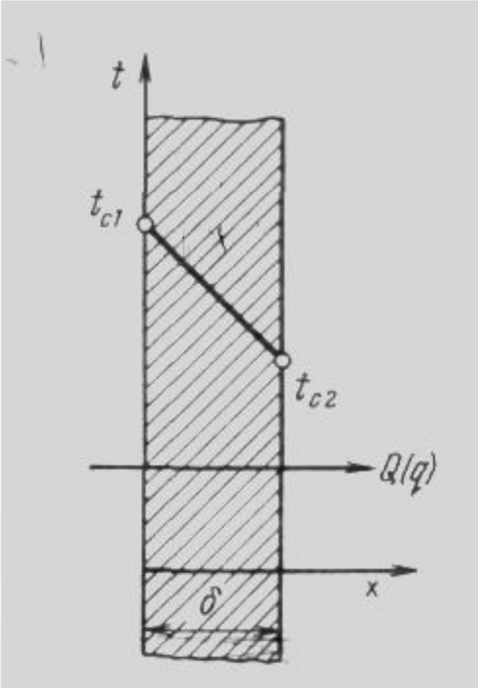
ЛЕКЦИЯ № 2

ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Однородная плоская стенка.

Простейшей и очень распространенной задачей, решаемой теорией теплообмена, является определение плотности теплового потока, передаваемого через плоскую стенку толщиной δ, на повер хностях которой поддерживаются температуры t_{c1} и t_{c2}



(рис. 1).

Рис. 1. Стационарное распределение температуры по толщине плоской стенки

Температура изменяется только по толщине пластины — по одной координате х. Такие задачи называются одномерными, решения их наиболее просты, и в данном курсе мы ограничимся рассмотрением только одномерных задач. Учитывая, что для одномерного случая

$$\operatorname{grad} t = dt/dx, \qquad (1)$$

и используя основной закон теплопроводности q = −λ grad t, ***<u>получаем дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности для плоской стенки:</u>***

$$q = -\lambda dt/dx. \qquad (2)$$

В стационарных условиях*, когда энергия не расходуется на нагрев,* ***плотность теплового потока q неизменна по толщине стенки.*** *В большинстве практи ческих задач приближенно предполагается, что коэффициент тепло проводности λ, не зависит от температуры и одинаков по всей толщине стенки.*

Значение λ находят в справочниках [15] при температуре

$$\bar{t} = 0{,}5\,(t_{c1} + t_{c2}), \qquad (3)$$

средней между температурами поверхностей стенки. (Погрешность расчетов при этом обычно меньше погрешности исходных данных и табличных величин, а при линейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры $\lambda = a + bt$
точная расчетная формула для q не отличается от приближенной).

При $\lambda = const$

$$dt/dx = -q/\lambda = \text{const}, \quad (4)$$

т. е. зависимость, температуры t от координаты x линейна (см. рис. 1) .

Разделив переменные в уравнении (4) и проинтегрировав по t от t_{c1} *до* t_{c2} *и по x от 0 до δ:*

$$\int_{t_{c1}}^{t_{c2}} dt = -\frac{q}{\lambda}\int_0^{\delta} dx, \quad (5)$$

получим зависимость, для расчета плотности теплового потока

$$q = (t_{c1} - t_{c2})\,\lambda/\delta, \quad (6)$$

Или

$$Q = qF = (t_{c1} - t_{c2})\,\lambda F/\delta. \quad (7)$$

По формуле (7) можно рассчитать коэффициент теплопроводности материала, если экспериментально замерить тепловой поток и разность температур на поверхностях пластины (стенки) известных размеров.

Отношение $\lambda F/\delta$ называется тепловой проводимостью стенки, а обратная величина $\delta / (\lambda F)$ тепловым или термическим сопротивлением стенки и обозначается R_λ. Пользуясь понятием термического сопротивления, формулу для расчета теплового потока можно представить в виде

$$Q=(t_{c1}-t_{c2})/R_\lambda, \qquad (8)$$

аналогичном закону Ома в электротехнике (сила электрического тока равна раз ности потенциалов, деленной на электрическое сопротивление проводника, по ко торому течет ток).

Очень часто термическим сопротивлением называют величину δ/λ, кото рая равна термическому сопротивлению плоской стенки площадью 1м^2.

Многослойная стенка.

Формулой (8) можно пользоваться и для расчета теплового потока через стенку, состоящую из нескольких плотно прилегающих друг к другу слоев разнородных материалов (рис. 2), например кирпичную стенку здания, покрытую слоем штукатурки, краски и т. д. Термическое сопротивление такой стенки равно сумме термических сопротивлений отдельных слоев:

$$R_\lambda=\sum_{i=1}^{n} R_{\lambda i}=\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{F\lambda_i}. \qquad (9)$$

В формулу (8) нужно подставить разность температур в тех точках (по верхностях), между которыми «включены» все суммируемые термические сопротивления, т.е.

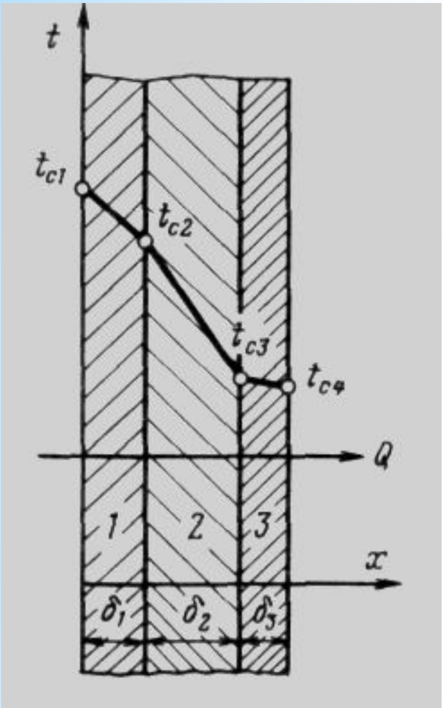


Рис. 8.3. Распределение температуры по толщине многослойной плоской стенки

В формулу (8) нужно подставить разность температур в тех точках (поверхностях), между которыми «включены» все суммируемые термические сопротивления, т.е. *в данном случае* t_{c1} *и* $t_{c(n+1)}$:

$$Q=\frac{t_{c1}-t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n} R_{\lambda i}}=\frac{t_{c1}-t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{F\lambda_i}}. \qquad (10)$$

Формулу (10) легко получить, записав разность температур по формуле (7) для каждого из n слоев многослойной стенки и сложив все n выражений с учетом того, что во всех слоях Q имеет одно и то же значение. При сложении все промежуточные температуры сократятся.

<u>Распределение температур в пределах каждого слоя</u> — линейное, однако в различных слоях крутизна температурной зависимости различна, поскольку со гласно формуле (4) $(dx/dt)_I = -q/\lambda_i$. Плотность теплового потока, проходящего через все слои, в стационарном режиме одинакова, а коэффициент теплопро водности слоев различен, следовательно, более резко температура меняется в сло ях с меньшей теплопроводностью. Так, в примере на рис. 2 наименьшей тепло проводностью обладает материал второго слоя, а наибольшей — третьего.

Рассчитав тепловой поток через многослойную стенку, можно определить падение температуры в каждом слое по соотношению (8) и найти температуры на границах всех слоев. Это очень важно при использовании в качестве теплоизоляторов материалов с ограниченной допустимой температурой. Обобщенную формулу для расчета температуры $t_{c(k+1)}$ за любым слоем (i +k) можно получить из выражения (10), подставив в него n = k:

$$t_{c(k+1)} = t_{c1} - Q \sum_{i=1}^{k} R_{\lambda i}. \qquad (11)$$

Контактное термическое сопротивление. *Идеально плотный контакт между отдельными слоями многослойной стенки получается, если один из слоев наносят на другой в жидком состоянии или в виде текучего раствора (цементного, гипсового и др.). Твердые тела касаются друг друга только вершинами профилей шеро ховатостей. Площадь контакта вершин пренебрежимо мала, и весь тепловой поток идет через воздушный зазор. Это создает дополнительное (контактное) термическое сопротивление R_k. Его можно приближенно оценить, если принять, что толщина зазора между соприкасающимися телами δ в среднем вдвое меньше максимального расстояния $\delta_{макс}$ между впадинами шероховатостей. Так, при контакте двух пластин с шероховатостью поверхности 5 класса (после чистовой обточки, строгания, фрезерования) $\delta_{макс} \approx 0{,}03$ мм и в воздухе комнатной температуры*

$$R_к = \delta/\lambda = 1{,}5\cdot10^{-5}/(2{,}59\cdot10^{-2}) =$$
$$= 0{,}58\cdot10^{-3}\ м^2\cdot К/Вт.$$

Это эквивалентно термическому сопротивлению слоя стали толщиной около 30 мм.

Для уменьшения контактного сопротивления необходимо заполнять зазоры каким-либо материалом с более высокой, чем у воздуха, теплопроводностью, на пример спаять или хотя бы склеить поверхности.

Цилиндрическая стенка. *Очень часто теплоносители движутся по трубам и требуется рассчитать тепловой поток передаваемый через цилиндрическ стенку трубы. Задача о распространения теплоты в цилиндрической стенке при известных и постоянных температурах на внутренней и наружной поверхностях, также одномерная, если ее рассматривать в цилиндрических координатах. Температура изменяется только вдоль радиуса (по координате r), а по длине трубы и по ее периметру остается неизменной. В этом случае grad t = dt/dr и закон Фурье будет иметь вид*

$$q = -\lambda (dt/dr), \quad (12)$$

или для трубы длиной l

$$Q = Fq = -2\pi r l \lambda (dt/dr). \quad (13)$$

Интегрировать удобно уравнение (13), так как тепловой поток не меняется по толщине стенки, а q = q/F ≠ const, поскольку площадь F = 2πrl, через которую проходит тепловой поток, зависит от радиуса. Разделим переменные:

$$dt = -\frac{Q}{2\pi\lambda l}\frac{dr}{r}. \quad (14)$$

Интеграл уравнения (14)

$$t = C - \frac{Q}{2\pi\lambda l}\ln r \quad (15)$$

показывает, что распределение температуры по радиусу стенки подчиняется ло-| гарифмическому закону (рис. 3).

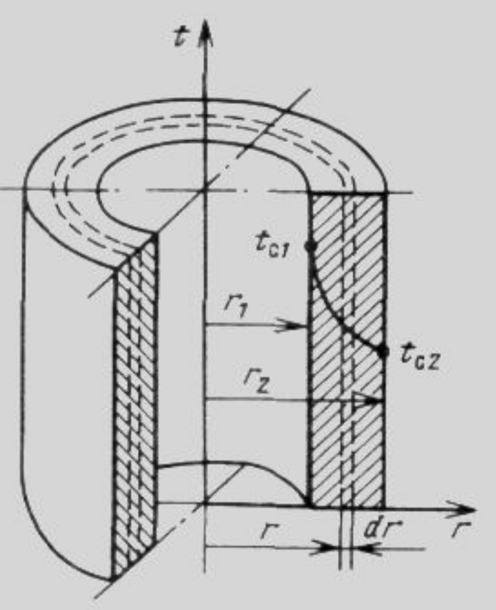


Рис. 3. Изменение температуры по толщине однослойной цилиндрической стенки

У внутренней поверхности, где кривизна стенки больше, температура меняется резче, чем у наружной.

Интегрирование уравнения (14) в определенных пределах (по t от t_{c1} до t_{c2} и по r от r_1 до r_2) дает зависимость для расчета теплового потока через цилиндрическую стенку:

$$Q = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{2\pi\lambda l}\ln\frac{d_2}{d_1}} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{R_\lambda}. \qquad (16)$$

Для труб обычно измеряется и приводится в условиях задач диаметр, а не радиус, поэтому отношение радиусов r_2/r_1 заменено отношением диаметров d_2/d_1

Термическое сопротивление для цилиндрической стенки имеет вид

$$R_\lambda = \frac{1}{2\pi\lambda l}\ln\frac{d_2}{d_1}, \qquad (17)$$

причем при $d_2/d_1 \approx 1$ расчет должен проводиться с высокой точностью, поскольку небольшая погрешность, допущенная при определении отношения d_2/d_1, в этом случае дает значительную ошибку при вычислении логарифма. Например, если значение d_2/d_1 = 1,09 округлить до 1,1 (погрешность округления меньше 1 %), погрешность вычисления логарифма, а следовательно, и теплового потока будет больше 10 %. С другой стороны, оказывается, что при отношении $d_2/d_1 \leq 1{,}5$ погрешность определения термического сопротивления цилиндрической стенки по формуле $R_\lambda = \delta/(\lambda \mathbf{F})$, справедливой для плоской стенки [поверхность трубы считается по среднеарифметическому диаметру $d = 0{,}5(d_1+d_2)$ дает ошибку меньше 1,5 %. Более высокая точность в практических расчетах требуется редко.

Для определения теплового потока через многослойную цилиндрическую стенку следует, как и для многослойной плоской стенки, просуммировать термические сопротивления отдельных слоев:

$$Q = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n} R_{\lambda i}} = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\lambda_i l} \ln \frac{d_{(i+1)}}{d_i}}. \qquad (18)$$

Отличие формулы (18) от (10) заключается только в способе расчета термических сопротивлений отдельных слоев для плоской и цилиндрической стенок. Но и это различие существенно только при больших отношениях наружного и внутреннего диаметров каждого слоя $d_н/d_{вн} = d_{(i+1)} > 1{,}5$. При меньших отношениях $d_н/d_{вн}$ термические со противления отдельных слоев, как уже было показано, целесообразнее считать по упрощенной формуле $R_{\lambda i} = \delta i/(\lambda_i F_i)$ справедливой для плоской стенки.

Расчет температур на границах слоев в данном случае осуществляется так же, как для многослойной плоской стенки, т.е. по формуле (11).

Шаровая стенка. *При постоянных температурах t_{c1} и t_{c2} на внутренней (радиусом r_1|) и наружной (радиусом r_2) поверхностях шаровой стенки температурное поле одномерно в сферических координатах, т. е. температура изменяется только по радиусу.*

Следовательно,

$$Q = qF = -\lambda F\,(dt/dr) = -\lambda 4\pi r^2\,(dt/dr). \qquad (19)$$

Разделив переменные и проинтегрировав по t в пределах от t_{c1} до t_{c2} и по r в пределах от r_1 до r_2:

$$\int_{t_{c1}}^{t_{c2}} dt = -\frac{Q}{4\pi\lambda}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}, \qquad (20)$$

получим расчетную формулу для теплового потока через шаровую стенку:

$$Q = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{R_\lambda}. \qquad (21)$$

Интересно отметить, что в отличие от цилиндра и пластины тепловая изоляция бесконечной толщины ($r_2 \to \infty$), наложенная на шар, не исключает теплопотери от него даже в стационарном режиме:

$$Q_{r\to\infty} = 4\pi r_1 \lambda\,(t_{c1} - t_{r\to\infty}). \qquad (22)$$

Тела сложной конфигурации. *В этом случае приходится рассматривать изменение температуры по двум или трем координатам, интегрирование уравнения теплопроводности сильно усложняется. Получить аналитическое решение часто не удается, тогда используют численные методы решения (§ 14.3).*

Иногда проще воспользоваться методом электротепловой аналогии. Дело в том, что законы распространения теплоты и электричества в сплошных средах описываются одинаковыми по форме (аналогичными) уравнениями.

Закон Ома в дифференциальной форме $j = -\operatorname{grad} E$ аналогичен закону Фурье

Соответственно аналогичными получаются и решения задач теплопроводности и электропроводности для тел одинаковой формы. Каждому тепловому параметру в этих решениях соответствует вполне определенный электрический аналог: плотности теплового потока q — плотность тока j, тепловому потоку Q — сила тока I, температуре t — электрический потенциал E, теплопроводности λ — электропроводность σ.

Пользуясь электротепловой аналогией, можно по имеющимся численным значениям электрических величин рассчитать соответствующие тепловые и наоборот. Например, выражения для термического R_λ и электрического R сопротивлений в решении любой конкретной задачи различаются только входящими в них значениями λ, и σ, т. е.

$$R_\lambda / R_э = \sigma / \lambda \quad \text{или} \quad R_\lambda = R_э \sigma / \lambda. \qquad (23)$$

Если получить аналитическое решение сложной задачи не удается, можно сделать электрическую модель объекта, омметром замерить электрическое сопротивление, а затем рассчитать термическое сопротивление и тепловые потоки.

Наиболее просто изготовить двухмерную электрическую модель. Из электропроводной бумаги, которая выпускается нашей промышленностью, вырезав масштабную модель сечения исследуемго тела. Изотермическая граница моделируется линией постоянного электрического потенциала. По этой границе к бумаге прижимается металлический элекрод соответствующей формы. Теплоизолированная граница (если такая есть) моделируется просто краем бумаги.

При решении двухмерных задач предполагается, что в направлении, перпендикулярном рассматриваемому сечению, исследуемое тело имеет единичную длину. Если реальная длина тела l, то его термическое сопротивление R_λ выразится через электрическое сопротивлении $R'_э$ двухмерной модели и электропроводность σ' бумаги следующим образом:

$$R_\lambda = R'_э \sigma' / (\lambda l). \quad (24)$$