Метод логарифмирования раскрытия неопределенностей. Правило Лопиталя

Продолжаем разбирать готовые ответы на правило Лопиталя и сегодня рассмотрим примеры сведение неопределенностей 1^∞, 0^0, 0^∞ под это правило. Все случаи рассмотреть невозможно, однако 15 примеров, что идут далее помогут разобраться с алгоритмами вычисления пределов каждого внимательного студента.

Метод логарифмирования раскрытия неопределенностей в пределах

Пример 16 Вычислить предел по формуле Лопиталя limit(x^(1/(1-x)),x→0)

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/(1-x)}$$

Решение: Предел имеет особенность типа 1^∞. Для применения метода логарифмирования за новую функцию обозначим $y=x^{1/(1-x)}$. Далее логарифмируем обе части, получим

$\ln(y)=\ln(x^{1/(1-x)})=\ln(x)/(1-x)$.

По правилу Лопиталя раскрываем неопределенность вида 0/0

$$\lim_{x\to 1}\ln y=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=-1$$

Это еще не конечный ответ, чтобы найти y нужно экспоненту поднести к степени равному найденному пределу.

$\ln(y)=-1 \rightarrow y=e^{-1}=1/e$.

Пример 17 Раскрыть неопределенность по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0+}(\arcsin x)^{2x}$$

Решение: Имеем неопределенность типа ноль в степени ноль 0^0. Поступаем по схеме для показательных функций, а именно – логарифмуємо выражение в лимите.

$y=(\arcsin(x))^2$;

$\ln(y)=2x\cdot\ln(\arcsin(x))$.

Для раскрытия неопределенности используем правило Лопиталя дважды

$$\lim_{x\to 0+} 2x\cdot\ln(\arcsin(x)) = 2\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\arcsin(x))}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= 2\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\ln(\arcsin(x))\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 2\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\arcsin(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\arcsin(x)}\cdot 1}{\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = -2\lim_{x\to 0+}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(\arcsin(x)\right)'} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0+}\frac{2x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = -4\lim_{x\to 0+} x\cdot\sqrt{1-x^2} = -4\cdot 0\cdot 1 = 0$$

Здесь нужно брать производную от *$\ln(\arcsin(x))$*, как от сложной функции, помните об этом.

Пример 18 Найти предел пользуясь правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x^{\tan x}$$

Решение: Подставки аргумента равного 90 градусам дает неопределенность вида единицы в степени бесконечность 1^∞. Согласно алгоритму вычисления пределов, функцию под лимитом следует прологарифмировать. Далее найти предел логарифма, а потом экспонента в степени полученного значения и будет ответом к заданию. Проведем вычисления

$y= \tan(x)^{\sin(x)}$;

$\ln(y)=\ln(\sin(x))\hat{}tg(x)=\tan(x)\cdot\ln(\sin(x))$.

Воспользуемся правилом Лопиталя, предварительно заменив тангенс на котангенс по формуле tg(x)=1/cot(x).

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)\ln\sin(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin(x)}{\cos(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\ln\sin(x))'}{(\cos(x))'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sin(x)}\cdot\cos(x)}{-\frac{1}{\sin^2(x)}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \underline{\sin(x)}\,\underline{\cos(x)} = -\underline{0}\cdot\underline{1} = 0$$

Но это еще не ответ, нужно потенцировать 0.

$\ln(y)=0 \to y=e^0=e$.

Сведение неопределенностей в пределах под правило Лопиталя

Пример 19 Мнимая подстановка $x=2$ в функцию дает неопределенность вида 0/0, поэтому применяем правило Лопиталя однократно, а далее без труда вычисляем лимит.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)'}{\left(x-2\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{7+x}}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2\sqrt{7+x}}=\frac{1}{2\sqrt{7+2}}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

Пример 20 Подстановкой убеждаемся, что имеем неопределенность вида 0/0. По формуле Лопиталя вычисляем производную числителя и знаменателя по переменной, чтобы раскрыть неопределенность.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan(x)-1}{\sin(4x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{4\cos(4x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\cos(4x)\cos^2(x)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\,\underline{\cos(4x)}\,\underline{\cos^2(x)}}=\frac{1}{4\cdot\underline{(-1)}\cdot\underline{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=-\frac{1}{2}$$

Пример 21 Имеем долю полиномов без свободного члена, что в предельной точке дает особенность вида 0/0. Для ее раскрытие по правилу Лопиталя дифференцируем каждый полином пока не получим дробь, предел которой можно вычислить подстановкой

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+2x\right)'}{5x'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2}{5}=\frac{2}{5};$$

Пример 22 В числителе имеем x^2, в знаменателе 2^x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(2^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\cdot\ln 2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\frac{2}{\ln 2}\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{\left(2^x\right)'}=\frac{2}{\ln 2}\lim_{x\to\infty}\overbrace{\frac{1}{2^x\cdot\ln 2}}^{\to 0}=\frac{2}{\ln^2 2}\cdot\boxed{0}=0$$

Решение: Поскольку аргумент стремится к бесконечности, то прямая подстановка дает особенность вида ∞/∞. Ее раскрываем дважды беря производные числителя и знаменателя по "x".

Пример 23 Имеем дробь с функций *e^x, x^a*. В такого сорта примерах правило Лопиталя применяют до тех пор, пока в знаменателе не получим факториал числа *a!*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^a\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{ax^{a-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{a\left(x^{a-1}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{a\cdot(a-1)x^{a-2}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{a!}=+\infty$$

Запомните, что ограничений на количество повторных применений правила Лопиталя нет, находим производные до тех пор, пока имеем одну из неопределенностей 0/0 или ∞/∞.

Пример 24 Очередное задание на раскрытие неопределенности вида ∞/∞ решаем путем дифференцирования отдельно числителя *x^a* и знаменателя *ln(x)*. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{a-1}}{\frac{1}{x}}=a\lim_{x\to+\infty}x\cdot x^{a-1}=+\infty$

Пример 25 Имеем долю функций *f(x)=arctan(x)* и *g(x)=e^{3x}-1*. В нуле они дают неопределенность вида 0/0, поэтому имеем все основания применить правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan(7x)}{e^{3x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+49x^2}\cdot7}{3e^{3x}}=\frac{7}{3}$$

Поскольку выражения *e^3x→1* и *1/(1+49x^2) →1* когда *x→0*, то предел равен 7/3.

Пример 26 Согласно алгоритму, чтобы раскрыть неопределенность ∞/∞ дважды применяем правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2\ln x)'}{(3x^3)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{3\cdot 3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{9x^3}=0$$

Пример 27 Переходим от неопределенности вида ноль умножить на бесконечность к неопределенности бесконечность разделить на бесконечность, которую раскрываем по правилу Лопиталя через дифференцирование числителя и знаменателя дроби. Внимательно посмотрите схему перехода от одной неопределенности к другой и запомните, что когда имеем произведение логарифма на другую функцию, то в знаменатель переносим последнюю, а не логарифм.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln(x)=[0\cdot -\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}}}=-2\lim_{x\to 0}x^{-1-(-3/2)}=-2\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=-2\sqrt{0}=-2\cdot 0=0$$

Пример 28 Прямая подстановка дает неопределенность ноль умножить на бесконечность 0*∞

$$\lim_{x\to 0}(e^x-1)ctg(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\frac{1}{ctg(x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{tg(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(tg(x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\frac{1}{\cos^2(x)}}=\frac{e^0}{\frac{1}{\cos^2(0)}}=\frac{1}{\frac{1}{1}}=1$$

Чтобы свести пример к применению правила Лопиталя в искусственный способ котангенс переносим в знаменател дроби, а далее заменяем $1/ctg(x)=tg(x)$. Таким образом получаем особенность в виде доли бесконечно малых функций, раскрываем дифференцированием по Лопиталю и подстановкой $x=0$.

Раскрытие неопределенностей ∞-∞

Пределы с неопределенностью ∞-∞ также раскрываем по правилу Лопиталя, но предварительно проводим определенные элементарные действия над слагаемыми, чтобы перейти от разности бесконечно больших функций к дроби.

Пример 29 Формулы ниже хорошо иллюстрируют как дважды применяли дифференцирование числителя и знаменателя дроби, чтобы избавиться от неопределенности 0/0.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{\left((x-1)\ln x\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{\left(x\ln x+(x-1)\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}$$

Пример 30 Имеем неопределенность вида ∞-∞, которую раскрываем путем сведения дробей к общему знаменателю. Далее по правилу Лопиталя вычисляем производные числителя и знаменателя, и так дважды.

Пример 30 Имеем неопределенность вида ∞-∞, которую раскрываем путем сведения дробей к общему знаменателю. Далее по правилу Лопиталя вычисляем производные числителя и знаменателя, и так дважды.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\sin x\right)'}{\left(x\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)'}{\left(\sin x+x\cos x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}$$

И только когда избавляемся неопределенности выполняем подстановку аргумента в предел. Считаем, чтобы начать решать примеры на правило Лопиталя, 30 приведенных примеров вполне достаточно. Если есть проблемы с расчетными или модулями, то всегда можете обращаться к нам за помощью!

Последствия первого замечательного предела

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}=\frac{a}{b}.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=1.}$$

Стоит отметить, что не все пределы, содержащие тригонометрические функции следует сразу сводить к первому замечательному пределу. Все зависит, как входит функция, и можно ли свести под нужную формулу. Плюс тригонометрические функции, когда те стремятся к нулю всегда можно заменить эквивалентными бесконечно малыми выражениями, но это уже другая техника вычисления пределов.

что стремится к нулю. Об этом Вы должны помнить и только в таких случаях сводить вычисления под правило первого замечательного предела. **Важно чтобы переменная в тригонометрической функции стремилась к нулю**, например:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x}{\sin\left(x^2-4x\right)}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\tan(3x)}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(7x)}{7x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(b\cdot x)}{b\cdot x}=1$$