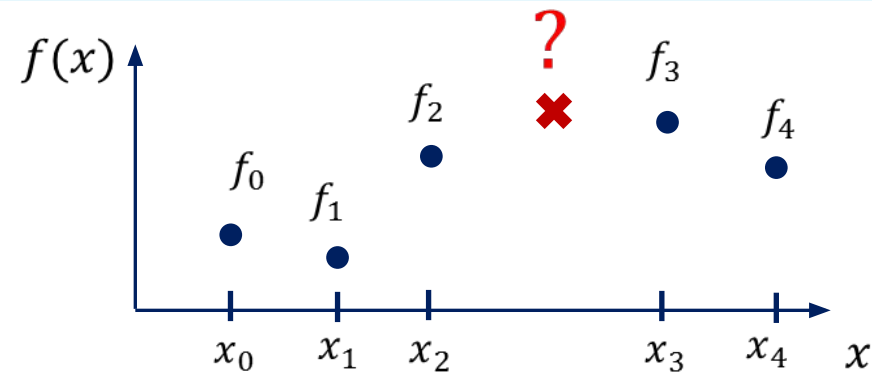


# Интерполяция функций

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна

[natalia.zavyalova@gmail.com](mailto:natalia.zavyalova@gmail.com)

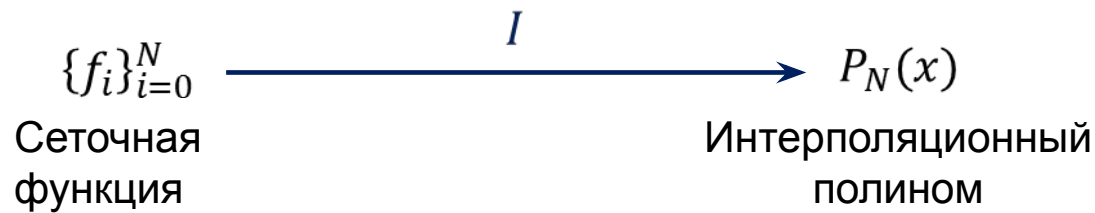
# Задача интерполяции



**Интерполяция** – это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

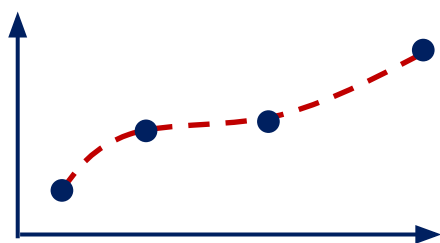
$x_i$  - узлы интерполяции

Алгебраическая  
интерполяция

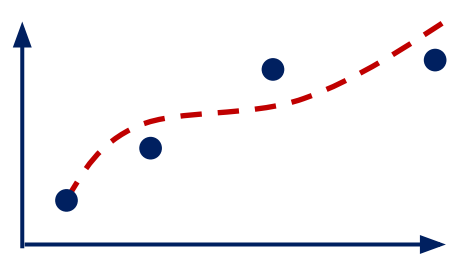


**Основное условие интерполяции:** равенство функции и интерполяционного полинома в узлах интерполяции

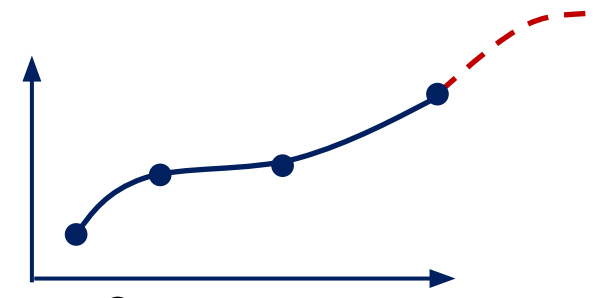
$$P_N(x_i) \equiv f_i$$



Интерполяция

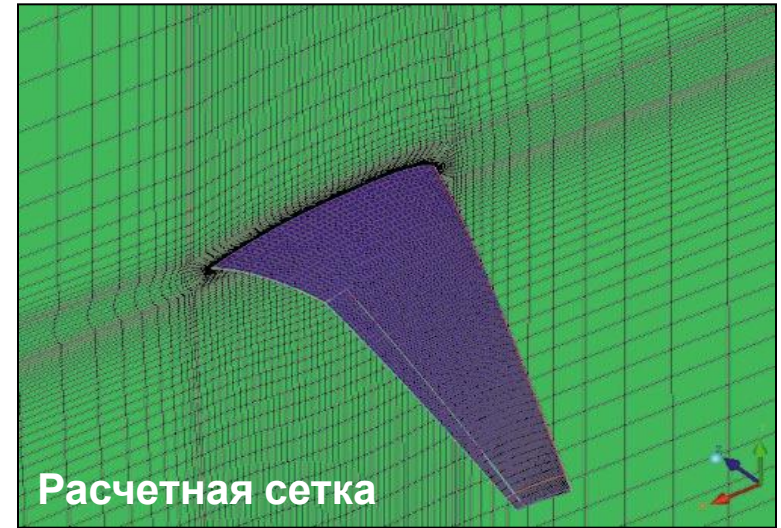
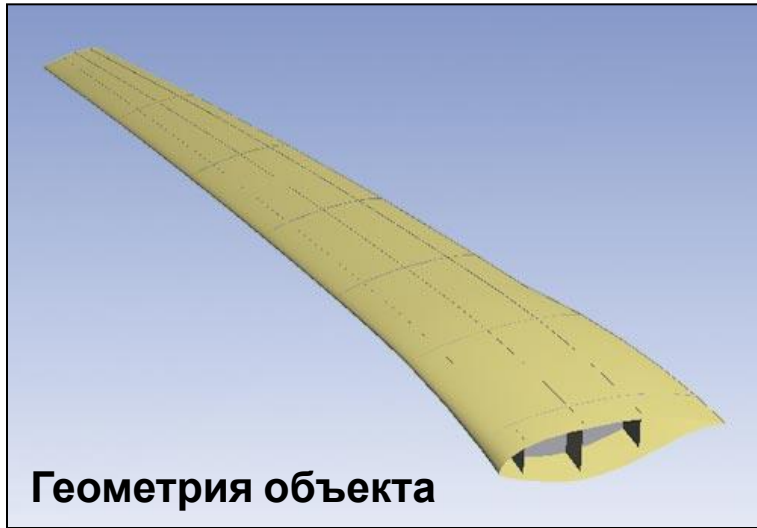


Аппроксимация



Экстраполяция

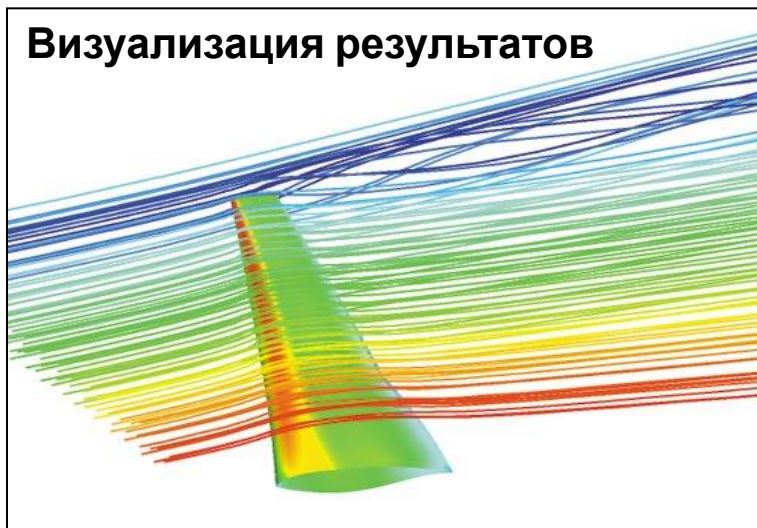
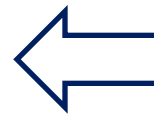
# Пример из области автоматизации проектирования



Математическая модель течения



Численная реализация



# Методы построения интерполяционного полинома

# Интерполяция алгебраическими полиномами

Сеточная функция

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	...	$x_N$
$f(x)$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	...	$f_N$

Строим интерполянт в виде полинома:

$$P_N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N$$

НЕИЗВЕСТНЫ

Требуем выполнения основного условия интерполяции  $P_N(x_i) = f_i$  и находим  $a_i$  из решения СЛАУ:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_Nx_0^N = f_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_Nx_1^N = f_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_N + \dots + a_Nx_N^N = f_N \end{cases}$$

Определитель матрицы – детерминант Вандермонда. В случае различия всех узлов сетки он отличен от нуля, и, значит, существует единственное решение системы – набор коэффициентов.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq N} (x_i - x_j) = 0$$



Существует пара  $(x_i, x_j)$ :  $x_i = x_j$ ,  $i \neq j$

**Утверждение 2.1.** Если заданы  $N + 1$  узлов  $x_0, \dots, x_N$  среди которых нет совпадающих, и значения функции в этих узлах  $f(x_0), \dots, f(x_N)$ , то существует один и только один многочлен степени не выше  $N$ , принимающий в узлах  $x_i$  заданные значения  $f(x_i)$ .

# Метод Лагранжа

Строим интерполяционный полином в виде:

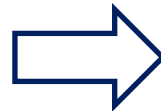
$$L_N(x) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) f_k$$

Из основного условия интерполяции получаем

$$L_N(x_i) = f_i \quad \forall i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^N \varphi_k(x_i) f_k = f_i$$

$$\text{Соответственно } \varphi_k(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \quad i = 0, \dots, N$$

Каждая из функций  $\varphi_k(x)$  имеет не менее  $N$  нулей на  $[a, b]$ .



Ищем  $\varphi_k(x)$  в виде полинома степени  $N$

$$c_k(x) = \alpha_k (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_N)$$

Из условия  $\varphi_k(x_k) = 1$  находим  $\alpha_k$

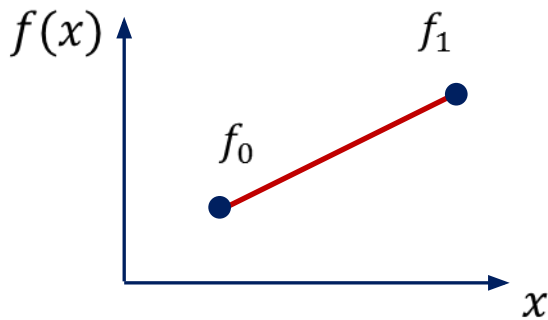
$$\alpha_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_N)}$$

$$\varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

# Примеры построенных методом Лагранжа ПОЛИНОМОВ

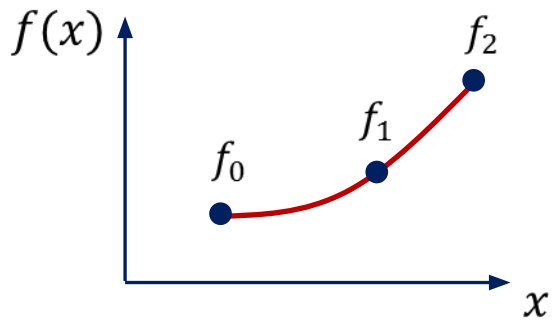
$$L_N(x) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) f_k \quad \varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Линейная интерполяция:



$$L_1(x) = \sum_{k=0}^1 \varphi_k(x) f_k = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Квадратичная интерполяция:



$$L_2(x) = \sum_{k=0}^2 \varphi_k(x) f_k = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$
$$+ f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

# Метод Ньютона

Интерполяционный полином в форме Ньютона – разностный аналог формулы Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2 f''(x_0)}{2!} + \dots$$

Разделенная разность первого порядка

$$f_{ij} = f(x_i, x_j) = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}, \quad i, j = 0, \dots, N \quad i \neq j$$

Разделенная разность второго порядка

$$f_{j j+1 j+2} = f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}) = \frac{f_{j j+1} - f_{j+1 j+2}}{x_j - x_{j+2}} = \frac{\frac{f_j - f_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + \frac{f_{j+1} - f_{j+2}}{x_{j+1} - x_{j+2}}}{x_j - x_{j+2}}$$

Разделенная разность  $k$ -го порядка

$$f_{j j+1 j+2 \dots j+k} = f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \frac{f_{j+1 \dots j+k} - f_{j \dots j+k-1}}{x_{j+k} - x_j}$$

Интерполяционный полином в форме Ньютона

$$P_N = f_0 + (x - x_0)f_{01} + (x - x_0)(x - x_1)f_{012} + \dots (x - x_0) \dots (x - x_{N-1})f_{012 \dots N}$$



# Метод Ньютона

Разделенная разность  $k$ -го порядка

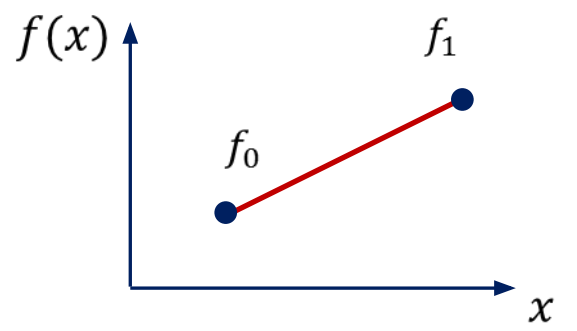
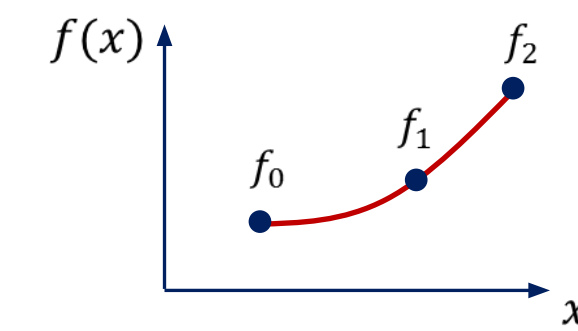
$$f_{j \ j+1 \ j+2 \ \dots \ j+k} = f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \frac{f_{j+1 \dots j+k} - f_{j \dots j+k-1}}{x_{j+k} - x_j}$$

$x_0$	$f_0$				
		$f_{01}$			
$x_1$	$f_1$		$f_{012}$		
		$f_{12}$	.		
$x_2$	$f_2$	.	.	...	$f_{0 \dots N}$
.	.	.	.		
.	.	.	$f_{N-2 \ N-1 \ N}$		
.	.	$f_{N-1 \ N}$			
$x_N$	$f_N$				

Интерполяционный полином в форме Ньютона

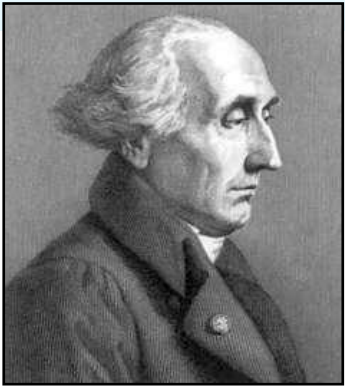
$$P_N = f_0 + (x - x_0)f_{01} + (x - x_0)(x - x_1)f_{012} + \dots (x - x_0) \dots (x - x_{N-1})f_{012 \dots N}$$

# Примеры построенных методом Ньютона полиномов

<p>Линейная интерполяция</p>	<p>Квадратичная интерполяция</p>
	
<p>Лагранж</p>	
$L_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$	$L_2(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$
<p>НЬЮТОН</p>	
$P_1(x) = f_0 + (f_1 - f_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$	$P_2(x) = f_0 + (f_1 - f_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$

Добавка к  $P_1(x)$  →

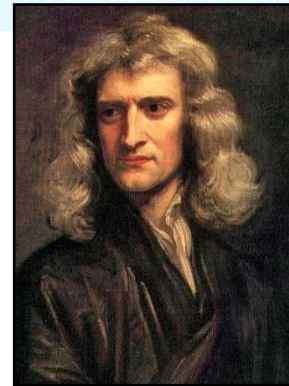
# Лагранж vs Ньютон



Используют при доказательствах теорем

Удобно применять, когда узлы интерполяции фиксированы и интерполируется не одна, а несколько функций.

$$\begin{aligned} L_1(x) &= f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \\ &= x \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} - \frac{f_0 x_1 - f_1 x_0}{x_0 - x_1} \end{aligned}$$



Рекомендуется использовать при программной реализации

Удобно применять, когда интерполируется одна и та же функция, но число узлов интерполяции постепенно увеличивается.

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f_0 + (f_1 - f_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \\ &= x \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + \frac{f_0 x_1 - f_1 x_0}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

$L_N(x)$  и  $P_N(x)$  – различные формы записи одного и того же многочлена

# Погрешность интерполяции

# Погрешность интерполяции

**Опр:** Разница между функцией и интерполяционным полиномом  $N$ -ой степени в точке  $x$  называется остаточным членом интерполяции:  $R_N(x) = f(x) - L_N(x)$

**Утверждение 2.2.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $u(x)$   $(N+1)$  раз непрерывно дифференцируема. Тогда:

$$R_N(x) = \frac{u^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^N (x - x_j), \quad \xi \in [a, b]$$

**Доказательство.** Если  $x = x_j$ , то утверждение верно. Иначе введем в рассмотрение функцию:

$$g(t) = f(t) - L_N(t) - [f(x) - L_N(x)] \prod_{j=0}^N \frac{(t - x_j)}{(x - x_j)}$$

Функция  $g(t)$ , имеет  $N+2$  нуля на  $[a, b]$ :

$$g(x_i) = f(x_i) - L_N(x_i) - [f(x) - L_N(x)] \prod_{j=0}^N \frac{(x_i - x_j)}{(x - x_j)} = 0, \quad i = 0, \dots, N$$

$$g(x) = f(x) - L_N(x) - [f(x) - L_N(x)] \prod_{j=0}^N \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)} = 0.$$

По обобщенной теореме Ролля:  $\exists \xi \in [a, b]: g^{(N+1)}(\xi) = 0$

$$g^{(N+1)}(\xi) = f^{(N+1)}(\xi) - 0 - [f(x) - L_N(x)] \frac{(N+1)!}{\prod_{j=0}^N (x - x_j)} = 0$$

$$f(x) - L_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^N (x - x_j) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_N(x)| = \frac{\max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|}{(N+1)!} \left| \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right|$$

# Погрешность интерполяции на равномерной сетке

**Утверждение 2.3.** Для случая равномерной сетки на отрезке  $[a, b]$

$$\{x_i\}_{i=0}^N, \quad x_i = a + ih, \quad h = (b - a)/N$$

для любого  $x$  на отрезке  $[a, b]$

$$|f(x) - L_N(x)| \leq \frac{h^{N+1}}{N+1} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|.$$

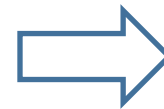
**Доказательство.**

$$x = x_k + \alpha h, \quad \alpha \in (0, 1), \quad k = 0, \dots, N-1$$

Положим

Тогда  $x - x_j = kh + \alpha h - jh = h(k + \alpha - j)$

$$\prod_{j=0}^N (x - x_j) = h^{N+1} \prod_{j=0}^N (k + \alpha - j) \leq h^{N+1} N!$$



$$|f(x) - L_N(x)| \leq \frac{h^{N+1}}{N+1} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|.$$

$$|f(x) - L_N(x)| = \frac{\max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|}{(N+1)!} \left| \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right|$$

$j$	0	...	$k-2$	$k-1$	$k$	$k+1$	$k+2$	...	$N$
$ k + \alpha - j $	$k + \alpha$	...	$2 + \alpha$	$2 + \alpha$	$\alpha$	$1 - \alpha$	$2 - \alpha$	...	$N - k - \alpha$
Маж. мн. в $N!$	$k+1$	...	3	2	1	1	$2+k$	...	$N$

# Погрешность в задаче экстраполяции

Экстраполяция – аппроксимация функции **вне** отрезка, на котором заданы узлы интерполяции.

$$x \in [b, b + h]: \quad |R_N(x)| \leq h^{N+1} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|$$

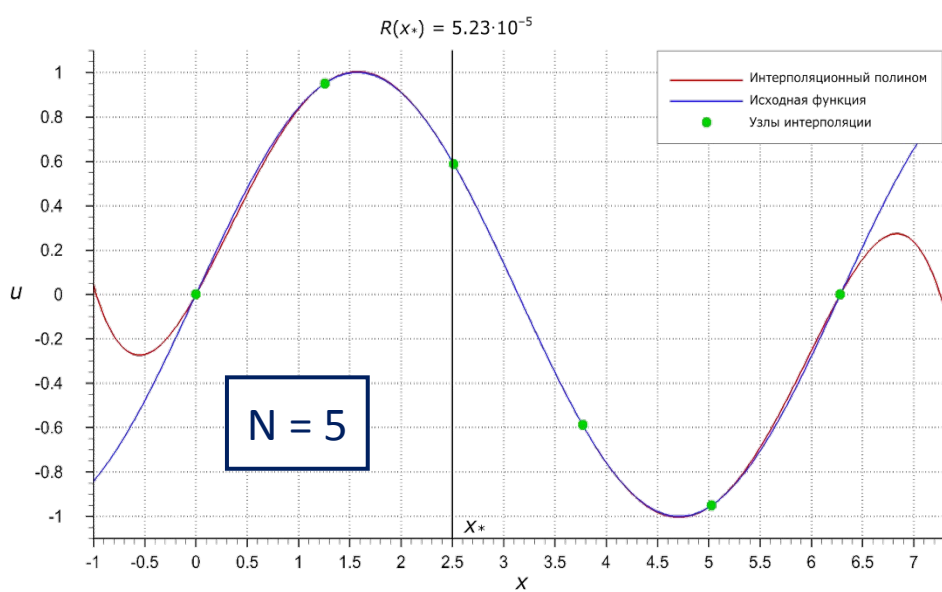
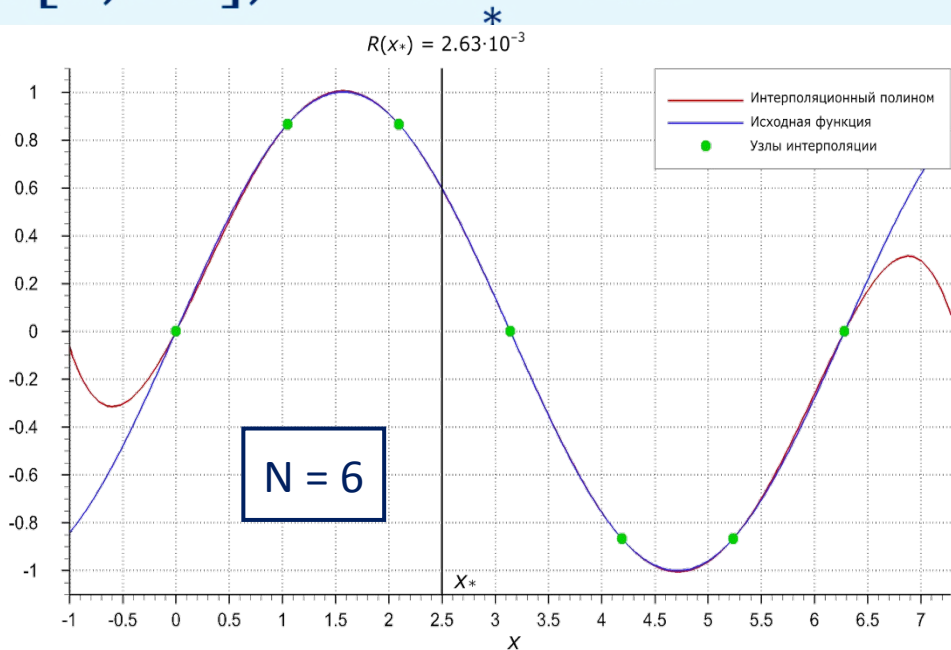
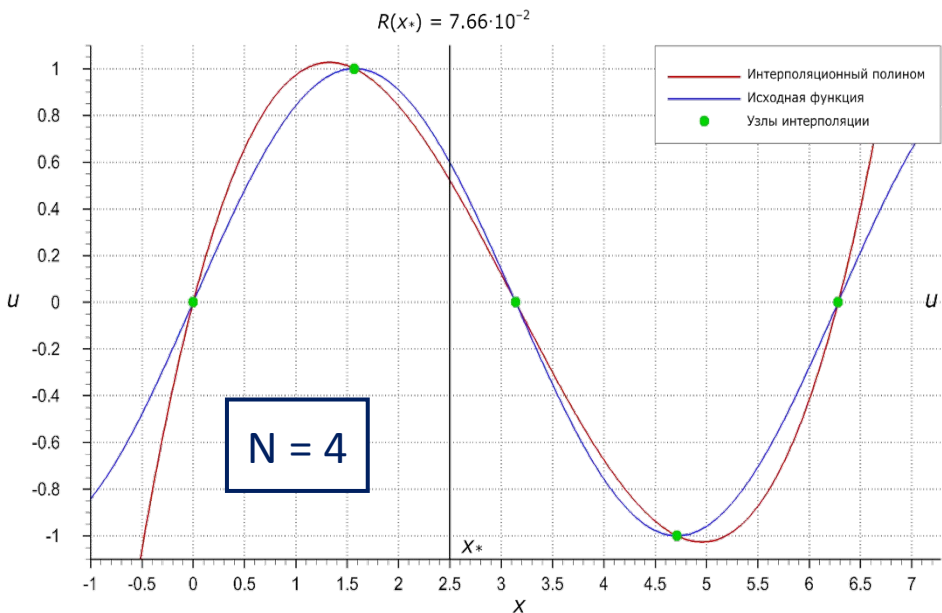
$$x \in [b + h, b + 2h]: \quad |R_N(x)| \leq (N + 2)h^{N+1} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|$$

$$x \in [b + 2h, b + 3h]: \quad |R_N(x)| \leq \frac{(N + 2)(N + 3)}{2} h^{N+1} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|$$

Оценка ухудшается как за счет появления множителей, пропорциональных  $N$ , так и за счет увеличения оценки производной.

Экстраполяция функции менее надежна, чем интерполяция, и ее точность резко падает по мере удаления от носителя информации.

$$u(x) = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi], \quad x_* = 2.5$$



$$P_4(x) = 1.7x^4 - 8.1 \cdot 10^{-1}x^3 + 8.6 \cdot 10^{-2}x^2 + 4.2 \cdot 10^{-9}x$$

$$P_5(x) = -6.0 \cdot 10^{-3}x^5 + 9.4 \cdot 10^{-2}x^4 - 4.3 \cdot 10^{-1}x^3 + 3.4 \cdot 10^{-1}x^2 + 8.3 \cdot 10^{-1}x$$

$$P_6(x) = -1.6 \cdot 10^{-10}x^6 - 5.7 \cdot 10^{-3}x^5 + 9.0 \cdot 10^{-2}x^4 - 4.1 \cdot 10^{-1}x^3 + 3.0 \cdot 10^{-1}x^2 + 8.7 \cdot 10^{-1}x$$



# Увеличение числа узлов интерполяции

Сетка на  $[a, b]$ :  $\Omega_N = \{x_i\}_{i=0}^N : a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq b\}$

Рассмотрим последовательность сеток с возрастающим числом узлов:

$$\Omega_0 = \{x_0^{(0)}\}, \Omega_1 = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\}, \dots, \Omega_N = \{x_0^{(N)}, x_1^{(N)}, \dots, x_N^{(N)}\}, \dots$$

Пусть  $f(x)$  определена и непрерывна на  $[a, b]$ . Построим последовательность интерполяционных многочленов для функции  $f(x)$  по ее значениям в узлах сетки  $\Omega_N$ :  $L_N[f(x)]$ .

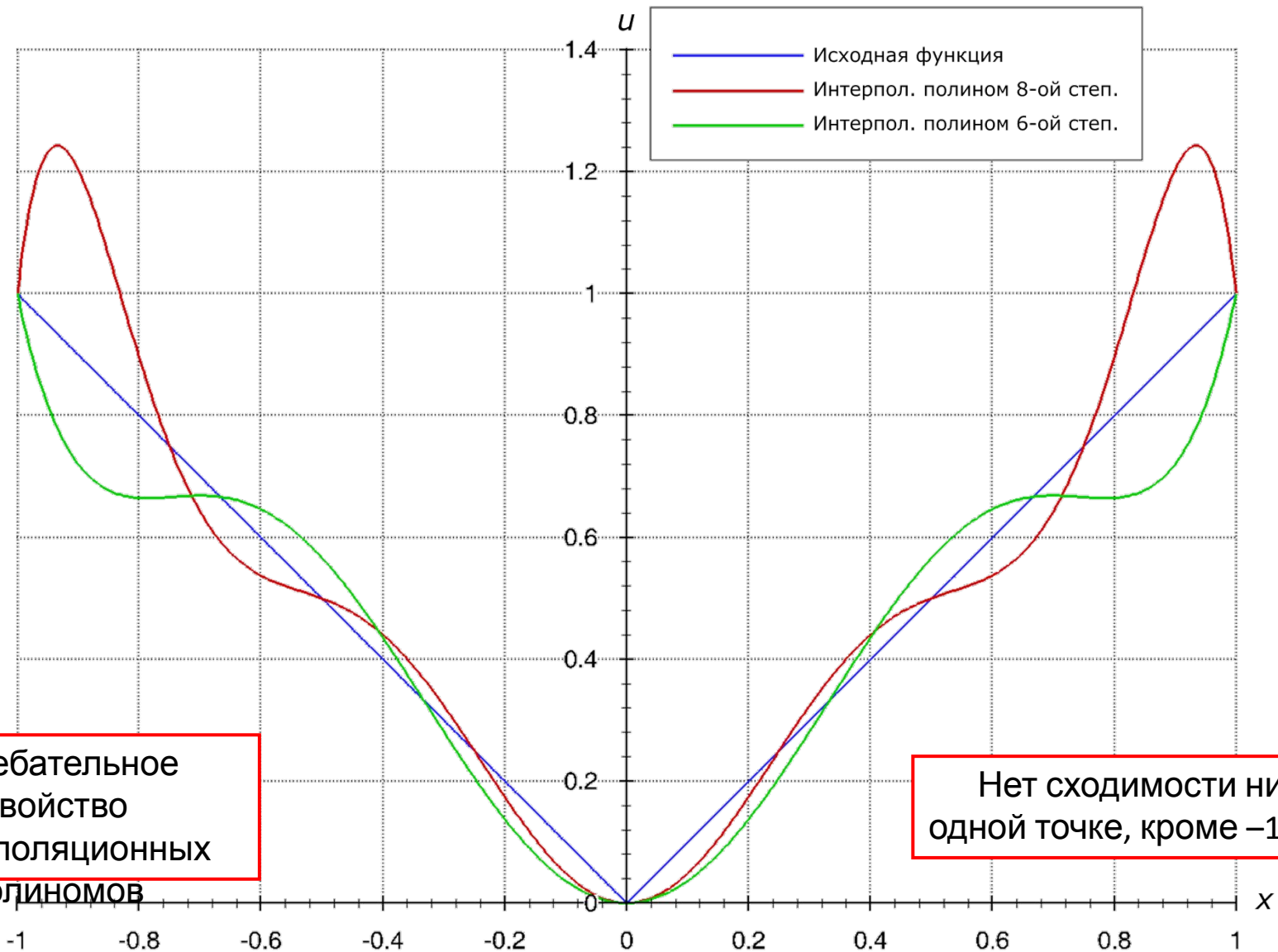
Поточечная сходимость в точке  $x^* \in [a, b]$ :

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} L_N[f(x^*)] = \lim_{x_i \rightarrow x^*} f(x^*) + L'_N(x_i - x^*) + O(x_i - x^*)^2 = f(x^*)$$

Равномерная сходимость на  $[a, b]$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |f(x) - L_N[f(x)]| \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right| \right\} = 0$$

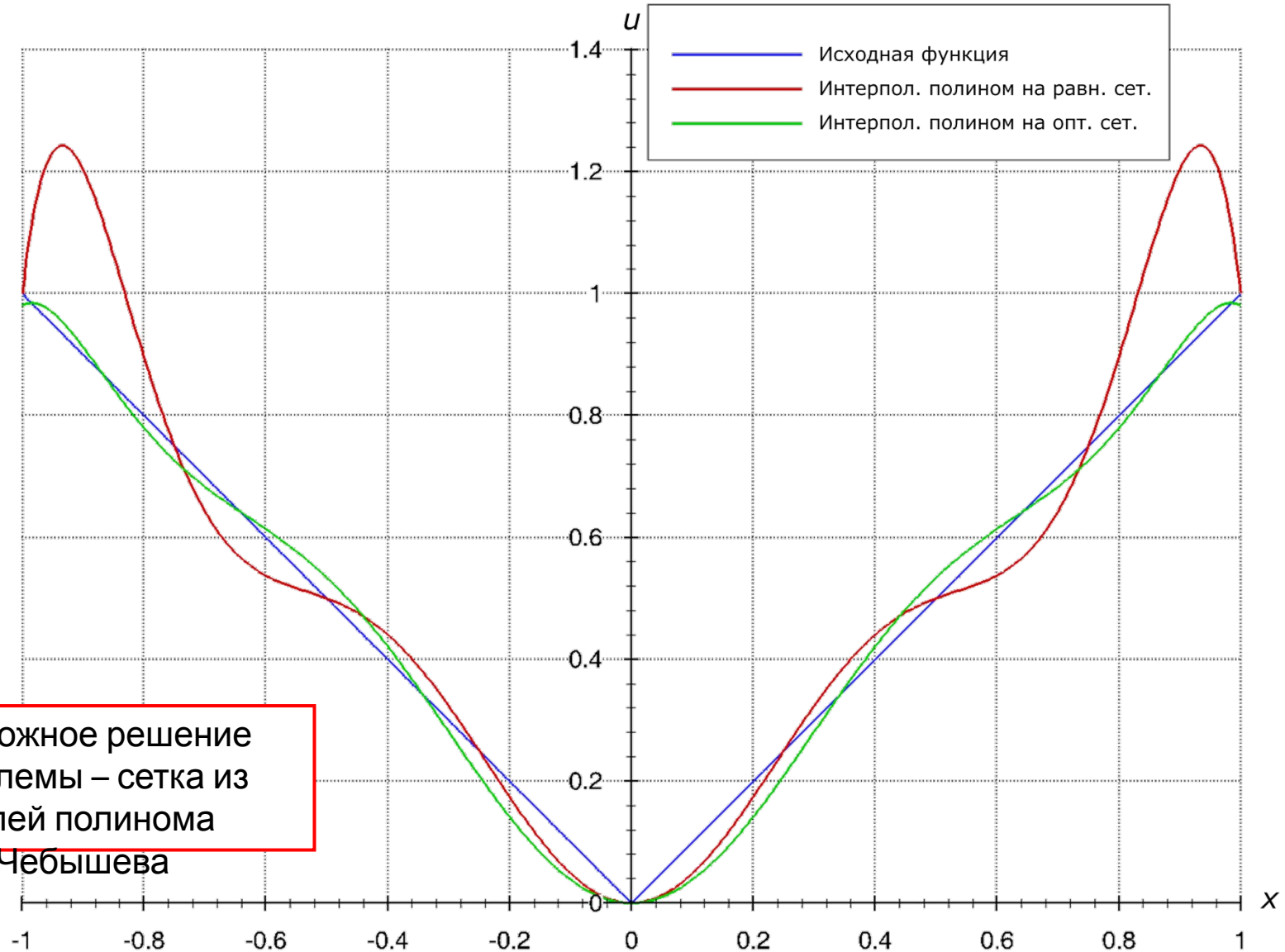
# Пример С.Н. Берштейна $u(x) = |x|$ , равномерная сетка



Колебательное  
свойство  
интерполяционных  
ПОЛИНОМОВ

Нет сходимости ни в  
одной точке, кроме  $-1, 0, 1$ .

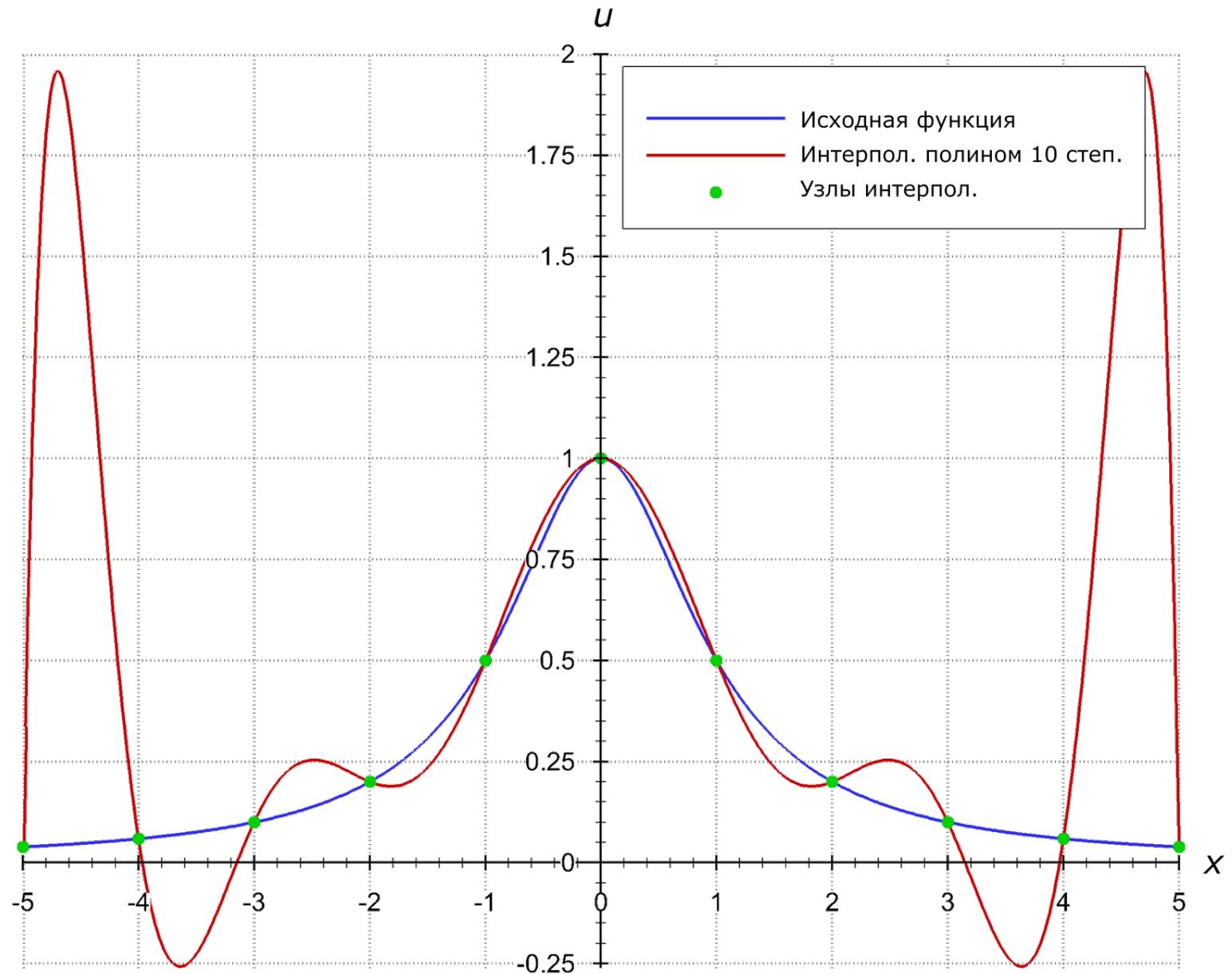
# $U(x) = |x|$ , равномерная сетка vs оптимальная сетка



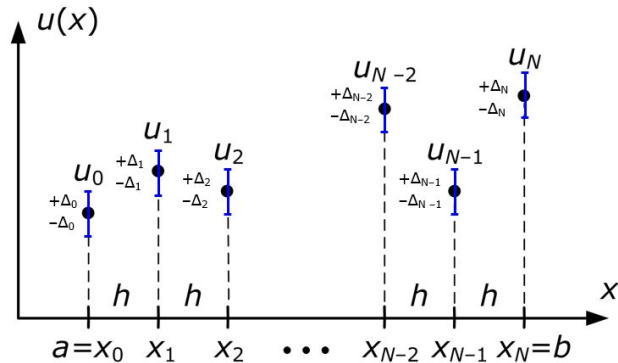
Возможное решение  
проблемы – сетка из  
нулей полинома

Чебышева

# Пример Рунге, $u(x) = 1/(1 + x^2)$ , равномерная сетка



# Влияние неустранимой погрешности



$$\Delta = \max_i \Delta_i$$

$L_N(x)$  - Интерполяционный полином, построенный по **точным** значениям функции

$\tilde{L}_N(x)$  - Интерполяционный полином, построенный по **возмущенным** значениям функции

$$|\tilde{R}_N(x)| = |u(x) - \tilde{L}_N(x)| = |u(x) - L_N(x) + L_N(x) + \tilde{L}_N(x)| \leq |u(x) - L_N(x)| + |L_N(x) - \tilde{L}_N(x)| \leq |R_N(x)| + \Delta_p$$

Знаем как оценить

Необходимо оценить

$$\Delta_p = |L_N(x) - \tilde{L}_N(x)| = \left| \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) u_k - \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) \tilde{u}_k \right|$$

$$\varphi_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$\Delta_p = \left| \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) (u_k - \tilde{u}_k) \right| \leq \sum_{k=0}^N \Delta_k |\varphi_k(x)| \leq \mathbf{L} \Delta$$

$$\mathbf{L} = \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^N |\varphi_k(x)|$$

Константа Лебега

**Пример.** Константа Лебега для случая линейной интерполяции

$$\tilde{L}_1(x) = \sum_{k=0}^1 \varphi_k(x) \tilde{u}_k = \tilde{u}_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \tilde{u}_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad x_0 = a, x_1 = b$$

$$\mathbf{L} = \max_{x \in [a, b]} \left( \left| \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right| + \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| \right) = \max_{x \in [a, b]} \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) = 1$$

# Интерполяция сплайнами

# Недостатки глобальной интерполяции

Глобальная интерполяция многочленом высокой степени ( $N > 10 \div 20$ ) нежелательная, поскольку:

- При вычислении многочлена высокой степени могут накапливаться ошибки округления (например как при суммировании ряда Тейлора);
- Интерполяционный многочлен может плохо приближать исходную функцию (примеры Берштейна и Рунге на равномерной сетке);
- Задача интерполяции может быть плохо обусловлена (интерполяционный многочлен чувствителен к возмущениям значений в узлах сетки);

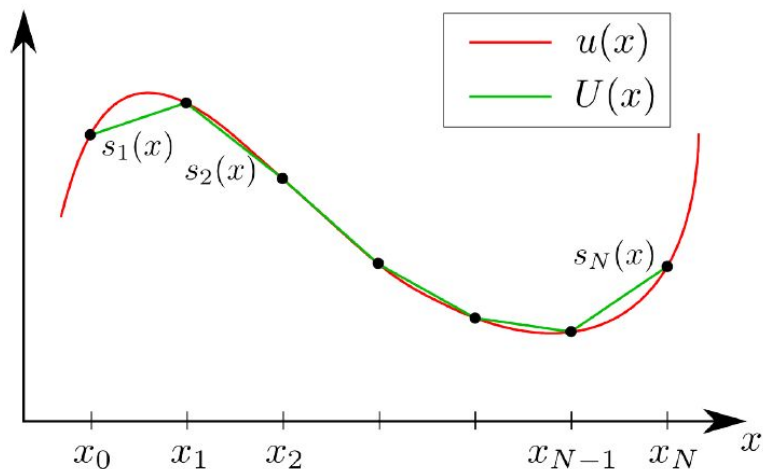
Частично указанные проблемы можно решить введением Чебышевской сетки, но не всегда такое возможно.

Задача интерполяции: По данному набору значения  $u(x)$  на сетке  $\{x_i\}_{i=0}^N$  восстановить функцию  $U(x)$ ,  
Совпадающую с  $u(x_i)$  в узлах  $x_i$ .

- Ранее функцию  $U(x)$  мы искали в виде полинома от  $x$
- Рассмотрим теперь вариант, когда на каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  функция является некоторым многочленом  $s_i(x)$ , причем для каждого отрезка эта функция своя.
- В такой постановке задача имеет множество решений. Единственность решения можно обеспечить потребовав от функции  $U(x)$  некоторой гладкости в местах стыков функций  $s_i(x)$ , то есть в узлах интерполяции

# Примеры сплайнов

## Кусочно-линейная интерполяция

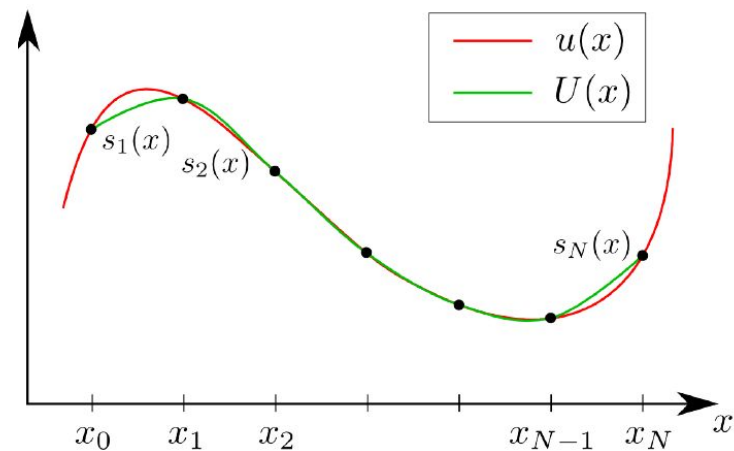


$$U(x) = s_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s_i(x) = u_{i-1} \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + u_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

На каждом отрезке функция приближается линейной. дополнительных условия не требуется, условия гладкости на  $U(x)$  в данном случае не налагаются.

## Гладкая кусочно-кубическая интерполяция



$$U(x) = s_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i)$$

$$s''_i(x_i) = s''_{i+1}(x_i)$$

На каждом отрезке функция приближается кубическим многочленом. Дополнительно требуется непрерывность первой и второй производных  $U(x)$  на всем отрезке  $[x_0, x_N]$ .



# Построение сплайна

## Характеристики сплайна

- Степенью сплайна называется максимальная из степеней многочленов  $s_i(x)$ .
- **Гладкостью** сплайна называется количество непрерывных производных, которые  $U(x)$  имеет на всем отрезке  $[x_0, x_N]$ .
- **Дефектом** сплайна называется разность между степенью и гладкостью сплайна.

Например, кусочно-линейный сплайн имеет степень 1, гладкость 0 и дефект 1.

Гладкий кусочно-кубический сплайн имеет степень 3, гладкость 2 и дефект 1.

## Построение сплайна

Найдем выражения для функций  $s_i(x)$ , составляющих гладкий кубический сплайн.

Поскольку сплайн имеет степень 3, все функции  $s_i(x)$  являются многочленами степени 3. Запишем их в виде:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

Такая форма записи соответствует ряду Тейлора для  $s_i(x)$  в окрестности точки  $x_i$ . Поскольку  $s_i(x)$  – кубический многочлен, его ряд Тейлора обрывается после кубического слагаемого. Из аналогии с рядом Тейлора заключаем, что

$$a_i = s_i(x_i) \quad b_i = s_i'(x_i) \quad c_i = s_i''(x_i) \quad d_i = s_i'''(x_i)$$

Хотя в этом можно убедиться и обычной подстановкой.

# Построение сплайна

## Условия непрерывности

Выразим условия непрерывности и гладкости сплайна в терминах коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$ . Для удобства введем обозначение для длины  $i$ -го отрезка  $h_i = x_i - x_{i-1}$ . Запишем условие непрерывности  $U(x)$  в точке  $x_{i-1}$ :

$$a_{i-1} = s_{i-1}(x_{i-1}) = s_i(x_{i-1}) = a_i + b_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{c_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x_{i-1} - x_i)^3$$

Пользуясь обозначением  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \quad i = 2, \dots, N. \quad (1)$$

## Условия гладкости

Выпишем условия непрерывности первой и второй производной  $U(x)$  в точках  $x_{i-1}$ :

$$\begin{aligned} b_{i-1} &= s'_{i-1}(x_{i-1}) = s'_i(x_{i-1}) = b_i + c_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{d_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2, \\ c_{i-1} &= s''_{i-1}(x_{i-1}) = s''_i(x_{i-1}) = c_i + d_i(x_{i-1} - x_i). \end{aligned}$$

Пользуясь  $h_i$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \quad i = 2, \dots, N, \quad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \quad i = 2, \dots, N. \quad (3)$$

# Построение сплайна

## Основное условия интерполяции

Выпишем условия интерполирования, то есть  $U(x_i) = u(x_i)$ :

$$a_i = s_i(x_i) = U(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Кроме этого, есть еще условия в точке  $x_0$ ,

$$a_1 + b_1(x_0 - x_1) + \frac{c_1}{2}(x_0 - x_1)^2 + \frac{d_1}{6}(x_1 - x_0)^3 = s_1(x_0) = U(x_0) = u(x_0).$$

Мы не требуем дополнительно  $s_{i+1}(x_i) = U(x_i)$ , поскольку эти условия автоматически удовлетворяются при выполнении условия непрерывности.

$$a_i = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \quad (5)$$

# Система для нахождения сплайна

Объединим полученные ранее уравнения в единую систему

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \quad i = 2, \dots, N \quad (1)$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \quad i = 2, \dots, N \quad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \quad i = 2, \dots, N \quad (3)$$

$$a_i = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \quad (5)$$

В этой системе  $3(N-1) + N + 1 = 4N - 2$  уравнения и  $4N$  неизвестных. Обычно, 2 недостающих условия задают в концах отрезка  $x_0$  и  $x_N$ . В этом случае они называются краевыми условиями.

## Краевые условия

- «Естественный сплайн»  
$$U''(x_0) = U''(x_N) = 0.$$
- Понижение степени сплайна на краях до второй  
$$U'''(x_0) = U'''(x_N) = 0.$$
- Периодический сплайн  
$$U'''(x_0) = U'''(x_N),$$
  
$$U''(x_0) = U''(x_N).$$

Рассмотрим наиболее используемый вариант

$$c_N = s_N''(x_N) = U''(x_N) = 0 \quad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = s_1''(x_0) = U''(x_0) = 0 \quad (7)$$

# Линейная система

- После добавления двух краевых условия количество уравнений совпало с количеством неизвестных. Можно было бы на этом остановиться, ведь формально, задача сведена к хорошо изученной.
- Тем не менее, можно значительно упростить эту систему линейных уравнений, сведя ее к системе линейных уравнений специального трехдиагонального вида.

Начнем с исключения из системы неизвестных  $a_i$ :

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \quad i = 2, \dots, N \quad (1)$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \quad i = 2, \dots, N \quad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \quad i = 2, \dots, N \quad (3)$$

$$a_i = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \quad (5)$$

$$c_N = 0 \quad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = 0 \quad (7)$$

Удобно воспользоваться обозначениями разделенных разностей Ньютона

$$u(x_{i-1}, x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i}$$

# Упрощение системы

Подставим вместо  $a_i$  значения  $u(x_i)$ :

$$b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{d_i}{6}h_i^2 = u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \dots, N \quad (1')$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2}h_i^2, \quad i = 2, \dots, N \quad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \quad i = 2, \dots, N \quad (3)$$

$$b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{d_1}{6}h_1^2 = u(x_0, x_1) \quad (5')$$

$$c_N = 0 \quad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = 0 \quad (7)$$

Из уравнения (3) и (7) выразим  $d_i h_i$ :

$$d_1 h_1 = c_1, \quad d_i h_i = c_i - c_{i-1}, \quad i = 2, \dots, N$$

Исключим  $d_i$  из уравнений

$$b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{h_i}{6}(c_i - c_{i-1}) = u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \dots, N \quad (1'')$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{h_i}{2}(c_i - c_{i-1}), \quad i = 2, \dots, N \quad (2')$$

$$b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{h_1}{6}c_1 = u(x_0, x_1) \quad (5'')$$

$$c_N = 0 \quad (6)$$

и приведем подобные при  $c_i$

# Упрощение системы

После приведения подобных

$$b_i - \frac{c_i}{3}h_i - \frac{c_{i-1}}{6}h_i = u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \dots, N \quad (1''')$$

$$b_i - b_{i-1} - \frac{c_i}{2}h_i - \frac{c_{i-1}}{2}h_i = 0, \quad i = 2, \dots, N \quad (2'')$$

$$b_1 - \frac{c_1}{3}h_1 = u(x_0, x_1) \quad (5''')$$

$$c_N = 0 \quad (6)$$

Выразим  $b_i$

$$b_1 = \frac{c_1 h_1}{3} + u(x_0, x_1)$$

$$b_i = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1}}{6}h_i + u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \dots, N$$

И подставим в уравнение (2'')

Заметим, что выражение для  $b_1$  формально совпадает с выражением для  $b_i$  при  $i = 1$ , если доопределить  $c_0 = 0$ .

$$b_i = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1}}{6}h_i + u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$b_i - b_{i-1} = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1} h_i}{6} - \frac{c_{i-1} h_{i-1}}{3} - \frac{c_{i-2} h_{i-1}}{6} + u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1}).$$

Подставляя это в выражение (2'') и упрощая, получаем

$$\begin{aligned} \frac{h_{i-1}}{6}c_{i-2} + \left(\frac{h_i}{3} + \frac{h_{i-1}}{3}\right)c_{i-1} + \frac{h_i}{6}c_i &= \\ &= u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1}), \quad i = 2, \dots, N \quad (2''') \end{aligned}$$

$$c_0 = c_N = 0. \quad (6')$$

# Трёхдиагональная система

Для удобства умножим каждое уравнение на  $\frac{6}{h_i+h_{i-1}}$ . Заметим, что

$$\frac{u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1})}{h_i + h_{i-1}} = \frac{u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1})}{x_i - x_{i-2}} = u(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$$

В результате серии упрощений у нас получилась система, относительно значений  $c_1, \dots, c_{N-1}$ , причем, структура уравнений довольно специфическая. В  $i$ -е уравнение системы входят только три неизвестные.

$$\begin{aligned} 2c_1 &+ \frac{h_2}{h_1+h_2}c_2 &= 6u(x_0, x_1, x_2) \\ &\dots & \\ \frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}c_{i-1} &+ 2c_i + \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}c_{i+1} &= 6u(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \\ &\dots & \\ \frac{h_{N-1}}{h_{N-1}+h_N}c_{N-2} &+ 2c_{N-1} &= 6u(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N) \end{aligned}$$



# Свойства сплайна

Оказывается, что если  $u(x)$  непрерывна, то последовательность кубических сплайнов  $U_N(x)$  будет сходиться к  $u(x)$  равномерно, то есть

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \max h_i \rightarrow 0}} \max_{[x_0, x_N]} |U_N(x) - u(x)| = 0$$

Построенный сплайн относится к глобальным. Если изменить значение  $u(x_i)$  в какой-либо точке, это приведет к изменению всего сплайна  $U(x)$ . Правда, амплитуда изменения быстро уменьшается при удалении от точки  $x_i$ .

# Литература

1. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: учеб. пособие. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий. Бином. Лаборатория знаний, 2006. – С. 133 – 141.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – С. 127 – 134.
3. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: учеб. пособие. – М.: Изд-во МФТИ, 1994. – С. 28 – 34.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – С. 58 – 62.
5. Press W.H. et al. Numerical Recipes in C. – Cambridge University Press. – P. 120. – [пример программной реализации построения интерполяционных полиномов.](#)

**Спасибо за внимание!**

Оптимальный выбор узлов  
интерполяции. Многочлены  
Чебышева.

# Минимизации погрешности интерполяции

$$|u(x) - L_N(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a,b]} |u^{(N+1)}(\xi)|}{(N+1)!} \underbrace{\left| \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right|}_{\text{Минимизируем за счет выбора узлов интерполяции}}$$

Минимизируем за счет выбора узлов интерполяции

Получили задачу на минимум (или задачу о построении полинома, наименее уклоняющемся от нуля на заданном отрезке):

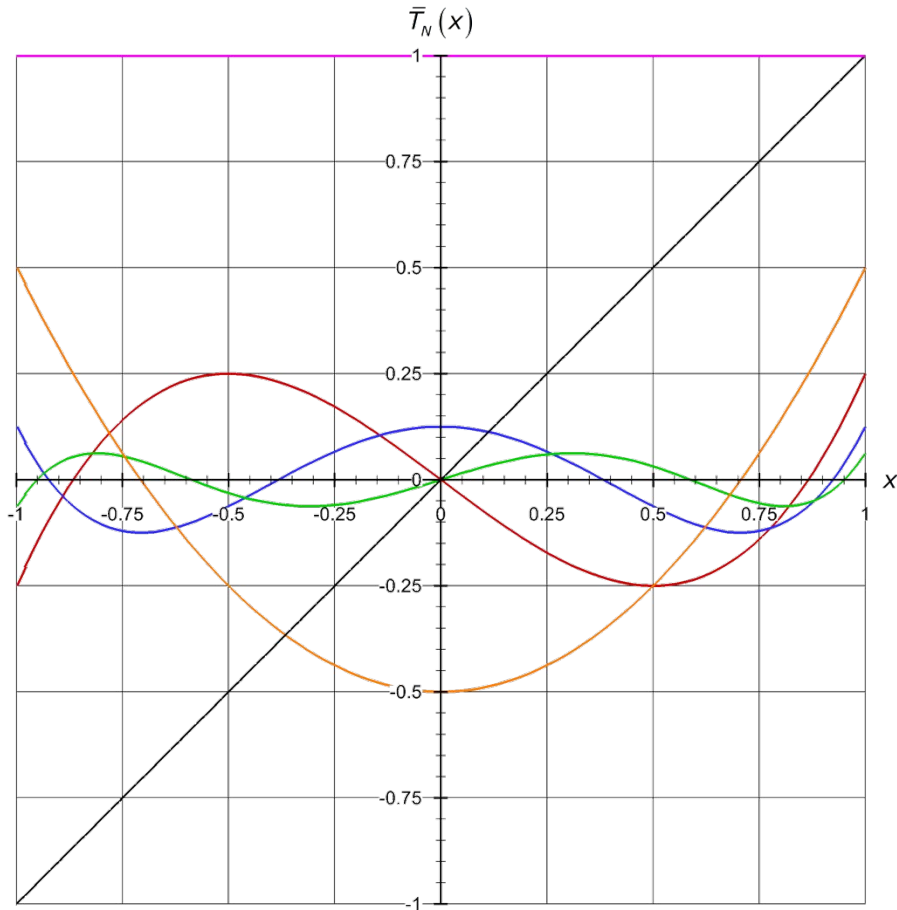
$$\min_{\{x_j\}_{j=0}^N} \left\{ \max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right| \right\}$$

Решение задачи – **нормированный многочлен Чебышева степени  $N$** , а оптимальный выбор узлов интерполяции – **нули многочлена Чебышева**.

# Многочлены Чебышева

Многочлены, наименее уклон. от 0:  $\bar{T}_N(x) = 2^{1-N} T_N(x) = x^N + \dots, N > 0.$

Многочлены Чебышева:  $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x), N > 0.$



—  $\bar{T}_0(x) = 1$

—  $\bar{T}_1(x) = x$

—  $\bar{T}_2(x) = x^2 - 1/2$

—  $\bar{T}_3(x) = x^3 - 3/4 x$

—  $\bar{T}_4(x) = x^4 - x^2 + 1/8$

—  $\bar{T}_5(x) = x^5 - 5/4 x^3 + 5/16 x$

# Другая форма записи многочленов Чебышева

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= \\ &= 2 \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\forall \theta \quad \cos([N + 1]\theta) = 2 \cos \theta \cos(N\theta) - \cos([N - 1]\theta)$$

При  $\theta = \arccos x$

$$\cos([N + 1]\arccos x) = 2x \cos(N \arccos x) - \cos([N - 1]\arccos x)$$

Функция  $\cos(N \arccos x)$  удовлетворяет тому же разностному уравнению, что и  $T_N(x)$

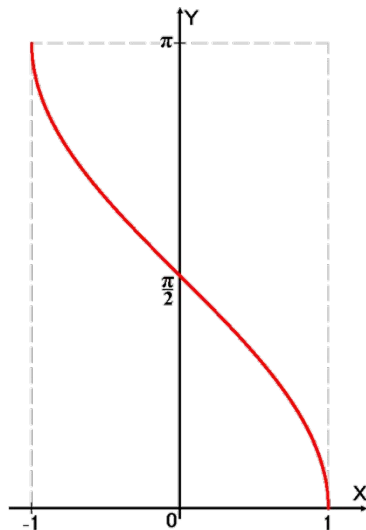
$$\cos(0 \cdot \arccos x) = 1 = T_0(x) \quad \cos(1 \cdot \arccos x) = x = T_1(x)$$

$$T_N(x) = \cos(N \arccos x), \quad x \in [-1, 1]$$

# Нули полиномов Чебышева

## Отрезок $[-1, 1]$

$$T_N(x) = \cos(N \arccos x) = 0 \rightarrow N \arccos x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m = 0, \dots, N-1$$



$$\arccos x = \frac{(2m+1)\pi}{2N}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

$$x_m = \cos \frac{(2m+1)\pi}{2N}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

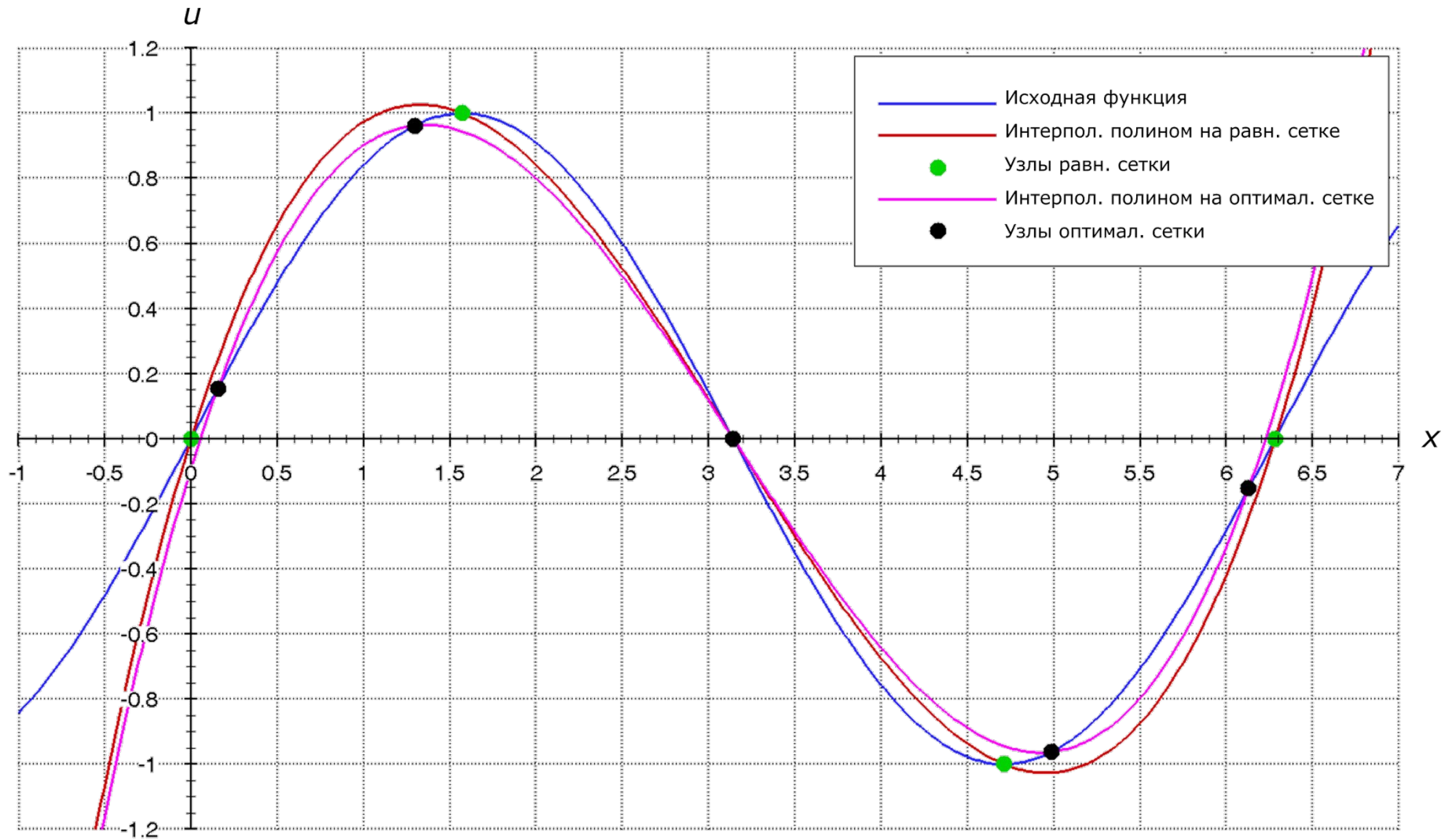
## Отрезок $[a, b]$

$$\bar{T}_N(x) = \frac{(b-a)^N}{2^{2N-1}} \cos \left( N \arccos \frac{2x - (b+a)}{b-a} \right) = 0$$

$$x_m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2m+1)\pi}{2N}, \quad m = 0, \dots, N-1$$



Пример:  $u(x) = \sin x$ ,  $x \in [0; 2\pi]$ ,  $N = 4$ , равн. сетка и оптимальная



# Критерии оценки за семестр

посещение лекций	5
посещение семинаров	5
задание 1 (теория)	15
задание 1 (практика)	30
задание 2 (теория)	15
задание 2 (практика)	30
1 контрольная	ограничение
2 контрольная	ограничение
Курсовой проект	10
готовность домашнего задания	10
Всего	110-120

Оценка  $\leq (1 \text{ контрольная} + 2 \text{ контрольная})/2$