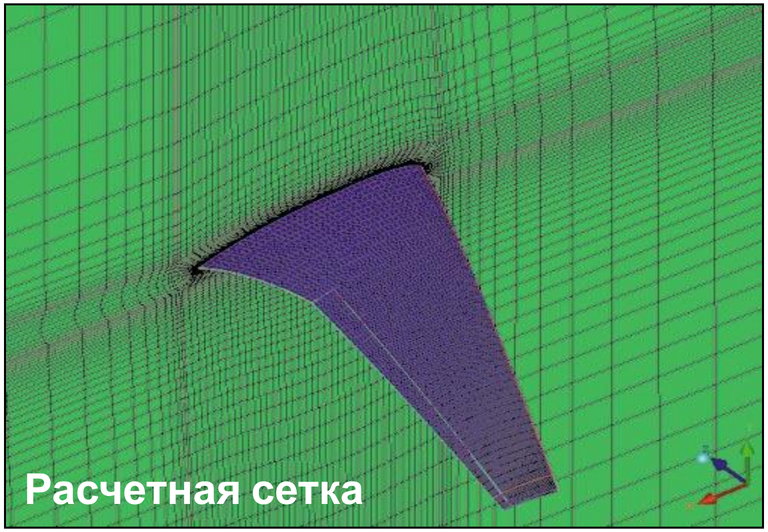


Аппроксимация



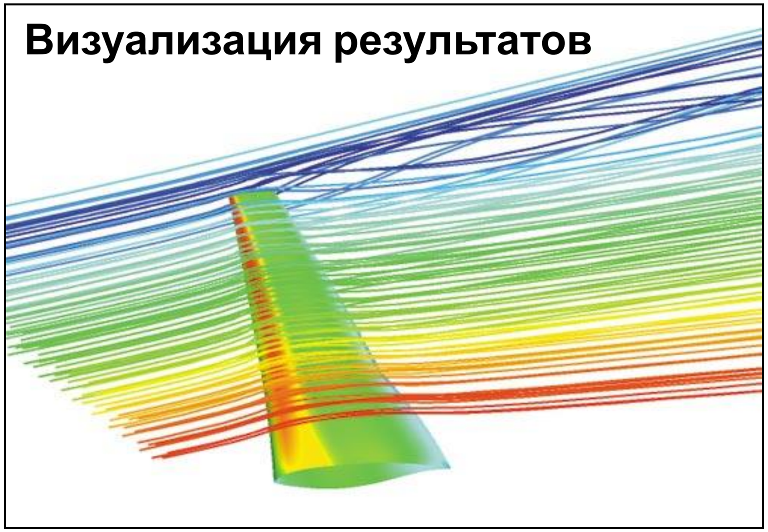
Экстраполяция

Пример из области автоматизации проектирования



Математическая модель течения

Численная реализация



Иллюстрации из: Плыкин М. FSI-технологии ANSYS // САПР и графика. – 2006. – Т. 7.

Методы построения интерполяционного полинома

Интерполяция алгебраическими полиномами

Сеточная функция

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	…	x_N
$f(x)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	…	f_N

Строим интерполянт в виде полинома:

$$P_N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N$$

неизвестны

Требуем выполнения основного условия интерполяции $P_N(x_i) = f_i$ и находим a_i из решения СЛАУ:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_N x_0^N = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_N x_1^N = f_1 \\ \quad\cdots \\ a_0 + a_1 x_N + \cdots + a_N x_N^N = f_N \end{cases}$$

Определитель матрицы – детерминант Вандермонда. В случае различия всех узлов сетки он отличен от нуля, и, значит, существует единственное решение системы – набор коэффициентов.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j \le i \le N} (x_i - x_j) = 0$$

$$\Updownarrow$$

Существует пара (x_i, x_j): $x_i = x_j, \quad i \neq j$

Утверждение 2.1. Если заданы $N + 1$ узлов x_0, …, x_N среди которых нет совпадающих, и значения функции в этих узлах $f(x_0)$, …, $f(x_N)$, то существует один и только один многочлен степени не выше N, принимающий в узлах x_i заданные значения $f(x_i)$.

Метод Лагранжа

Строим интерполяционный полином в виде:

$$L_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) f_k$$

Из основного условия интерполяции получаем $L_N(x_i) = f_i \quad \forall i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x_i) f_k = f_i$

Соответственно $\varphi_k(x_i) = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases} \qquad i = 0, \dots, N$

Каждая из функций $\varphi_k(x)$ имеет не менее N нулей на $[a, b]$. $\Rightarrow$ Ищем $\varphi_k(x)$ в виде полинома степени N

$$c_k(x) = \alpha_k (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_N)$$

Из условия $\varphi_k(x_k) = 1$ находим α_k

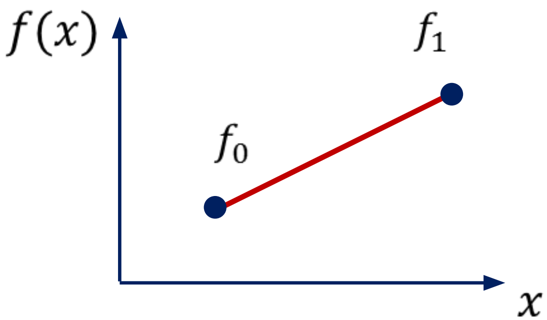
$$\alpha_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_N)}$$

$$\boxed{\varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N} \frac{x - x_i}{x_k - x_j}}$$

Примеры построенных методом Лагранжа полиномов

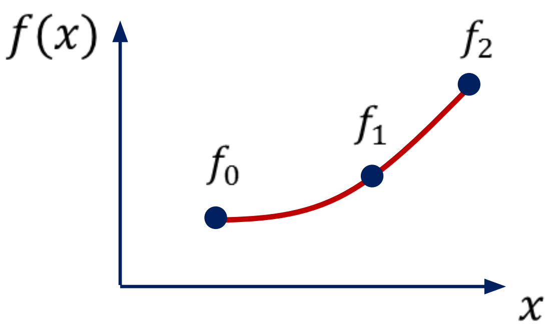
$$L_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) f_k \qquad \varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{N} \frac{x - x_i}{x_k - x_j}$$

Линейная интерполяция:



$$L_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \varphi_k(x) f_k = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Квадратичная интерполяция:



$$L_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \varphi_k(x) f_k = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$

$$+ f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Метод Ньютона

Интерполяционный полином в форме Ньютона – разностный аналог формулы Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2 f''(x_0)}{2!} + \cdots$$

Разделенная разность первого порядка

$$f_{ij} = f(x_i, x_j) = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}, \qquad i, j = 0, \dots, N \quad i \neq j$$

Разделенная разность второго порядка

$$f_{j\, j+1\, j+2} = f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}) = \frac{f_{j j+1} - f_{j+1\, j+2}}{x_j - x_{j+2}} = \frac{\dfrac{f_j - f_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + \dfrac{f_{j+1} - f_{j+2}}{x_{j+1} - x_{j+2}}}{x_j - x_{j+2}}$$

Разделенная разность k-го порядка

$$f_{j\, j+1\, j+2 \dots j+k} = f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \frac{f_{j+1 \dots j+k} - f_{j \dots j+k-1}}{x_{j+k} - x_j}$$

Интерполяционный полином в форме Ньютона

$$P_N = f_0 + (x - x_0)f_{01} + (x - x_0)(x - x_1)f_{012} + \cdots (x - x_0) \dots (x - x_{N-1})f_{012 \dots N}$$

Метод Ньютона

Разделенная разность k-го порядка

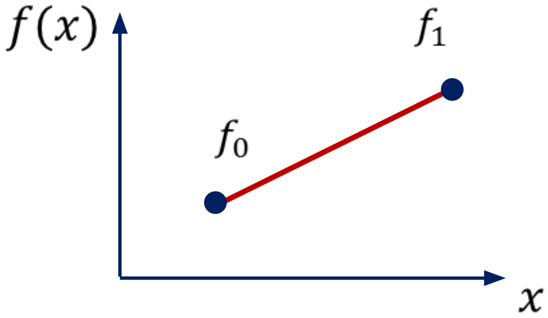
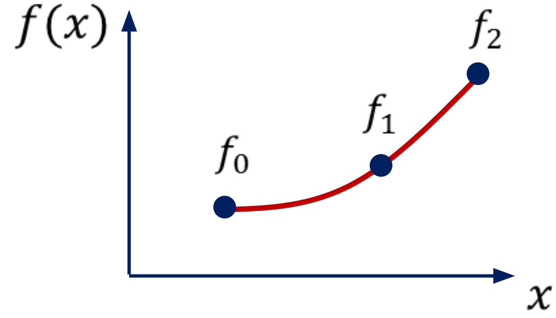
$$f_{j\ j+1\ j+2\ \dots j+k} = f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \frac{f_{j+1\dots j+k} - f_{j\dots j+k-1}}{x_{j+k} - x_j}$$

x_0	f_0				
		f_{01}			
x_1	f_1		f_{012}		
		f_{12}	.		
x_2	f_2	.	.	...	$f_{0\dots N}$
.	.	.	.		
.	.	.	$f_{N\text{-}2\ N\text{-}1\ N}$		
.	.	$f_{N\text{-}1\ N}$			
x_N	f_N				

Интерполяционный полином в форме Ньютона

$$P_N = f_0 + (x - x_0)f_{01} + (x - x_0)(x - x_1)f_{012} + \cdots (x - x_0)\dots(x - x_{N-1})f_{012\dots N}$$

Примеры построенных методом Ньютона полиномов

Линейная интерполяция	Квадратичная интерполяция
	

Лагранж

$$L_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$L_2(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

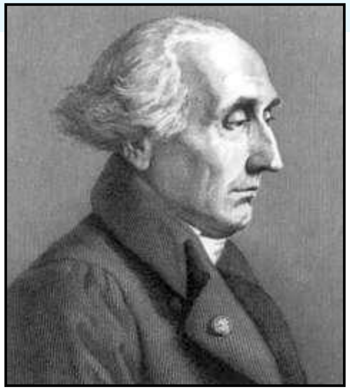
Ньютон

$$P_1(x) = f_0 + (f_1 - f_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$P_2(x) = f_0 + (f_1 - f_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

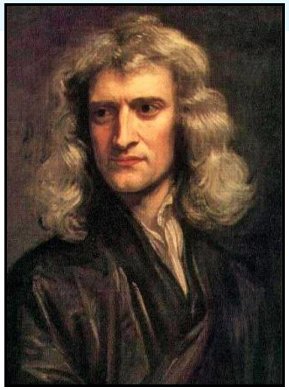
Добавка к $P_1(x)$

Лагранж vs Ньютон



Используют при доказательствах теорем

Рекомендуется использовать при программной реализации



Удобно применять, когда узлы интерполяции фиксированы и интерполируется не одна, а несколько функций.

Удобно применять, когда интерполируется одна и та же функция, но число узлов интерполяции постепенно увеличивается.

$$L_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} =$$

$$= x \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} - \frac{f_0 x_1 - f_1 x_0}{x_0 - x_1}$$

$$P_1(x) = f_0 + (f_1 - f_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} =$$

$$= x \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + \frac{f_0 x_1 - f_1 x_0}{x_1 - x_0}$$

$L_N(x)$ и $P_N(x)$ – различные формы записи одного и того же многочлена

Погрешность интерполяции

Погрешность интерполяции

Опр: Разница между функцией и интерполяционным полиномом N-ой степени в точке x называется остаточным членом интерполяции: $R_N(x) = f(x) - L_N(x)$

Утверждение 2.2. Пусть на отрезке $[a,b]$ функция $u(x)$ $(N+1)$ раз непрерывно дифференцируема. Тогда:

$$\boxed{R_N(x) = \frac{u^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod_{j=0}^{N}(x - x_j), \qquad \xi \in [a,b]}$$

Доказательство. Если $x = x_j$, то утверждение верно. Иначе введем в рассмотрение функцию:

$$g(t) = f(t) - L_N(t) - [f(x) - L_N(x)]\prod_{j=0}^{N}\frac{(t - x_j)}{(x - x_j)}$$

Функция $g(t)$, имеет $N + 2$ нуля на $[a, b]$:

$$g(x_i) = f(x_i) - L_N(x_i) - [f(x) - L_N(x)]\prod_{j=0}^{N}\frac{(x_i - x_j)}{(x - x_j)} = 0, \qquad i = 0, \ldots N$$

$$g(x) = f(x) - L_N(x) - [f(x) - L_N(x)]\prod_{j=0}^{N}\frac{(x - x_j)}{(x - x_j)} = 0.$$

По обобщенной теореме Ролля: $\exists \xi \in [a,b]\colon\ g^{(N+1)}(\xi) = 0$

$$g^{(N+1)}(\xi) = f^{(N+1)}(\xi) - 0 - [f(x) - L_N(x)]\frac{(N+1)!}{\prod_{j=0}^{N}(x - x_j)} = 0$$

$$f(x) - L_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod_{j=0}^{N}(x - x_j) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_N(x)| = \frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|}{(N+1)!}\left|\prod_{j=0}^{N}(x - x_j)\right|$$

Погрешность интерполяции на равномерной сетке

Утверждение 2.3. Для случая равномерной сетки на отрезке $[a,b]$

$$\{x_i\}_{i=0}^{N}, \qquad x_i = a + ih, \qquad h = (b-a)/N$$

для любого x на отрезке $[a,\ b]$

$$\boxed{|f(x) - L_N(x)| \le \frac{h^{N+1}}{N+1} \max_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(N+1)}(\xi)\right|.}$$

Доказательство.
Положим

$$x = x_k + \alpha h, \qquad \alpha \in (0,1), \qquad k = 0, \dots N-1$$

Тогда

$$x - x_j = kh + \alpha h - jh = h(k + \alpha - j)$$

$$\prod_{j=0}^{N}(x - x_j) = h^{N+1}\prod_{j=0}^{N}(k + \alpha - j) \le h^{N+1} N!$$

$$|f(x) - L_N(x)| = \frac{\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|}{(N+1)!}\left|\prod_{j=0}^{N}(x - x_j)\right|$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - L_N(x)| \le \frac{h^{N+1}}{N+1} \max_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(N+1)}(\xi)\right|.$$

j	0	...	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	...	N
$\lvert k+\alpha-j\rvert$	$k+\alpha$	...	$2+\alpha$	$2+\alpha$	α	$1-\alpha$	$2-\alpha$	...	$N-k-\alpha$
Маж. мн. в $N!$	$k+1$	...	3	2	1	1	$2+k$	...	N

Погрешность в задаче экстраполяции

Экстраполяция – аппроксимация функции **вне** отрезка, на котором заданы узлы интерполяции.

$$x \in [b, b+h]: \qquad |R_N(x)| \le h^{N+1} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(N+1)}(\xi) \right|$$

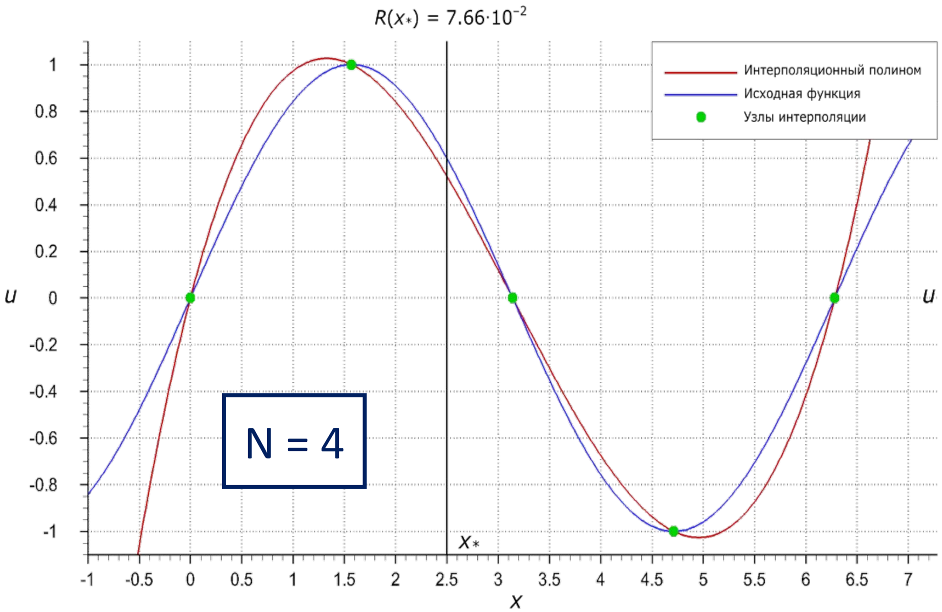
$$x \in [b+h, b+2h]: \quad |R_N(x)| \le (N+2) h^{N+1} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(N+1)}(\xi) \right|$$

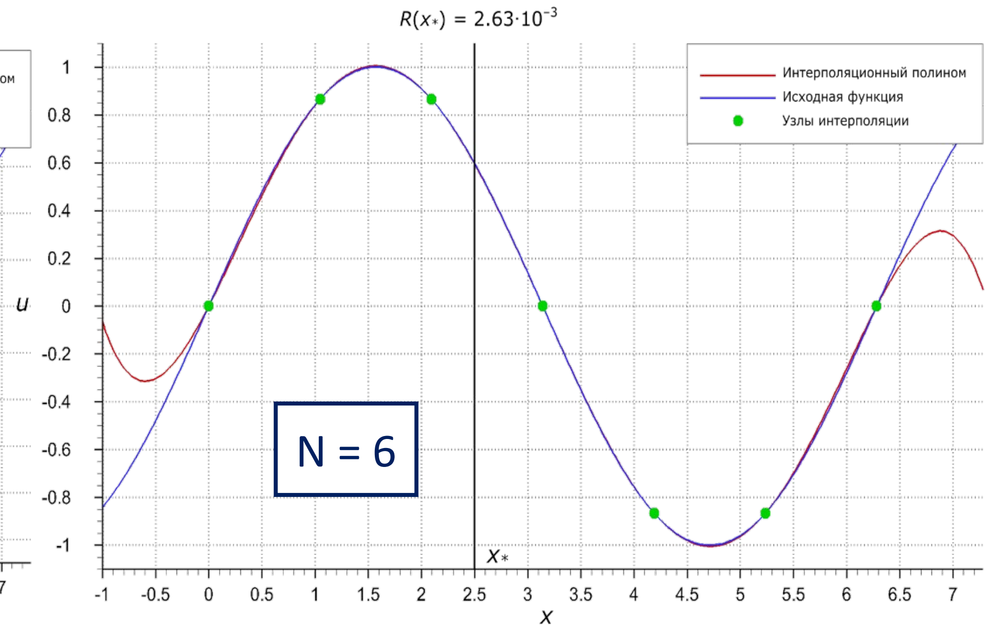
$$x \in [b+2h, b+3h]: \quad |R_N(x)| \le \frac{(N+2)(N+3)}{2} h^{N+1} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(N+1)}(\xi) \right|$$

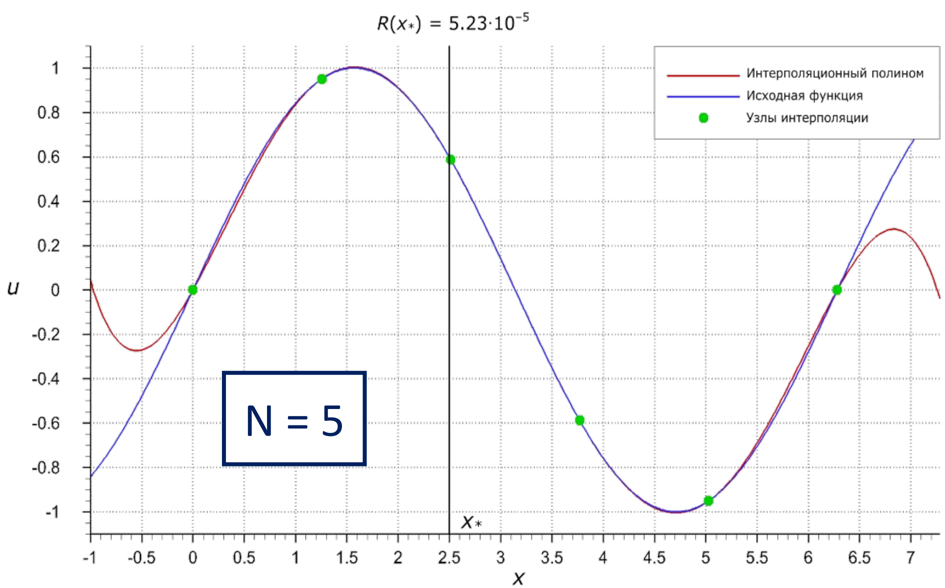
Оценка ухудшается как за счет появления множителей, пропорциональных *N*, так и за счет увеличения оценки производной.

Экстраполяция функции менее надежна, чем интерполяция, и ее точность резко падает по мере удаления от носителя информации.

$$u(x) = \sin x, \qquad x \in [0, 2\pi], \qquad x_* = 2.5$$







$$P_4(x) = 1.7x^4 - 8.1 \cdot 10^{-1}x^3 + 8.6 \cdot 10^{-2}x^2 + 4.2 \cdot 10^{-9}\, x$$

$$P_5(x) = -6.0 \cdot 10^{-3}x^5 + 9.4 \cdot 10^{-2}x^4 - 4.3 \cdot 10^{-1}x^3 + 3.4 \cdot 10^{-1}x^2 + 8.3 \cdot 10^{-1}\, x$$

$$P_6(x) = -1.6 \cdot 10^{-10}x^6 - 5.7 \cdot 10^{-3}x^5 + 9.0 \cdot 10^{-2}x^4 - 4.1 \cdot 10^{-1}x^3 + 3.0 \cdot 10^{-1}x^2 + 8.7 \cdot 10^{-1}\, x$$

Увеличение числа узлов интерполяции

Сетка на $[a, b]$: $$\Omega_N = \{\{x_i\}_{i=0}^N : a \le x_0 < x_1 < \dots < x_N \le b\}$$

Рассмотрим последовательность сеток с возрастающим числом узлов:

$$\Omega_0 = \left\{x_0^{(0)}\right\}, \Omega_1 = \left\{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\right\}, \dots, \Omega_N = \left\{x_0^{(N)}, x_1^{(N)}, \dots x_N^{(N)}\right\}, \dots$$

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$. Построим последовательность интерполяционных многочленов для функции $f(x)$ по ее значениям в узлах сетки Ω_N: $L_N[f(x)]$.

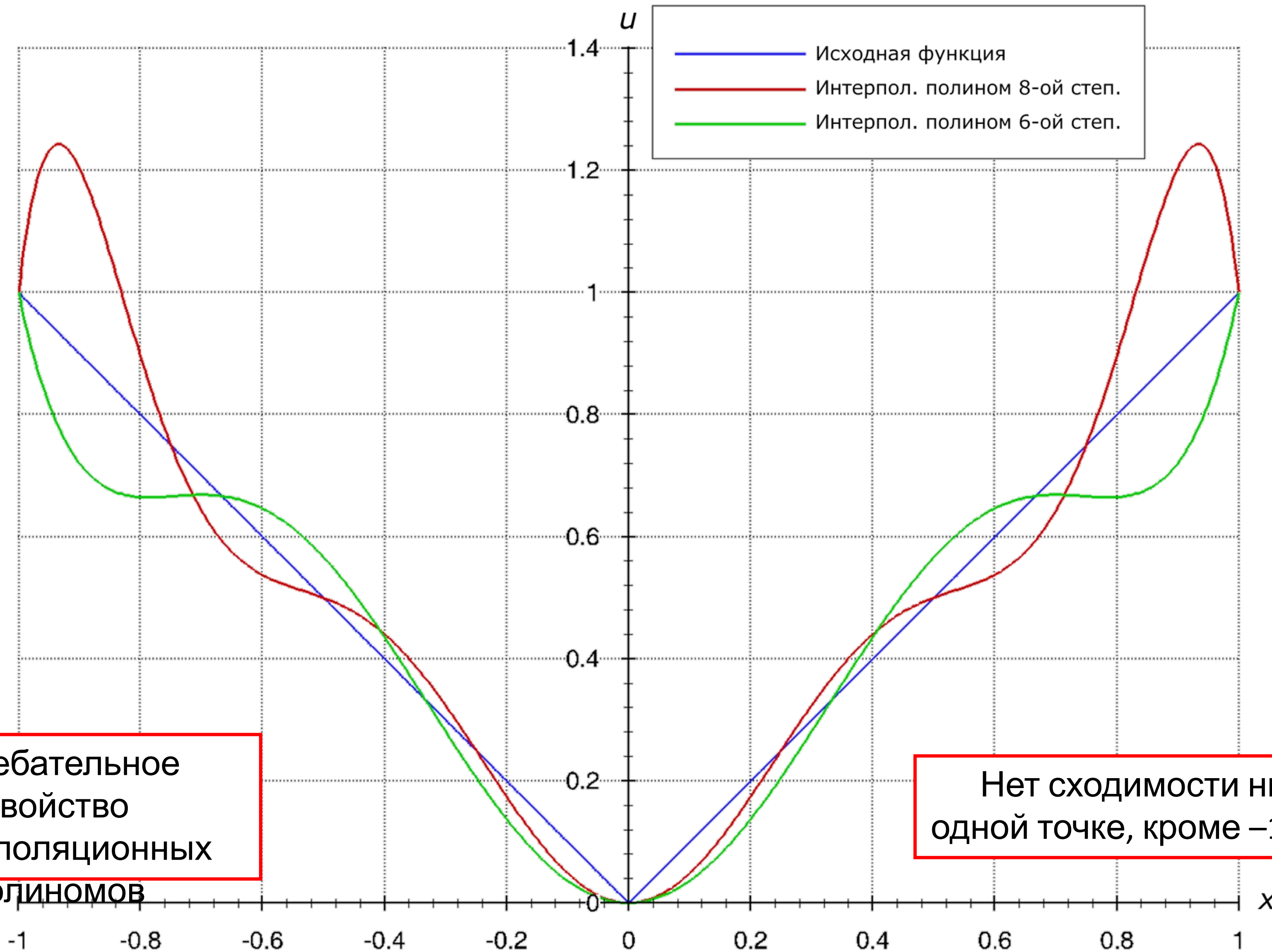
Поточечная сходимость в точке $x^* \in [a, b]$:

$$\exists \lim_{N\to\infty} L_N[f(x^*)] = \lim_{x_i \to x^*} f(x^*) + L'_N(x_i - x^*) + O(x_i - x^*)^2 = f(x^*)$$

Равномерная сходимость на $[a, b]$:

$$\lim_{N\to\infty} \left\{\max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_N[f(x)]|\right\} = \lim_{N\to\infty} \left\{\max_{x\in[a,b]} \left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{N} (x - x_j)\right|\right\} = 0$$

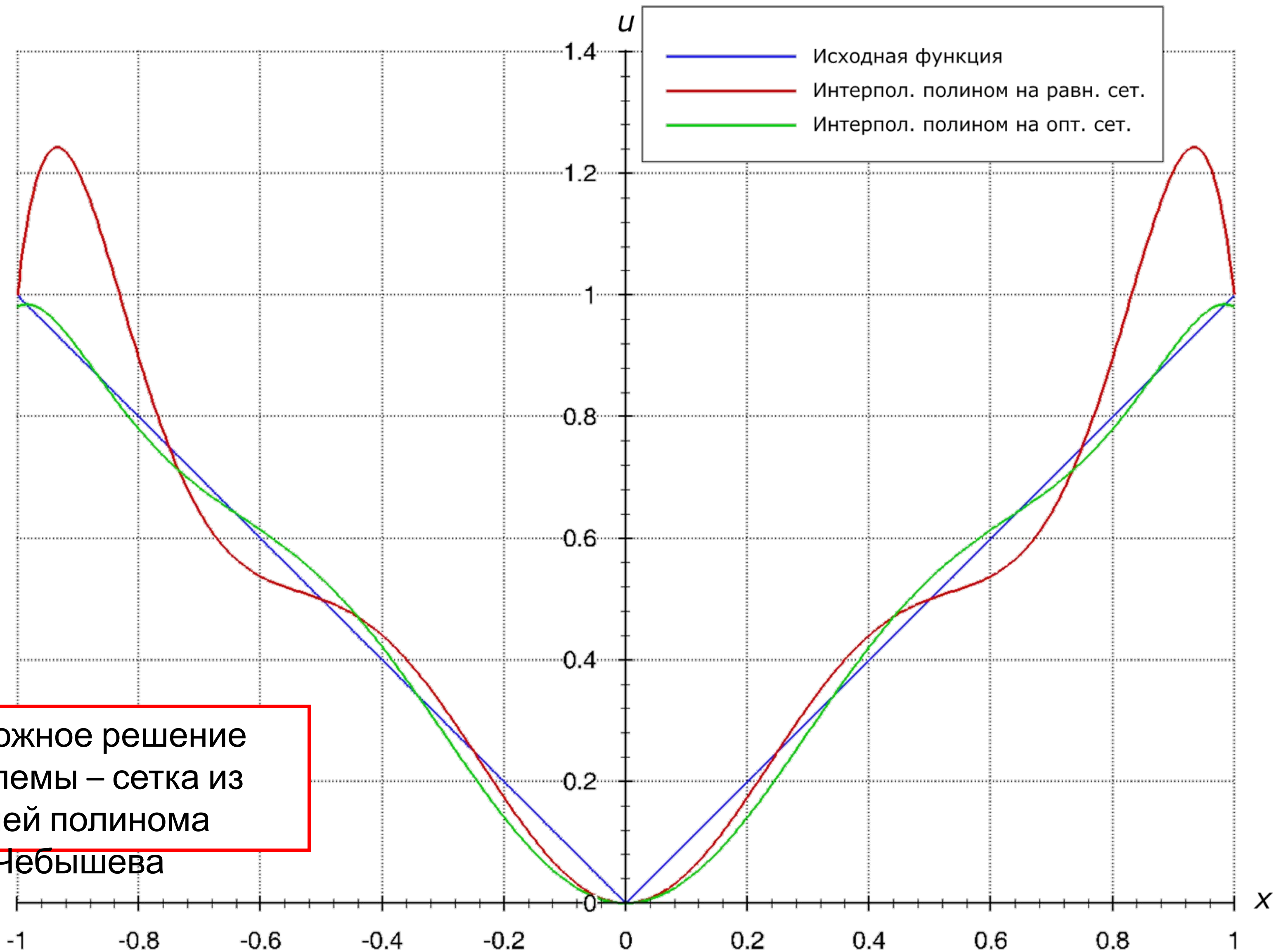
Пример С.Н. Берштейна $u(x) = |x|$, равномерная сетка



Колебательное свойство интерполяционных полиномов

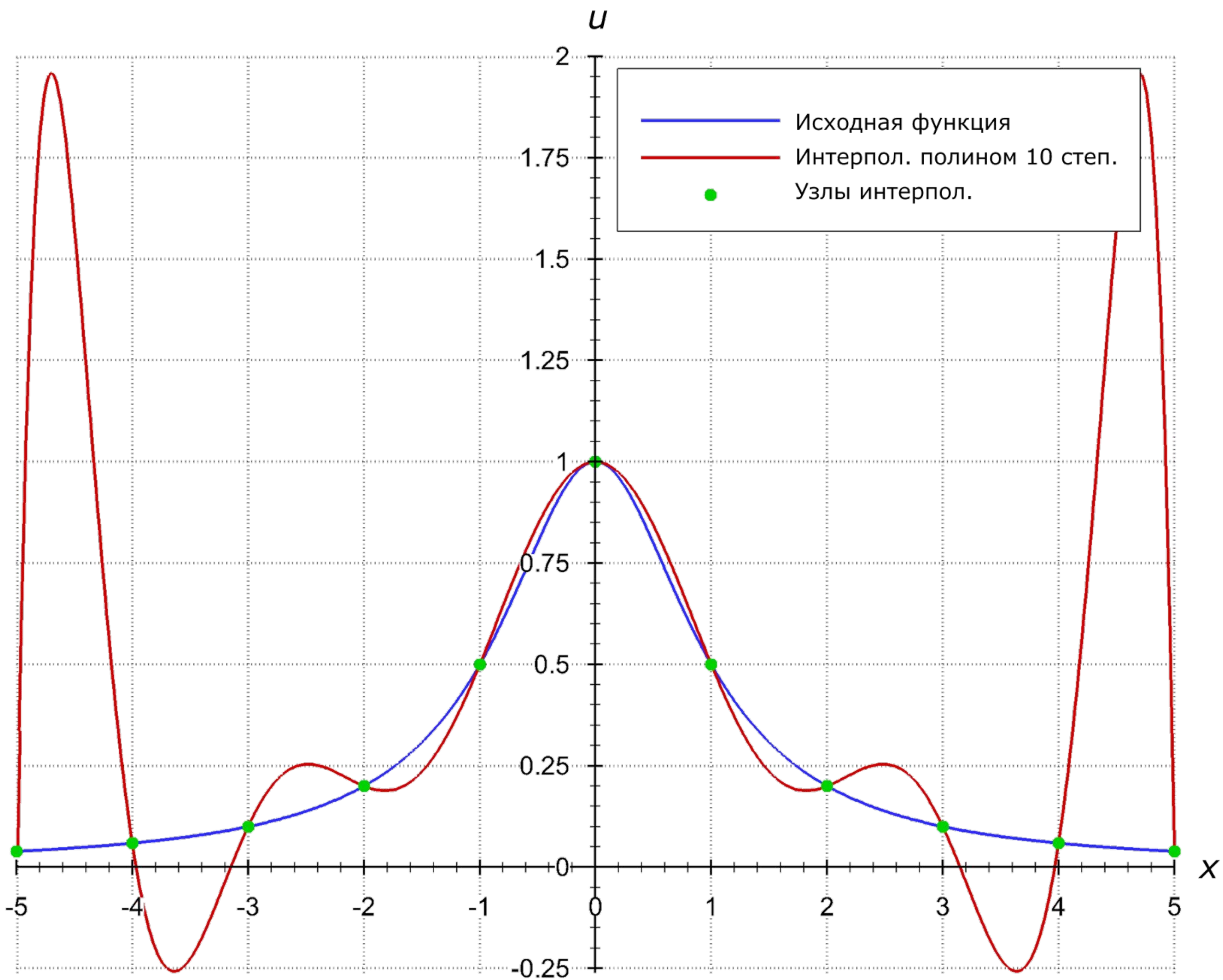
Нет сходимости ни в одной точке, кроме –1, 0, 1.

$U(x) = |x|$, равномерная сетка vs оптимальная сетка

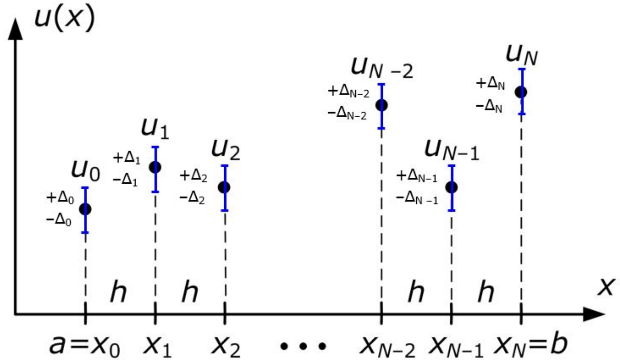


Возможное решение проблемы – сетка из нулей полинома Чебышева

Пример Рунге, $u(x) = 1/(\ 1 + x^2\ )$, равномерная сетка



Влияние неустранимой погрешности



$$\Delta = \max_i \Delta_i$$

$L_N(x)$ - Интерполяционный полином, построенный по **точным** значениям функции

$\tilde{L}_N(x)$ - Интерполяционный полином, построенный по **возмущенным** значениям функции

$$|\tilde{R}_N(x)| = |u(x) - \tilde{L}_N(x)| = |u(x) - L_N(x) + L_N(x) + \tilde{L}_N(x)| \le |u(x) - L_N(x)| + |L_N(x) - \tilde{L}_N(x)| \le$$

$$\le |R_N(x)| + \Delta_p$$

Знаем как оценить

Необходимо оценить

$$\Delta_p = |L_N(x) - \tilde{L}_N(x)| = \left| \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) u_k - \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) \tilde{u}_k \right| \qquad \varphi_k(x) = \prod_{i=0, i\ne k}^{N} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$\Delta_p = \left| \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x)(u_k - \tilde{u}_k) \right| \le \sum_{k=0}^{N} \Delta_k |\varphi_k(x)| \le \mathbf{L}\Delta$$

$$\boxed{\mathbf{L} = \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^{N} |\varphi_k(x)|}$$

Константа Лебега

Пример. Константа Лебега для случая линейной интерполяции

$$\tilde{L}_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \varphi_k(x)\, \tilde{u}_k = \tilde{u}_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \tilde{u}_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \qquad x_0 = a, x_1 = b$$

$$\mathbf{L} = \max_{x\in[a,b]} \left(\left| \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right| + \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| \right) = \max_{x\in[a,b]} \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) = 1$$

Интерполяция сплайнами

Недостатки глобальной интерполяции

Глобальная интерполяция многочленом высокой степени $(N > 10 \div 20)$ нежелательная, поскольку:

- При вычислении многочлена высокой степени могут накапливаться ошибки округления (например как при суммировании ряда Тейлора);
- Интерполяционный многочлен может плохо приближать исходную функцию (примеры Берштейна и Рунге на равномерной сетке);
- Задача интерполяции может быть плохо обусловлена (интерполяционный многочлен чувствителен к возмущениям значений в узлах сетки);

Частично указанные проблемы можно решить введением Чебышевской сетки, но не всегда такое возможно.

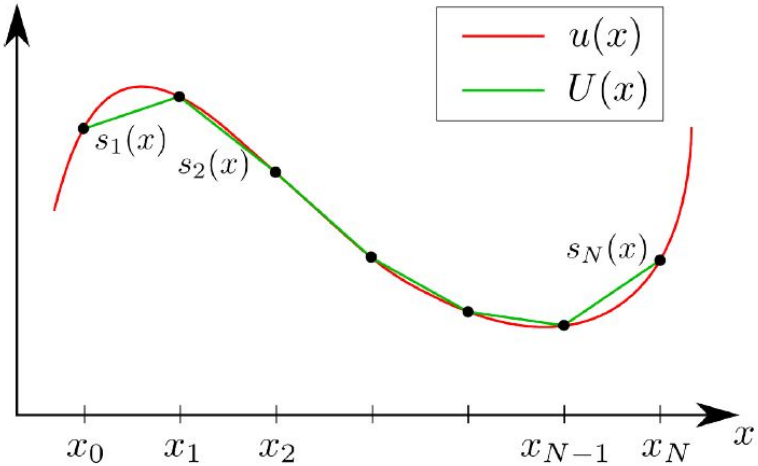
Задача интерполяции: По данному набору значения $u(x)$ на сетке $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ восстановить функцию U(x),

Совпадающую с $u(x_i)$ в узлах x_i.

- Ранее функцию $U(x)$ мы искали в виде полинома от x
- Рассмотрим теперь вариант, когда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция является некоторым многочленом $s_i(x)$, причем для каждого отрезка эта функция своя.
- В такой постановке задача имеет множество решений. Единственность решения можно обеспечить потребовав от функции U(x) некоторой гладкости в местах стыков функций $s_i(x)$, то есть в узлах интерполяции

Примеры сплайнов

Кусочно-линейная интерполяция

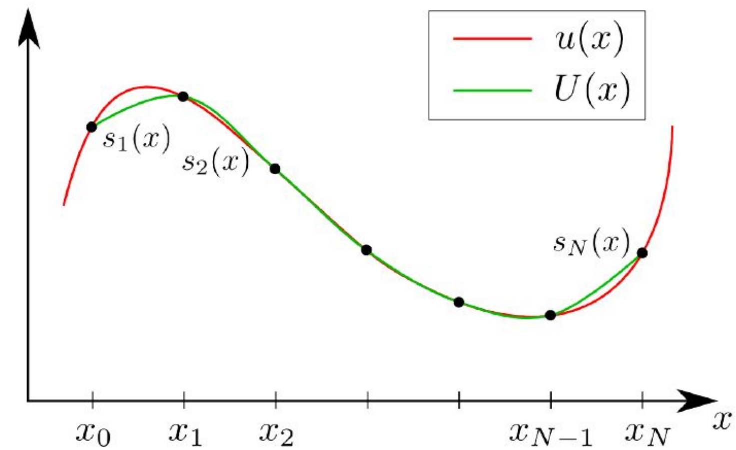


$$U(x) = s_i(x), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s_i(x) = u_{i-1}\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + u_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

На каждом отрезке функция приближается линейной. Дополнительных условия не требуется, условия гладкости на $U(x)$ в данном случае не налагаются.

Гладкая кусочно-кубическая интерполяция



$$U(x) = s_i(x), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$$

$$s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i)$$

На каждом отрезке функция приближается кубическим многочленом. Дополнительно требуется непрерывность первой и второй производных $U(x)$ на всем отрезке $[x_0, x_N]$.

Построение сплайна

Характеристики сплайна

- Степенью сплайна называется максимальная из степеней многочленов $s_i(x)$.
- **Гладкостью** сплайна называется количество непрерывных производных, которые U(x) имеет на всем отрезке $[x_0, x_N]$.
- **Дефектом** сплайна называется разность между степенью и гладкостью сплайна.

Например, кусочно-линейный сплайн имеет степень 1, гладкость 0 и дефект 1.
Гладкий кусочно-кубический сплайн имеет степень 3, гладкость 2 и дефект 1.

Построение сплайна

Найдем выражения для функций $s_i(x)$, составляющих гладкий кубический сплайн.

Поскольку сплайн имеет степень 3, все функции $s_i(x)$ являются многочленами степени 3. Запишем их в виде:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

Такая форма записи соответствует ряду Тейлора для $s_i(x)$ в окрестности точки x_i. Поскольку $s_i(x)$ – кубический многочлен, его ряд Тейлора обрывается после кубического слагаемого. Из аналогии с рядом Тейлора заключаем, что

$$a_i = s_i(x_i) \qquad b_i = s_i{}'(x_i) \qquad c_i = s_i{}''(x_i) \qquad d_i = s_i{}''(x_i)$$

Хотя в этом можно убедиться и обычной подстановкой.

Построение сплайна

Условия непрерывности

Выразим условия непрерывности и гладкости сплайна в терминах коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i. Для удобства введем обозначение для длины i-го отрезка $h_i = x_i - x_{i-1}$. Запишем условие непрерывности $U(x)$ в точке x_{i-1}:

$$a_{i-1} = s_{i-1}(x_{i-1}) = s_i(x_{i-1}) = a_i + b_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{c_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x_{i-1} - x_i)^3$$

Пользуясь обозначением $h_i = x_i - x_{i-1}$,

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2}h_i^2 - \frac{d_i}{6}h_i^3, \qquad i = 2, \ldots, N. \qquad (1)$$

Условия гладкости

Выпишем условия непрерывности первой и второй производной $U(x)$ в точках x_{i-1}:

$$b_{i-1} = s'_{i-1}(x_{i-1}) = s'_i(x_{i-1}) = b_i + c_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{d_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2,$$

$$c_{i-1} = s''_{i-1}(x_{i-1}) = s''_i(x_{i-1}) = c_i + d_i(x_{i-1} - x_i).$$

Пользуясь h_i

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2}h_i^2, \qquad i = 2, \ldots, N, \qquad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \qquad i = 2, \ldots, N. \qquad (3)$$

Построение сплайна

Основное условия интерполяции

Выпишем условия интерполирования, то есть $U(x_i) = u(x_i)$:

$$a_i = s_i(x_i) = U(x_i) = u(x_i), \qquad i = 1, \dots, N.$$

Кроме этого, есть еще условия в точке x_0,

$$a_1 + b_1(x_0 - x_1) + \frac{c_1}{2}(x_0 - x_1)^2 + \frac{d_1}{6}(x_1 - x_0)^3 = s_1(x_0) = U(x_0) = u(x_0).$$

Мы не требуем дополнительно $s_{i+1}(x_i) = U(x_i)$, поскольку эти условия автоматически удовлетворяются при выполнении условия непрерывности.

$$a_i = u(x_i), \qquad i = 1, \dots, N \tag{4}$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \tag{5}$$

Система для нахождения сплайна

Объединим полученные ранее уравнения в единую систему

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (1)$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (3)$$

$$a_i = u(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N \qquad (4)$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \qquad (5)$$

В этой системе $3(N-1) + N + 1 = \mathbf{4N\ \text{-}2}$ уравнения и $\mathbf{4N}$ неизвестных. Обычно, 2 недостающих условия задают в концах отрезка x_0 и x_N. В этом случае они называются краевыми условиями.

Краевые условия

- «Естественный сплайн»

$$U''(x_0) = U''(x_N) = 0.$$

- Понижение степени сплайна на краях до второй

$$U'''(x_0) = U'''(x_N) = 0.$$

- Периодический сплайн

$$U'''(x_0) = U'''(x_N),$$

$$U''(x_0) = U''(x_N).$$

Рассмотрим наиболее используемый вариант

$$c_N = s_N''(x_N) = U''(x_N) = 0 \qquad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = s_1''(x_0) = U''(x_0) = 0 \qquad (7)$$

Линейная система

- После добавления двух краевых условия количество уравнений совпало с количеством неизвестных. Можно было бы на этом остановиться, ведь формально, задача сведена к хорошо изученной.
- Тем не менее, можно значительно упростить эту систему линейных уравнений, сведя ее к системе линейных уравнений специального трехдиагонального вида.

Начнем с исключения из системы неизвестных a_i:

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (1)$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (3)$$

$$a_i = u(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N \qquad (4)$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \qquad (5)$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = 0 \qquad (7)$$

Удобно воспользоваться обозначениями разделенных разностей Ньютона

$$u(x_{i-1}, x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i}$$

Упрощение системы

Подставим вместо a_i значения $u(x_i)$:

$$b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{d_i}{6}h_i^2 = u(x_{i-1}, x_i), \qquad i = 2, \dots, N \qquad (1')$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2}h_i^2, \qquad i = 2, \dots, N \qquad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \qquad i = 2, \dots, N \qquad (3)$$

$$b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{d_1}{6}h_1^2 = u(x_0, x_1) \qquad (5')$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = 0 \qquad (7)$$

Из уравнения (3) и (7) выразим $d_i h_i$:

$$d_1 h_1 = c_1, \qquad d_i h_i = c_i - c_{i-1}, \quad i = 2, \dots, N$$

Исключим d_i из уравнений

$$b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{h_i}{6}(c_i - c_{i-1}) = u(x_{i-1}, x_i), \qquad i = 2, \dots, N \qquad (1'')$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{h_i}{2}(c_i - c_{i-1}), \qquad i = 2, \dots, N \qquad (2')$$

$$b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{h_1}{6}c_1 = u(x_0, x_1) \qquad (5'')$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

и приведем подобные при c_i

Упрощение системы

После приведения подобных

$$b_i - \frac{c_i}{3}h_i - \frac{c_{i-1}}{6}h_i = u(x_{i-1}, x_i), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (1''')$$

$$b_i - b_{i-1} - \frac{c_i}{2}h_i - \frac{c_{i-1}}{2}h_i = 0, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2'')$$

$$b_1 - \frac{c_1}{3}h_1 = u(x_0, x_1) \qquad (5''')$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

Выразим b_i

$$b_1 = \frac{c_1 h_1}{3} + u(x_0, x_1)$$

$$b_i = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1}}{6}h_i + u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \ldots, N$$

И подставим в уравнение (2’’)

Заметим, что выражение для b_1 формально совпадает с выражением для b_i при $i = 1$, если доопределить $c_0 = 0$.

$$b_i = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1}}{6}h_i + u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

$$b_i - b_{i-1} = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1} h_i}{6} - \frac{c_{i-1} h_{i-1}}{3} - \frac{c_{i-2} h_{i-1}}{6} + u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1}).$$

Подставляя это в выражение (2’’) и упрощая, получаем

$$\frac{h_{i-1}}{6}c_{i-2} + \left(\frac{h_i}{3} + \frac{h_{i-1}}{3}\right)c_{i-1} + \frac{h_i}{6}c_i =$$

$$= u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1}), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2''')$$

$$c_0 = c_N = 0. \qquad (6')$$

Трехдиагональная система

Для удобства умножим каждое уравнение на $\frac{6}{h_i+h_{i-1}}$. Заметим, что

$$\frac{u(x_{i-1},x_i)-u(x_{i-2},x_{i-1})}{h_i+h_{i-1}} = \frac{u(x_{i-1},x_i)-u(x_{i-2},x_{i-1})}{x_i-x_{i-2}} = u(x_{i-2},x_{i-1},x_i)$$

В результате серии упрощений у нас получилась система, относительно значений c_1, … $c_{N\text{-}1}$, причем, структура уравнений довольно специфическая. В i-е уравнение системы входят только три неизвестные.

$$\begin{array}{ccccccc}
2c_1 & + & \frac{h_2}{h_1+h_2}c_2 & & & = & 6u(x_0,x_1,x_2) \\
 & \ddots & & & & & \\
\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}c_{i-1} & + & 2c_i & + & \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}c_{i+1} & = & 6u(x_{i-1},x_i,x_{i+1}) \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & \frac{h_{N-1}}{h_{N-1}+h_N}c_{N-2} & + & 2c_{N-1} & = & 6u(x_{N-2},x_{N-1},x_N)
\end{array}$$

Свойства сплайна

Оказывается, что если $u(x)$ непрерывна, то последовательность кубических сплайнов $U_N(x)$ будет сходиться к $u(x)$ равномерно, то есть

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \max h_i\to 0}} \max_{[x_0,x_N]} |U_N(x) - u(x)| = 0$$

Построенный сплайн относится к глобальным. Если изменить значение $u(x_i)$ в какой-либо точке, это приведет к изменению всего сплайна $U(x)$. Правда, амплитуда изменения быстро уменьшается при удалении от точки x_i.

Литература

1. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: учеб. пособие. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий. Бином. Лаборатория знаний, 2006. – С. 133 – 141.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – С. 127 – 134.
3. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: учеб. пособие. – М.: Изд-во МФТИ, 1994. – С. 28 – 34.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – С. 58 – 62.
5. Press W.H. et al. Numerical Recipes in C. – Cambridge University Press. – P. 120. – пример программной реализации построения интерполяционных полиномов.

Спасибо за внимание!

Оптимальный выбор узлов интерполяции. Многочлены Чебышева.

Минимизации погрешности интерполяции

$$\left|u(x) - L_N(x)\right| \le \frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]}\left|u^{(N+1)}(\xi)\right|}{(N+1)!} \underbrace{\left|\prod_{j=0}^{N}\left(x - x_j\right)\right|}$$

Минимизируем за счет выбора
узлов интерполяции

Получили задачу на минимакс
(или задачу о построении полинома,
наименее уклоняющемся от нуля на
заданном отрезке):

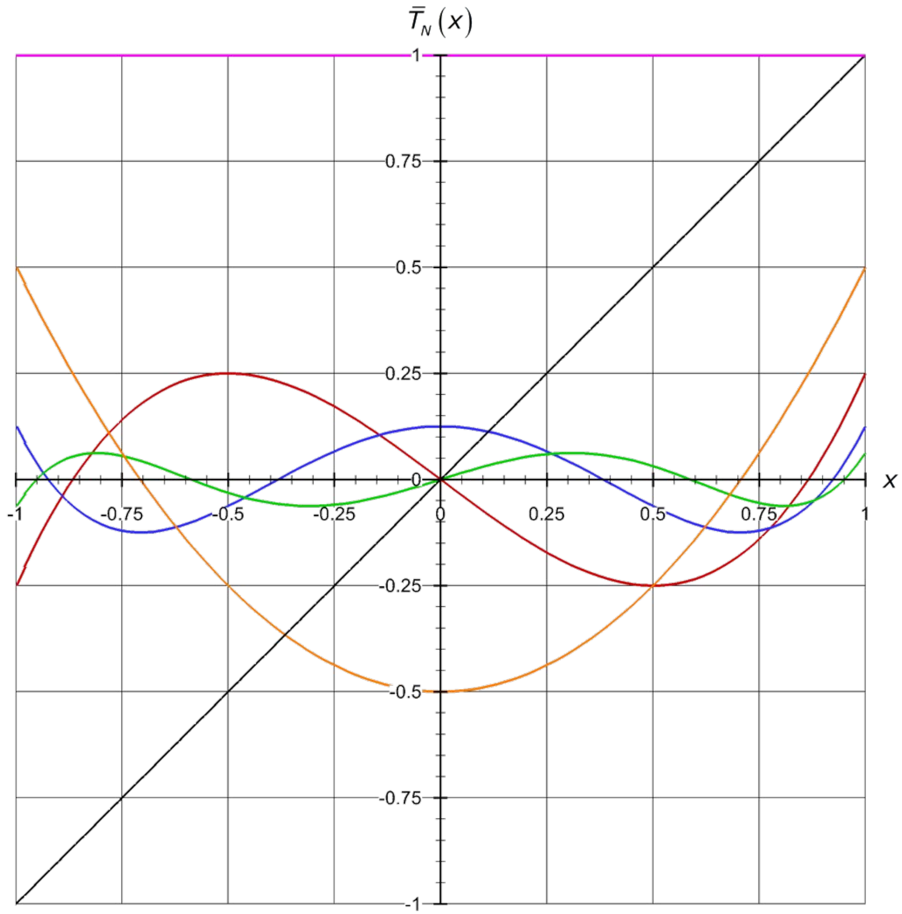
$$\min_{\{x_j\}_{j=0}^{N}}\left\{\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{j=0}^{N}\left(x - x_j\right)\right|\right\}$$

Решение задачи – нормированный многочлен Чебышева степени *N*, а
оптимальный выбор узлов интерполяции – нули многочлена Чебышева.

Многочлены Чебышева

Многочлены, наименее уклон. от 0: $\bar{T}_N(x) = 2^{1-N} T_N(x) = x^N + \ldots,\ N > 0.$

Многочлены Чебышева: $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x),\ N > 0.$



$\bar{T}_0(x) = 1$

$\bar{T}_1(x) = x$

$\bar{T}_2(x) = x^2 - 1/2$

$\bar{T}_3(x) = x^3 - 3/4\,x$

$\bar{T}_4(x) = x^4 - x^2 + 1/8$

$\bar{T}_5(x) = x^5 - 5/4\,x^3 + 5/16\,x$

Другая форма записи многочленов Чебышева

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) =$$
$$= 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\forall\theta \quad \cos([N+1]\theta) = 2\cos\theta\cos(N\theta) - \cos([N-1]\theta)$$

При $\theta = \arccos x$

$$\cos([N+1]\arccos x) = 2x\cos(N\arccos x) - \cos([N-1]\arccos x)$$

Функция cos(N arccos x) удовлетворяет тому же разностному уравнению, что и $T_N(x)$

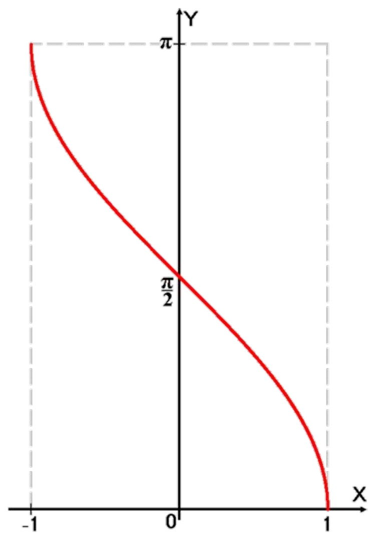
$$\cos(0\cdot\arccos x) = 1 = T_0(x) \qquad \cos(1\cdot\arccos x) = x = T_1(x)$$

$$\boxed{T_N(x) = \cos(N\arccos x),\ x \in [-1,1]}$$

Нули полиномов Чебышева

Отрезок $[-1,1]$

$$T_N(x) = \cos(N\arccos x) = 0 \to \quad N\arccos x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ \ m = 0,\ldots,N-1$$



$$\arccos x = \frac{(2m+1)\pi}{2N},\ \ m = 0,\ldots,N-1$$

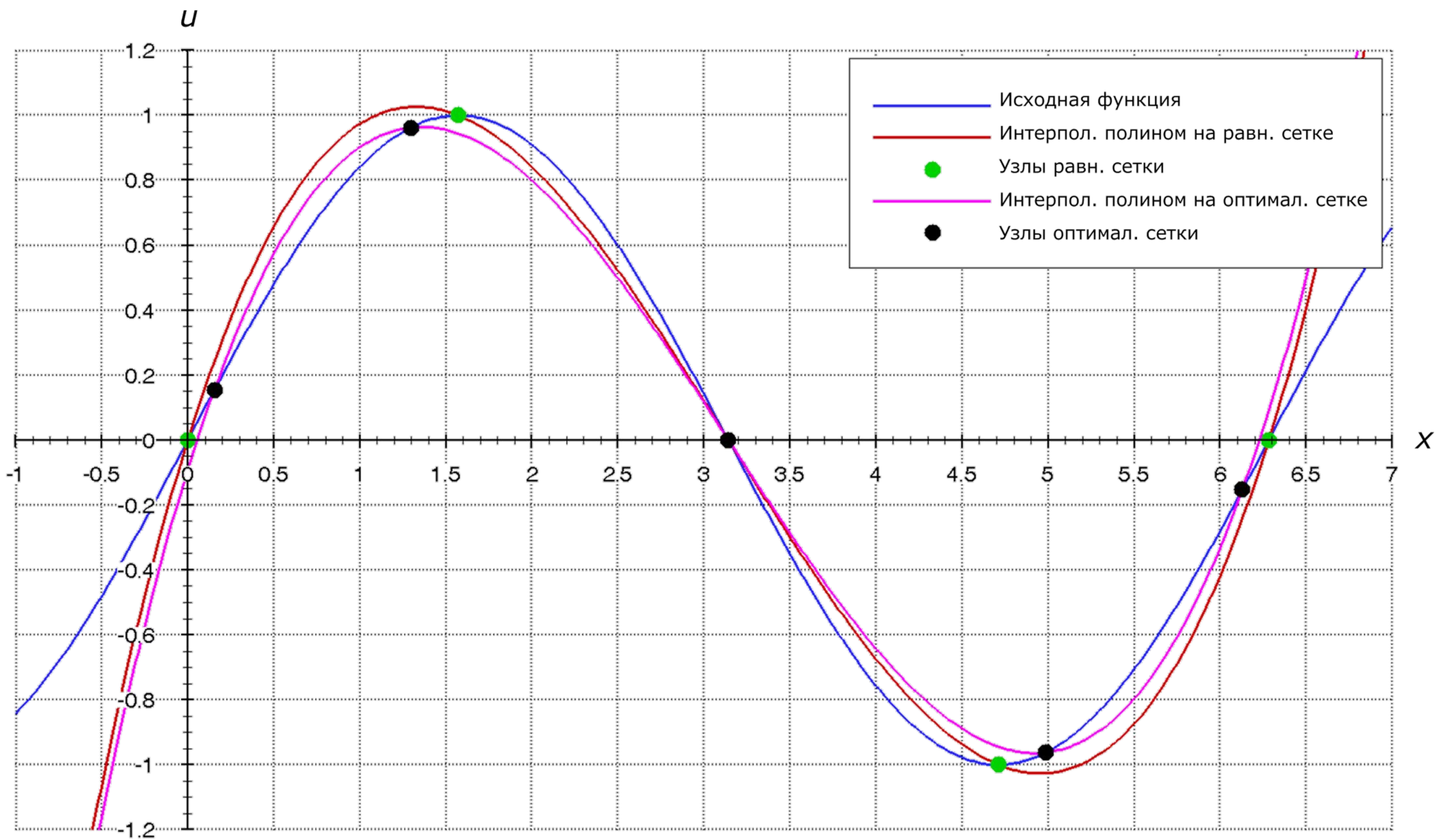
$$\boxed{x_m = \cos\frac{(2m+1)\pi}{2N},\ \ m = 0,\ldots,N-1}$$

Отрезок $[a,b]$

$$\bar{T}_N(x) = \frac{(b-a)^N}{2^{2N-1}}\cos\left(N\arccos\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = 0$$

$$\boxed{x_m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2m+1)\pi}{2N},\ \ m = 0,\ldots,N-1}$$

Пример: $u(x) = \sin x,\ x \in [0; 2\pi],\ N = 4,$ равн. сетка и оптимальная



Критерии оценки за семестр

посещение лекций	5
посещение семинаров	5
задание 1 (теория)	15
задание 1 (практика)	30
задание 2 (теория)	15
задание 2 (практика)	30
1 контрольная	ограничение
2 контрольная	ограничение
Курсовой проект	10
готовность домашнего задания	10
Всего	110-120

Оценка $\leq (1\ \text{контрольная} + 2\ \text{контрольная})/2$