Нечеткие отношения и их свойства

Одним из основных понятий теории нечетких множеств считается понятие нечеткого отношения. Эти отношения позволяют формализовать неточные утверждения типа «*x* почти равно y» или «x значительно больше чем y». Приведем определение нечеткого отношения и комбинации нечетких отношений.

Определение 3.26

Нечеткое отношение *R* между двумя непустыми множествами (четкими) X и Y будем называть нечеткое множество, определенное на декартовом произведении $X \times Y$, т.е.

$$R \subseteq \mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \{(x, y) : x \in \mathrm{X},\ y \in \mathrm{Y}\}.$$

Другими словами, нечеткое отношение - множество пар

$$R = \{((x, y), R(x, y))\},$$

где

$\mu_R : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \quad [0, 1]$ - это функция принадлежности, которая каждой паре (x, y) приписывает ее степень принадлежности $\mu_R(x, y)$, которая интерпретируется как сила связи между элементами $x \in X, y \in Y$. В соответствии с принятым соглашением (п. 3.2) нечеткое отношение можно представить в виде

$$R = \sum_{\mathrm{X} \times \mathrm{Y}} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}$$

или

$$R = \int_{\mathrm{X} \times \mathrm{Y}} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}$$

Нечеткие отношения и их свойства. Пример

Пример 1.22

Применим определение для формализации неточного утверждения «y примерно равно x». Пусть X = {3, 4, 5} и Y = {4, 5, 6}. Отношение R можно определить следующим образом:

$$R = \frac{1}{(4,4)} + \frac{1}{(5,5)} + \frac{0,8}{(3,4)} + \frac{0,8}{(4,5)} + \frac{0,8}{(5,4)} + \frac{0,8}{(5,6)} + \frac{0,6}{(3,5)} + \frac{0,6}{(4,6)} + \frac{0,4}{(3,6)}$$

Следовательно, функция принадлежности $\mu_R(x, y)$ отношения R имеет вид

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = y, \\ 0{,}8, & \text{если} \quad |x - y| = 1, \\ 0{,}6, & \text{если} \quad |x - y| = 2, \\ 0{,}4, & \text{если} \quad |x - y| = 3. \end{cases}$$

Отношение R можно также задать в виде матрицы

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array},$$

где $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, а $y_1 = 4$, $y_2 = 5$, $y_3 = 6$.

Нечеткие отношения и их свойства. Пример

Для случая двух вещественных переменных $(x \in X, y \in Y)$ можно говорить о **нечетком отношении** $R: X \to Y$, которое определяет соответствие между элементами множества X и множества Y с помощью 2-мерной функции принадлежности $\mu(x, y)$:

$$R = \{(x,y), \mu(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Допустим, что мы имеем два набора чисел

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, \; Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\},$$

и пусть субъективные мнения экспертов о сравнительной величине этих чисел представлены в виде нечетких отношений:

$R_1\{x, y\}$ = «x определенно больше, чем y»;

$R_2\{x, y\}$ = «x приблизительно равно y».

Нечеткие отношения и их свойства. Пример

Зададим отношение R_1 и R_2 с помощью таблиц.

R_1

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0,9	0,1	0
x_2	1	1	0,6	0,1
x_3	1	1	1	0,6

R_2

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,1	0,4	0,9	0,1
x_2	0	0	0,5	0,8
x_3	0	0	0,1	0,6

Здесь (i, j)-й элемент таблицы равен значению соответствующей, функции принадлежности для i-го значения x и j-го значения y. Тогда операции объединения и пересечения указанных отношений могут быть интерпретированы как:

$R_1 \cup R_2$ = «x определенно больше или приблизительно равно у»;

$R_1 \cap R_2$ = «x определенно больше и в то же время приблизительно равно у».

Нечеткие отношения и их свойства. Пример

Функции принадлежности $\mu_{R_1 \cup R2}(x, y)$ и $\mu_{R_1 \cap R2}(x, y)$ могут быть найдены с помощью операций максимума и минимума. В этом случае они принимают вид табл.

$R_1 \cup R_2$

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0,9	0,1	0
x_2	1	1	0,6	0,8
x_3	1	1	1	0,6

$R_1 \cap R_2$

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,1	0,4	0,1	0
x_2	0	0	0,5	0,1
x_3	0	0	0,1	0,6

Нечеткие отношения и их свойства. Пример

Пример 3.22

Применим определение 3.26 для формализации неточного утверждения «y примерно равно x». Пусть $\mathbf{X} = \{3, 4, 5\}$ и $\mathbf{Y} = \{4, 5, 6\}$. Отношение R можно определить следующим образом:

$$R = \frac{1}{(4,4)} + \frac{1}{(5,5)} + \frac{0{,}8}{(3,4)} + \frac{0{,}8}{(4,5)} + \frac{0{,}8}{(5,4)} + \frac{0{,}8}{(5,6)} + \frac{0{,}6}{(3,5)} + \frac{0{,}6}{(4,6)} + \frac{0{,}4}{(3,6)}.$$

Следовательно, функция принадлежности $\mu_R(x, y)$ отношения R имеет вид

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = y\,, \\ 0{,}8, & \text{если} \quad |x - y| = 1\,, \\ 0{,}6, & \text{если} \quad |x - y| = 2\,, \\ 0{,}4, & \text{если} \quad |x - y| = 3\,. \end{cases}$$

Отношение R можно также задать в виде матрицы

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array}$$

где $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, а $y_1 = 4$, $y_2 = 5$, $y_3 = 6$.

Нечеткие отношения и их свойства. Пример

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x - y \le 0, \\ \dfrac{x-y}{30}, & \text{если} \quad 0 < x - y < \\ 1, & \text{если} \quad x - y \ge 30 \end{cases}$$

представляет неточное утверждение «особа x намного старше особы y».

Следует подчеркнуть, что нечеткое отношение R – это нечеткое множество, поэтому сохраняют силу введенные в п. 3.3 определения операций пересечения, суммирования и дополнения:

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)), \tag{3.166}$$

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)), \tag{3.167}$$

$$\mu_{\hat{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y). \tag{3.168}$$