

## Метод логарифмирования раскрытия неопределенностей. Правило Лопиталья

Продолжаем разбирать готовые ответы на правило Лопиталья и сегодня рассмотрим примеры сведения неопределенностей  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $0^\infty$  под это правило. Все случаи рассмотреть невозможно, однако 15 примеров, что идут далее помогут разобраться с алгоритмами вычисления пределов каждого внимательного студента.

### Метод логарифмирования раскрытия неопределенностей в пределах

**Пример 16** Вычислить предел по формуле Лопиталья  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{1/(1-x)})$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/(1-x)}$$

**Решение:** Предел имеет особенность типа  $1^\infty$ . Для применения метода логарифмирования за новую функцию обозначим  $y = x^{1/(1-x)}$ . Далее логарифмируем обе части, получим

$$\ln(y) = \ln(x^{1/(1-x)}) = \ln(x)/(1-x).$$

По правилу Лопиталья раскрываем неопределенность вида  $0/0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = -1$$

Это еще не конечный ответ, чтобы найти  $y$  нужно экспоненту поднести к степени равному найденному пределу.

$$\ln(y) = -1 \rightarrow y = e^{-1} = 1/e.$$

**Пример 17** Раскрыть неопределенность по правилу Лопитала

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x)^{2x}$$

**Решение:** Имеем неопределенность типа ноль в степени ноль  $0^0$ . Поступаем по схеме для показательных функций, а именно – логарифмуем выражение в лимите.

$$y = (\arcsin(x))^2;$$

$$\ln(y) = 2x \cdot \ln(\arcsin(x)).$$

Для раскрытия неопределенности используем правило Лопитала дважды

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(\arcsin(x)) &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\arcsin(x))}{\frac{1}{x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(\arcsin(x)))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\arcsin(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\arcsin(x)} \cdot 1}{\frac{1}{x^2}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2)'}{(\arcsin(x))'} = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{1} = -4 \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \sqrt{1-x^2} = -4 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Здесь нужно брать производную от  $\ln(\arcsin(x))$ , как от сложной функции, помните об этом.

**Пример 18** Найти предел пользуясь правилом Лопитала

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x^{\tan x}$$

**Решение:** Подставки аргумента равного 90 градусам дает неопределенность вида единицы в степени бесконечность  $1^\infty$ . Согласно алгоритму вычисления пределов, функцию под лимитом следует прологарифмировать. Далее найти предел логарифма, а потом экспонента в степени полученного значения и будет ответом к заданию. Проведем вычисления

$$y = \tan(x)^{\sin(x)};$$

$$\ln(y) = \ln(\sin(x))^{\tan(x)} = \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)).$$

Воспользуемся правилом Лопитала, предварительно заменив тангенс на котангенс по формуле  $\tan(x) = 1/\cot(x)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) \ln \sin(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin(x)}{\cos(x)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\ln \sin(x))'}{(\cos(x))'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)}{-\frac{1}{\sin^2(x)}} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) \cos(x)}{1} = -0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Но это еще не ответ, нужно потенцировать 0.

$$\ln(y) = 0 \rightarrow y = e^0 = e.$$

## Сведение неопределенностей в пределах под правило Лопиталья

**Пример 19** Мнимая подстановка  $x=2$  в функцию дает неопределенность вида  $0/0$ , поэтому применяем правило Лопиталья однократно, а далее без труда вычисляем лимит.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{7+x}-3)'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2\sqrt{7+x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2\sqrt{7+x}} = \frac{1}{2\sqrt{7+2}} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

**Пример 20** Подстановкой убеждаемся, что имеем неопределенность вида  $0/0$ . По формуле Лопиталья вычисляем производную числителя и знаменателя по переменной, чтобы раскрыть неопределенность.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{\sin(4x)} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{4 \cos(4x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{4 \cos(4x) \cos^2(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{4 \cos(4x) \cos^2(x)} = \frac{1}{4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

**Пример 21** Имеем долю полиномов без свободного члена, что в предельной точке дает особенность вида  $0/0$ . Для ее раскрытия по правилу Лопиталья дифференцируем каждый полином пока не получим дробь, предел которой можно вычислить подстановкой

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x)'}{5x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2}{5} = \frac{2}{5};$$

**Пример 22** В числителе имеем  $x^2$ , в знаменателе  $2^x$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(2^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2^x \cdot \ln 2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \frac{2}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(2^x)'} = \frac{2}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x \cdot \ln 2} = \frac{2}{\ln^2 2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

**Решение:** Поскольку аргумент стремится к бесконечности, то прямая подстановка дает особенность вида  $\infty/\infty$ . Ее раскрываем дважды беря производные числителя и знаменателя по "x".

**Пример 23** Имеем дробь с функцией  $e^x, x^a$ . В такого сорта примерах правило Лопиталья применяют до тех пор, пока в знаменателе не получим факториал числа  $a!$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^a)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{ax^{a-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{a(x^{a-1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{a \cdot (a-1)x^{a-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{a!} = +\infty \end{aligned}$$

Запомните, что ограничений на количество повторных применений правила Лопиталья нет, находим производные до тех пор, пока имеем одну из неопределенностей  $0/0$  или  $\infty/\infty$ .

**Пример 24** Очередное задание на раскрытие неопределенности вида  $\infty/\infty$  решаем путем дифференцирования

отдельно числителя  $x^a$  и знаменателя  $\ln(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^{a-1}}{\frac{1}{x}} = a \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot x^{a-1} = +\infty$$

**Пример 25** Имеем долю функций  $f(x)=\arctan(x)$  и  $g(x)=e^{3x}-1$ . В нуле они дают неопределенность вида  $0/0$ , поэтому имеем все основания применить правило Лопиталья.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(7x)}{e^{3x}-1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+49x^2} \cdot 7}{3e^{3x}} = \frac{7}{3}$$

Поскольку выражения  $e^{3x} \rightarrow 1$  и  $1/(1+49x^2) \rightarrow 1$  когда  $x \rightarrow 0$ , то предел равен  $7/3$ .

**Пример 26** Согласно алгоритму, чтобы раскрыть неопределенность  $\infty/\infty$  дважды применяем правило Лопитала.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 \ln x)'}{(3x^3)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{3 \cdot 3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{9x^3} = 0\end{aligned}$$

**Пример 27** Переходим от неопределенности вида ноль умножить на бесконечность к неопределенности бесконечность разделить на бесконечность, которую раскрываем по правилу Лопитала через дифференцирование числителя и знаменателя дроби. Внимательно посмотрите схему перехода от одной неопределенности к другой и запомните, что когда имеем произведение логарифма на другую функцию, то в знаменатель переносим последнюю, а не логарифм.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(x) &= [0 \cdot -\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[ \frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} \frac{1}{x^{3/2}}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1 - (-3/2)} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = -2\sqrt{0} = -2 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

**Пример 28** Прямая подстановка дает неопределенность ноль умножить на бесконечность  $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \operatorname{ctg}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{\operatorname{ctg}(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{tg}(x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\operatorname{tg}(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{e^0}{\frac{1}{\cos^2(0)}} = \frac{1}{1} = 1$$

Чтобы свести пример к применению правила Лопиталья в искусственный способ котангенс переносим в знаменател дробы, а далее заменяем  $1/\operatorname{ctg}(x) = \operatorname{tg}(x)$ . Таким образом получаем особенность в виде доли бесконечно малых функций, раскрываем дифференцированием по Лопиталю и подстановкой  $x=0$ .



## Раскрытие неопределенностей $\infty-\infty$

Пределы с неопределенностью  $\infty-\infty$  также раскрываем по правилу Лопиталья, но предварительно проводим определенные элементарные действия над слагаемыми, чтобы перейти от разности бесконечно больших функций к дроби.

**Пример 29** Формулы ниже хорошо иллюстрируют как дважды применяли дифференцирование числителя и знаменателя дроби, чтобы избавиться от неопределенности  $0/0$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x\ln x + (x-1)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x\ln x + (x-1))'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{0+1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**Пример 30** Имеем неопределенность вида  $\infty-\infty$ , которую раскрываем путем сведения дробей к общему знаменателю. Далее по правилу Лопиталья вычисляем производные числителя и знаменателя, и так дважды.

**Пример 30** Имеем неопределенность вида  $\infty-\infty$ , которую раскрываем путем сведения дробей к общему знаменателю. Далее по правилу Лопиталья вычисляем производные числителя и знаменателя, и так дважды.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{0 + 1 + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

И только когда избавляемся неопределенности выполняем подстановку аргумента в предел. Считаем, чтобы начать решать примеры на правило Лопиталья, 30 приведенных примеров вполне достаточно. Если есть проблемы с расчетными или модулями, то всегда можете обращаться к нам за помощью!

## Последствия первого замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{a}{b}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = 1.$$

Стоит отметить, что не все пределы, содержащие тригонометрические функции следует сразу сводить к первому замечательному пределу. Все зависит, как входит функция, и можно ли свести под нужную формулу. Плюс тригонометрические функции, когда те стремятся к нулю всегда можно заменить эквивалентными бесконечно малыми выражениями, но это уже другая техника вычисления пределов.

**что стремится к нулю.** Об этом Вы должны помнить и только в таких случаях сводить вычисления под правило первого замечательного предела. **Важно чтобы переменная в тригонометрической функции стремилась к нулю,** например:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{\sin(x^2 - 4x)} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan(3x)} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(7x)}{7x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(b \cdot x)}{b \cdot x} = 1$$