

# Нахождение угла между двумя прямыми в пространстве

# Цели обучения

11.4.2 - находить угол между прямыми  
(по заданным уравнениям прямых);

# Цели урока

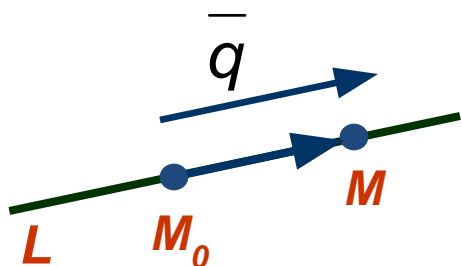
- Уметь находить угла между двумя прямыми в пространстве

# Прямая в пространстве

- Каноническое уравнение прямой
- Параметрическое уравнение прямой
- Угол между двумя прямыми

# Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая  $L$  проходит через данную точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  параллельно вектору:  $\vec{q} = \{m; n; p\}$



Тогда точка  $M(x; y; z)$  лежит на прямой только в том случае, если векторы  $\vec{q} = \{m; n; p\}$  и  $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$  коллинеарны

По условию коллинеарности двух векторов:

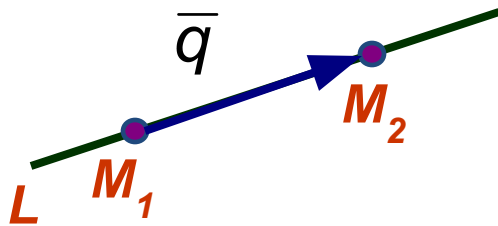
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Каноническое уравнение  
прямой

$\vec{q} = \{m; n; p\}$  - направляющий вектор прямой

# Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая проходит через две заданные и отличные друг от друга точки:  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ .



Тогда в качестве направляющего вектора в каноническом уравнении можно взять вектор:

$$\bar{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Уравнение прямой, проходящей  
через две заданные точки

# Параметрическое уравнение прямой

При решении многих практических задач используют параметрическое уравнение прямой, которое получается из канонического уравнения:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = t \\ \frac{y - y_0}{n} = t \\ \frac{z - z_0}{p} = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Параметрическое уравнение  
прямой

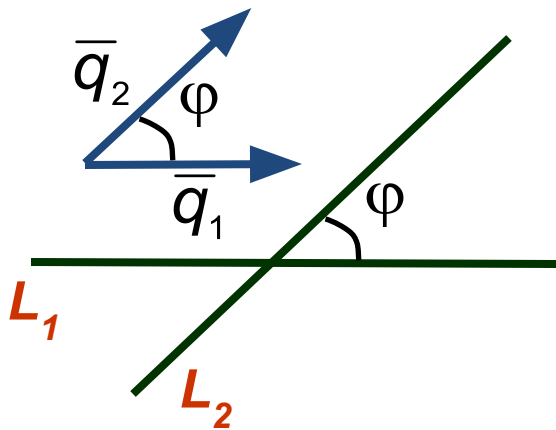
# Угол между прямыми

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

Углом между этими прямыми называется угол между направляющими векторами к этим прямым.

$$\bar{q}_1 = \{m_1; n_1; p_1\} \quad \bar{q}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$$



$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{|\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2|}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|} = \\ &= \frac{|m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \end{aligned}$$



# Пример:

Найти угол между прямыми  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$  и  $-\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

**Решение:** Для решения этой задачи найдем направляющие векторы этих прямых. Уравнение первой прямой задано в канонической форме, поэтому направляющий вектор  $\{3; 4; 5\}$ . Преобразуем второе уравнение к каноническому виду.

Найти угол между прямыми  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$  и  $-\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

Найти угол между прямыми  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$  и  $-\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

Найти угол между прямыми  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$  и  $-\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

Получено уравнение второй прямой в канонической форме:

Найти угол между прямыми  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$  и  $-\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

$\{-2; -1/3; 2/3\}$  - направляющий вектор второй прямой.

Найти угол между прямыми  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$  и  $-\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

Найти угол между прямыми  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$  и  $-\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

# Решение задач

1. Найдите угол между прямыми  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$  и  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$

2. Найдите угол между прямыми  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-2}{4}$  и  $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$

Найти угол между прямыми  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$  и  $\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

# Рефлексия

