Нахождение угла между двумя прямыми в пространстве

Цели обучения

11.4.2 - находить угол между прямыми (по заданным уравнениям прямых);

Цели урока

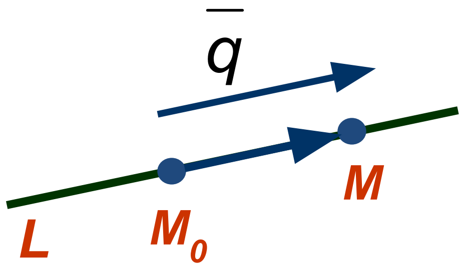
- Уметь находить угла между двумя прямыми в пространстве

Прямая в пространстве

- Каноническое уравнение прямой
- Параметрическое уравнение прямой
- Угол между двумя прямыми

Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая L проходит через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору: $\bar{q} = \{m; n; p\}$



Тогда точка $M(x; y; z)$ лежит на прямой только в том случае, если векторы $\bar{q} = \{m; n; p\}$ и $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарны

По условию коллинеарности двух векторов:

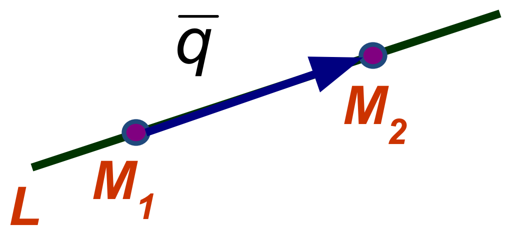
$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

Каноническое уравнение прямой

$\bar{q} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой

Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая проходит через две заданные и отличные друг от друга точки: ***$M_1(x_1; y_1; z_1)$*** и ***$M_2(x_2; y_2; z_2)$.***



Тогда в качестве направляющего вектора в каноническом уравнении можно взять вектор:

$$\overline{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Параметрическое уравнение прямой

При решении многих практических задач используют параметрическое уравнение прямой, которое получается из канонического уравнения:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=t \\ \dfrac{y-y_0}{n}=t \\ \dfrac{z-z_0}{p}=t \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}}$$

Параметрическое уравнение прямой

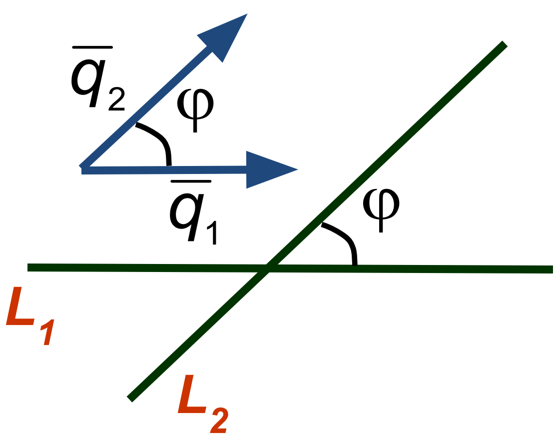
Угол между прямыми

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \qquad L_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Углом между этими прямыми называется угол между направляющими векторами к этим прямым.

$$\bar{q}_1=\{m_1;\,n_1;\,p_1\} \qquad \bar{q}_2=\{m_2;\,n_2;\,p_2\}$$



$$\cos\varphi=\frac{|\bar{q}_1\cdot\bar{q}_2|}{|\bar{q}_1|\cdot|\bar{q}_2|}=$$

$$=\frac{|m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

Пример:

Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$ и - $\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

Решение: Для решения этой задачи найдем направляющие векторы этих прямых. Уравнение первой прямой задано в канонической форме, поэтому направляющий вектор {3; 4; 5}. Преобразуем второе уравнение к каноническому вид.

Iайти угол между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$ и - $\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$ и - $\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$ и - $\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

Получено уравнение второй прямой в канонической форме:

Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$ и - $\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

{-2; -1/3; 2/3} - направляющий вектор второй прямой.

Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$ и $-\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{5}$ и $-\frac{x-2}{2} = 1 - 3y = \frac{3z-5}{2}$

Решение задач

1. Найдите угол между прямыми $\frac{\square-2}{2}=\frac{\square-1}{5}=\frac{\square+3}{-3}$ и $\frac{\square+1}{-1}=\frac{\square-4}{8}=\frac{\square-5}{4}$
2. Найдите угол между прямыми $\frac{\square-1}{3}=\frac{\square+4}{2}=\frac{\square-2}{4}$ и $\frac{\square+3}{2}=\frac{\square-1}{3}=\frac{\square+1}{-2}$

Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{5}$ и - $\frac{x-2}{2}=1-3y=\frac{3z-5}{2}$

Рефлексия


АКТИВНО УЧАСТВОВАЛ
БЫЛО ИНТЕРЕСНО
5
4
БЫЛО ПОНЯТНО
3
УЗНАЛ НОВОЕ
2