тема № 7

Основы теории вероятностей и математической статистики

ЛЕКЦИЯ № 1

Основы теории вероятностей

Вопросы лекции:

1. Случайные события
2. Случайные величины

Вечные истины

Математику многие любят за ее **вечные истины:**

дважды два всегда четыре,

сумма четных чисел четна,

а площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

2х2=4

$$S = a \cdot b$$

В любой задаче, которую мы решаем на уроках математики, у всех получается один и тот же ответ – нужно только не делать ошибок в решении.

Случайные события

Реальная жизнь оказывается не такой простой и однозначной.

Исходы многих явлений невозможно предсказать заранее, какой бы полной информацией мы о них не располагали.

Нельзя, например, сказать наверняка, какой стороной упадет брошенная вверх монета, когда в следующем году выпадет первый снег.

Случай имеет свои законы !

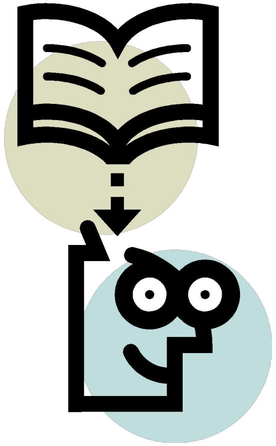
Однако случай тоже имеет свои законы, которые начинают проявляться при многократном повторении случайных явлений.

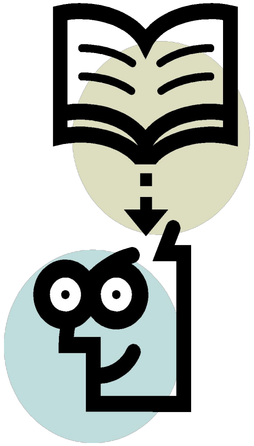
Именно такие закономерности изучаются в специальном разделе математики

Теория вероятностей и математическая статистика изучает ???

«Теория вероятностей есть в сущности не что иное, как здравый смысл, сведенной к исчислению»

Лаплас





В настоящее время **Теория вероятностей** имеет статус точной науки наравне

с арифметикой, алгеброй, геометрией, тригонометрией и т.д.

А начиналось все весьма своеобразно…

Предыстория теории вероятностей

Богатый материал для наблюдения за случайностью на протяжении многих веков давали азартные игры.

У истоков науки

В археологических раскопках специально обработанные для игры кости животных встречаются, начиная с V века до н.э.

Самый древний игральный кубик найден в Северном Ираке и относится к IV тысячелетию до н.э.

- **Теория вероятностей** — раздел математики, изучающий вероятности событий. Теория вероятностей разрабатывает методы, с помощью которых можно вычислить вероятности одних событий, зная вероятности других. Теория вероятностей изучает также случайные величины и их распределения.

- **Испытание** — опыт, действие в результате которого наступает событие.

- **Элементарное событие** — простейшее событие, которое наступает в результате случайного опыта. Элементарное событие нельзя разложить на более простые.

Определить испытание и случайное событие

испытание

событие

При бросании монеты выпадает герб или цифра

Виды событий

достоверные

(обозначение: U)

невозможные

(обозначение: V)

случайные

(обозначение: A, B, C и т.д.)

Невозможные – те, которые в данных условиях произойти не могут.

Пример: вода замерзла при $t=+20^{o}$

Достоверные – те, которые в данных условиях обязательно произойдут.

Пример: после зимы придет весна.

Случайные – те, которые в данных условиях могут произойти, а могут и не произойти.

Пример: завтра утром пойдет дождь.

Случайные события

- Пример: светит солнце

- Пример: прилетел инопланетянин

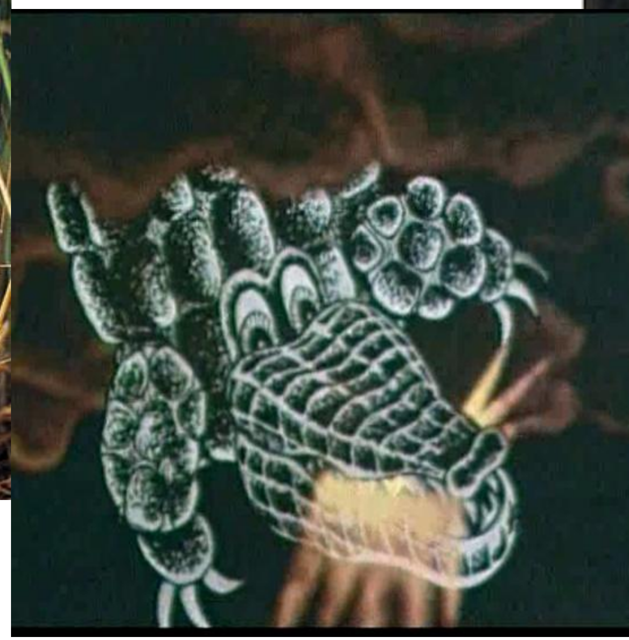
Упражнения

- **определите вид события:**

1) Любому курсанту 2 курса больше шестнадцати лет.
2) В сборнике задач по высшей математике страница двадцать пять начинается со слова на букву ы.
3) В группе два курсанта отмечают день рождения 30 марта.

Упражнения

- **Составьте пример события по картинке и определите его вид:**



Зенит обыграет Спартак

Лиса живет в норе

Крокодил солнце проглотил

Виды случайных событий

простые

сложные

совместные

несовместные

противоположные $\overline{A}$

полная группа событий

равновозможные

***Простые событие** – это элементарный исход в результате испытания*

***Сложные события** – события, состоящие из нескольких элементарных исходов*

События бывают:
совместные и несовместные

- **Совместные** – это события, которые в данных условиях могут происходить одновременно.

Пример: Наступило лето. Стоит жаркая погода.

- **Несовместные** –это события, которые в данных условиях не могут происходить одновременно.

Пример: Наступило утро. Наступила ночь.

Упражнения

• определите, события совместные или несовместные:

1) Выпал снег. Начались соревнования по лыжам.

2) Наступил ноябрь. В Летнем саду зацвела сирень.

События равновозможные

Равновозможные –это те события, которые в данных условиях одинаково возможны.

Пример: при подбрасывании монеты возможно:

1. выпадение орла
2. выпадение решки

Упражнения

• определите, являются ли события равновозможными:

1)При подбрасывании кубика:

- выпадает число 4
- выпадает число 6

2)При подбрасывании кубика:

- выпадает число 2
- выпадает число 7

Противоположным ***к событию A называют событие $\overline{A}$,
которое происходит,
когда не происходит A***

***Полная группа событий,
если в результате испытания непременно произойдет хотя бы одно из них***

Полная группа попарно несовместных событий, если в результате испытания непременно произойдет одно и только одно событие

1) **Являются ли несовместными** события A_1 и A_2:

испытание – бросание монеты;
события: A_1 – «появление герба»,
A_2 – «появление цифры»;

испытание – бросание игральной кости;
события: A_1 – «появление 2 очков»,
A_2 – «появление нечетного числа очков»;

испытание – бросание двух монет;
события: A_1 – «появление герба на одной из монет»,
A_2 – «появление герба на второй монете»?

2) **Найти среди событий** A_i **достоверные и невозможные**:

A_1 – «появление 10 очков при бросании игральной кости»;
A_2 – «появление 10 очков при бросании трех игральных костей»;
A_3 – «появление 20 очков при бросании трех игральных костей»;
A_4 – «наугад выбрано двузначное число не больше 100»;
A_5 – «появление двух гербов при бросании двух монет».

3) Образуют ли **полную группу события** $А_1$ и $А_2$:

события: $А_1$ – «появление герба»,

$А_2$ – «появление цифры»;

испытание – три выстрела по мишени;

события: $А_1$ – «ни одного попадания»,

$А_2$ – «одно попадание»,

$А_3$ – «два попадания»,

$А_4$ – «три попадания».

Являются ли они несовместными?

4) Являются ли **равновозможными события**

испытание – бросание монеты;

испытание – бросание игральной кости;

события: $А_1$ – «появление двух очков»,

$А_2$ – «появление пяти очков»;

испытание – бросание игральной кости;

события: $А_1$ – «появление двух очков»,

$А_2$ – «появление нечетного числа очков»;

испытание – два выстрела по мишени;

события: $А_1$ – «промах при первом выстреле»,

$А_2$ – «промах при втором выстреле»?

Классическое определение вероятности

Рассмотрим группу попарно несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$,
связанную с некоторым испытанием

Событие ***A*** называется ***благоприятствующим*** данному событию ***B*****,**
если наступление события ***A*** влечет за собой наступление события ***B***

Пусть при бросании игральной кости события A_2, A_4, A_6 - появление соответственно 2, 4 и 6 очков.

A – событие, состоящее в появлении четного числа очков;

события A_2, A_4, A_6 благоприятствуют событию *A*

Под *вероятностью случайного события* понимают численную меру объективной возможности появления данного события

Классическое определение вероятности

Свойства вероятности

$$0 \le P(A) \le 1$$

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

1. Вероятность достоверного события равна ***единице***

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Вычислить вероятность выпадения герба при одном бросании монеты

2. Вероятность невозможного события равна ***нулю***

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное ***между нулем и единицей***

$$0 < m < n$$

$$0 < \frac{m}{n} < 1$$

$$0 < P(A) < 1$$

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

ПРОБЛЕМНЫЙ ВОПРОС 1:

А можно ли вычислить вероятность события с помощью ряда экспериментов?

Опыт человечества

Вероятность попасть под дождь
в Лондоне гораздо выше, чем в пустыне Сахара.

Весь наш жизненный опыт подсказывает, что любое событие считается тем более вероятным, чем чаще оно происходит. Значит, вероятность должна быть каким-то образом связана с частотой.

Частота случайного события

<u>Абсолютной частотой</u> случайного события A в серии из N случайных опытов называется число N_A, которое показывает, сколько раз в этой серии произошло событие A.

Частота случайного события

Относительной частотой случайного события называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов:

$$W(A) = \frac{N_A}{N}$$

где A – случайное событие по отношению к некоторому испытанию,
N раз проведено испытание и при этом событие A наступило в N_A случаях.

Примеры

Пример 1. Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчика в такой серии наблюдений?

$$W(A) = \frac{515}{1000} \approx 0{,}515$$

Ответ: 0,515

Примеры

Пример 2. За лето на Черноморском побережье было 67 солнечных дней. Какова частота солнечных дней на побережье за лето? Частота пасмурных дней?

$$W(A) = \frac{67}{92} \approx 0,728 \qquad W(B) = \frac{25}{92} \approx 0,272.$$

Ответ: 0,728; 0,272.

Примеры

Пример 3. Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных изделий в партии из 1000 изделий. Найдите частоту изготовления бракованных изделий.

Ответ: 0,005

Примеры

Пример 4. Для выяснения качества семян было отобрано и высеяно в лабораторных условиях 1000 штук.

980 семян дали нормальные всходы. Найдите частоту нормального всхода семян.

Ответ: 0,98

ПРОБЛЕМНЫЙ ВОПРОС 2:

Может быть, относительную частоту и нужно принять за вероятность?

Фундаментальным свойством относительных частот является тот факт, что *с увеличением числа опытов относительная частота случайного события постепенно стабилизируется и приближается к вполне определенному числу, которое и следует считать его* ***вероятностью.***

Проверка

Пример 5. Подбрасывание монеты.

А – выпадает герб.

Классическая вероятность:

всего 2 исхода, 1 исход события A:

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

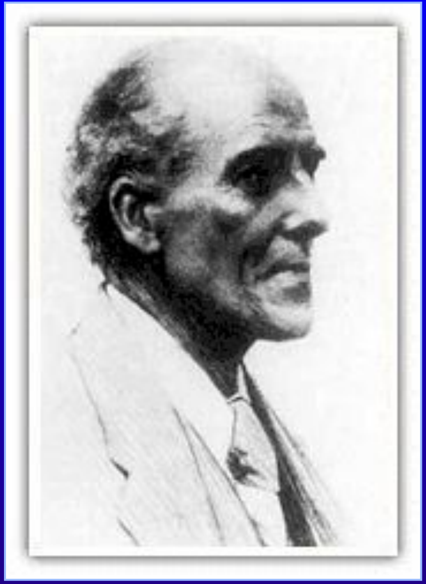
Проверка

Жорж Бюффон

Пример 5. Французский естествоиспытатель Бюффон (XVIII в.) бросил монету 4040 раз, и при этом герб выпал в 2048 случаях. Следовательно, частота выпадения герба в данной серии испытаний равна:

$$W(A) = \frac{2048}{4040} = 0,50693...$$

Проверка



Карл Пирсон

Пример 5. Английский математик Карл Пирсон (1857-1936) бросал монету 24000 раз, причем герб выпал 12012 раз. Следовательно, частота выпадения герба в данной серии испытаний равна:

$$W(A) = \frac{12012}{24000} = 0,5005$$

Результаты

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad W(A) = 0{,}50693...$$

$$W(A) = 0{,}5005$$

Вывод

Пример 5 подтверждает естественное предположение о том, что вероятность выпадения герба при одном бросании монеты равна 0,5.

Статистическая вероятность

<u>Вероятность случайного события</u> приближенно равна частоте этого события, полученной при проведении большого числа случайных экспериментов: $P(A) \approx \frac{N_A}{N}$, где N_A - число испытаний, в которых наступило событие А, N – общее число испытаний.

Задача №6.

Чтобы определить, как часто встречаются в лесопарке деревья разных пород, ребята провели следующие эксперименты. Каждый выбрал свою тропинку и по пути следования записывал породу каждого десятого дерева.

Результаты были занесены в таблицу:

Породы	Сосна	Дуб	Береза	Ель	Осина	Всего
Число деревьев	315	217	123	67	35	757

Оцените вероятность того, что выбранное наугад в этом парке дерево будет:

а) сосной;
б) хвойным;
в) лиственным.

Указание. Ответ запишите в виде десятичной дроби с тремя знаками после запятой.

Задача №6.

Решение:

а) A={выбранное наугад в парке дерево - сосна}
$N_A = 315$, $N = 757$, $P(A) = 315/757 \approx$ **0,416**;

б) B ={выбранное наугад в парке дерево - хвойное}
$N_A = 315 + 67 = 382$, $N = 757$.
$P(A) = 382/757 \approx$ **0,505**;

в) C = {выбранное наугад в парке дерево - лиственное}
$N_A = 217 + 123 + 35 = 375$, $N = 757$.
$P(A) = 375/757 \approx$ **0,495**.

Задача №7.

По статистике, на каждые 1000 лампочек приходится 3 бракованные. Какова вероятность купить исправную лампочку?

Решение:

3/1000 = 0,003

1 – 0,003 = **0,997**

Задача №8.

Демографы утверждают, что вероятность рождения близнецов равна 0,012. В скольких случаях из 10 000 рождений можно ожидать появление близнецов?

Решение:

$$P(A) = 0{,}012$$

$$N = 10000$$

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

$$\frac{N_A}{10000} = 0{,}012$$

$$N_A = 0{,}012 \cdot 10000 = 120$$

Ответ: в 120 случаях.

Основные формулы комбинаторики

Что же такое «Комбинаторика»?

Комбинаторика – это раздел математики, в котором исследуются и решаются задачи выбора элементов из исходного множества и расположения их в некоторой комбинации, составленной по заданным правилам.

Правила сложения и умножения в комбинаторике

Правило суммы

Если два действия A и B взаимно исключают друг друга, причем действие A можно выполнить m способами, а B – n способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо A, либо B) можно $n + m$ способами.

Пример

В группе учится 20 юношей и 5 девушек. Сколькими способами можно назначить одного дневального?

Решение

Дневальным можно назначить либо юношу, либо девушку, т.е. дневальным может быть любой из 20 юношей, либо любая из 5 девушек. По правилу суммы получаем, что одного дневального можно назначить 20+5=25 способами

Правило произведения

Пусть требуется выполнить последовательно k действий.

Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие n_2 способами, третье – n_3 способами и так до *k-го* действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Пример. В группе учится 20 юношей и 5 девушек. Сколькими способами можно назначить двух дневальных?

Решение

Первым дневальным можно назначить либо юношу, либо девушку. Т.к. в группе учится 20 юношей и 5 девушек, то назначить первого дневального можно 20+5=25 способами.

После того, как мы выбрали первого дневального, второго мы можем выбрать из оставшихся 24 человек, т.е. 24-ю способами.

По теореме умножения двое дневальных могут быть выбраны 25*24=600 способами.

Размещениями из

n различных элементов по m
$(m \le n)$

называют комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

$$A_n^m = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(m-1)]}_{m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Пример. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Искомое число сигналов $A_6^2 = \frac{6!}{4!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 \cdot 6}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = 5 \cdot 6 = 30$.

Пример. Группа слушателей второго курса изучает 10 различных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в среду, если в этот день должно быть три пары по различным дисциплинам?

Способов составления расписания из 10 дисциплин по три существует столько, сколько можно составить размещений из десяти предметов по три, так как способы могут отличаться друг от друга как порядком (первая пара по дисциплине «Высшая математика» или по дисциплине «Физика» – это разница), так и хотя бы одной дисциплиной:

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{7!} = \frac{\cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{7!}} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Перестановками из n различных элементов называют размещения из этих n по n

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Пример.

Для лечения заболевания применяют три лекарства. Полагают, что последовательность, в которой принимают лекарства, оказывает существенное влияние на результаты лечения.

Сколько имеется различных порядков назначения этих лекарств?

$$P_3 = 3! = 6$$

Сочетаниями из

n различных элементов по m

$\left(m \le n\right)$

называют комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

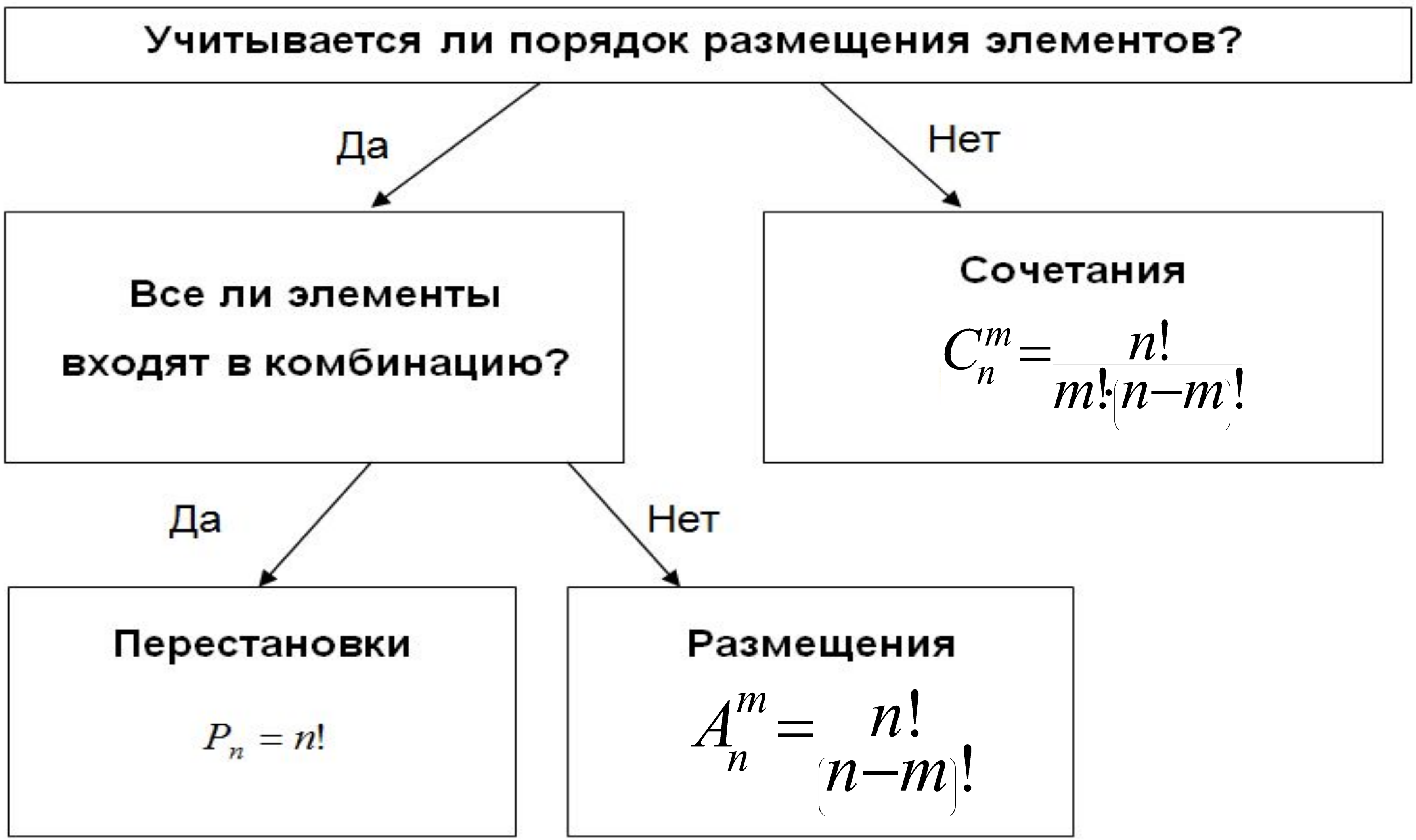
$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot \left(n-1\right) \cdot \left(n-2\right) \cdot \ldots \cdot \left(n-m+1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \left(m-1\right) \cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример. Сколько существует способов выбрать два цветка из корзины, в которой 5 роз и 4 хризантемы?

Два цветка выбираем из девяти. В данном случае не важно, какой цветок будет первым в паре. Количество способов будет равно:

$$C_9^2 = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{\cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{7!}} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

Алгоритм выбора формулы для вычисления количества комбинаций



1. Из трех элементов 2, 5, 6 можно составить по два элемента следующие размещения:

(2; 5), (5 ;2), (2; 6), (6; 2), (5; 6), (6; 5)

2. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 5 \cdot 6 = 30$$

3. Для лечения заболевания применяют три лекарства. Полагают, что последовательность, в которой принимают лекарства, оказывает существенное влияние на результаты лечения. Сколько имеется различных порядков назначения этих лекарств?

$$P_3 = 3! = 6$$

4. В корзине 3 белых и 2 черных шара. Найти число способов выбора двух шаров, если они могут быть любого цвета

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$$

5. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{9\cdot 10} = \frac{1}{90}$$

Схема выбора с возвращением

Если ***при упорядоченной выборке*** m элементов из n элементы возвращаются обратно, то полученные выборки представляют собой

размещения с повторениями

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Пример. Сколько существует четырёхзначных пин-кодов?

По условию задачи нам предложен набор из $n = 10$ цифр, из которого выбираются $m = 4$ цифры и располагаются в определенном порядке, при этом цифры в выборке могут повторяться (т. е. любой цифрой исходного набора можно пользоваться произвольное количество раз).

Найдем количество пин-кодов по формуле размещений с повторениями:

$$\overline{A}_{10}^{4} = 10^{4} = 10\,000$$

Схема выбора с возвращением

Пусть в множестве из n элементов есть m различных типов элементов, при этом 1-й тип повторяется n_1 раз, 2-й – n_2 раз, …, n-й – n_m раз, причем

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n.$$

Тогда перестановки элементов данного множества представляют собой ***перестановки с повторениями***

$$P_n\left(n_1, n_2, .. n_m\right) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}$$

Пример. Сколько существует способов расположения шахматных фигур на первой линии шахматной доски?

Порядок важен, места на доске различны, но есть повторения (2 ладьи, 2 слона и 2 коня).

Нужна формула перестановки с повторениями, $n = 8$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$, $n_4 = 2$, $n_5 = 2$. Их число:

$$P_8\left(1,1,2,2,2\right) = \frac{8!}{1!1!2!2!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = 5\,040$$

Схема выбора с возвращением

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно ***без последующего упорядочивания*** (таким образом, одни и те же элементы могут выниматься по нескольку раз, т.е. повторяться), то полученные выборки есть ***сочетания с повторениями***

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$$

Задача: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение: Так как порядок цифр в числе существенен, цифры могут повторяться, то это будут размещения с повторениями из пяти элементов по три, а их число равно:

$$\overline{A}_5^3 = 5^3 = 125$$

Задача: В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: эклеры, песочные, наполеоны и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных.

Решение: Покупка не зависит от того, в каком порядке укладывают купленные пирожные в коробку. Покупки будут различными, если они отличаются количеством купленных пирожных хотя бы одного сорта. Следовательно, количество различных покупок равно числу сочетаний четырех видов пирожных по семь -

$$\overline{C}_4^7 = C^7_{4+7-1} = C^7_{10} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{\cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{7!} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

Задача: Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас»?

Решение: всего букв 6. Из них одинаковы n_1«*а*» =3, n_2«*н*»=2, n_3«*с*»=1.

Следовательно, число различных перестановок равно

$$\overline{P}_6(3,2,1) = \frac{6!}{3!2!1!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 60$$

Операции над событиями

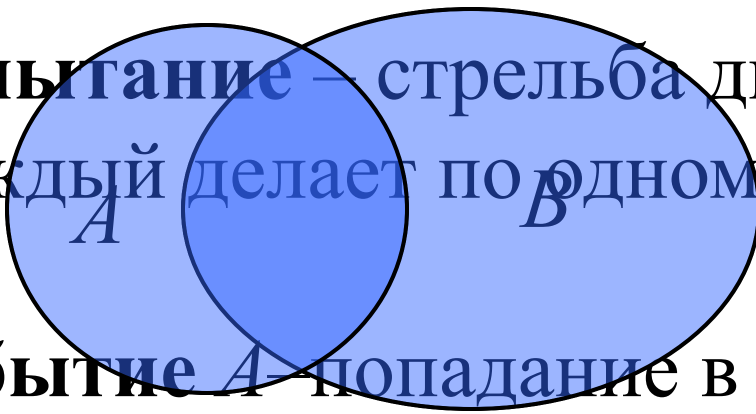
Операции над случайными событиями

Суммой

$$A+B = C$$

Суммой $A_1, A_2, \dots, A_k$

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_k$$



Испытание – стрельба двух стрелков (каждый делает по одному выстрелу)

Событие A – попадание в мишень первым стрелком;

Событие B - попадание в мишень вторым стрелком.

Суммой событий $A+B = C$ является событие …

Операции над случайными событиями

Произведением

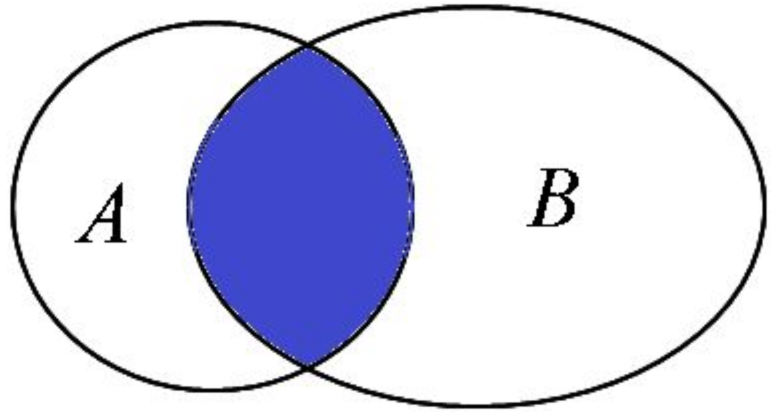
$$A \cdot B = C$$

Испытание – стрельба

Произведением

(каждый делает по одн

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k$$



Событие *A* – попадани ом,

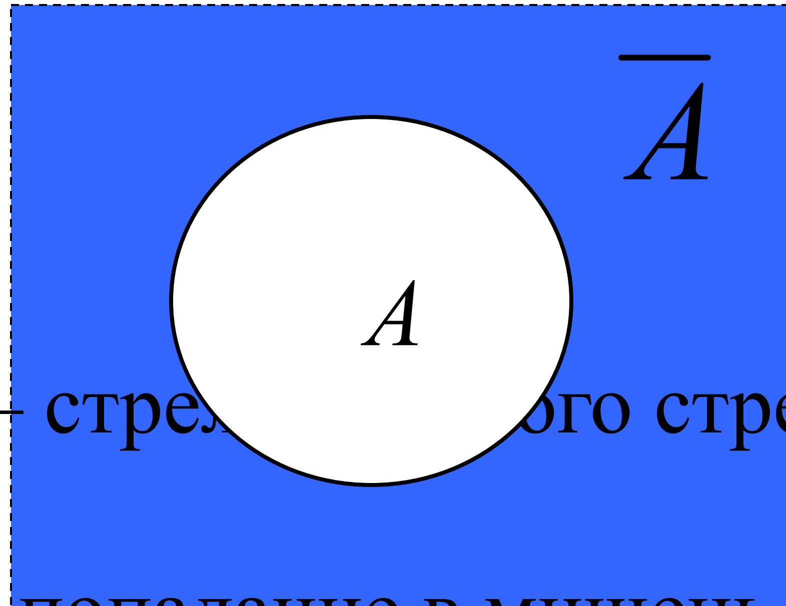
Событие *B* - попадани м.

Произведением событий $A{\cdot}B$ является событие …

Операции над случайными событиями

Отрицанием события A

$$\overline{A}$$



Испытание – стрел ого стрелка

Событие A – попадание в мишень стрелком

Событие $\overline{A}$ - промах по мишени

Теоремы сложения вероятностей

Когда наступит событие $C = A + B$?

A* или *B* или *они наступят вместе

несовместные

A или B

совместные

A или B или $A \cdot B$

Теорема

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна …

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Теорема

Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий

$$A_1, A_2, ..., A_n$$

равна …

$$P\left(A_1 + A_2 + ... + A_n\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + ... + P\left(A_n\right)$$

Теорема

Вероятность суммы двух совместных событий равна …

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

Следствие 1

$A_1, A_2, \ldots, A_n$

полная группа
попарно несовместных событий

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

Следствие 2

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Пример. В коробке имеется 250 лампочек, из них 100 по 90 Вт, 50 – по 60 Вт, 50 – по 25 Вт и 50 – по 15 Вт. Определить вероятность того, что мощность любой наугад взятой лампочки не превысит 60 Вт.

Решение.

Рассматриваем следующие события:

A = {мощность лампочки равна 90 Вт}, вероятность $P(A)$=100/250=0,4;

B = {мощность лампочки равна 60 Вт};

C = {мощность лампочки равна 25 Вт};

D = {мощность лампочки равна 15 Вт}.

События A, B, C, D образуют *полную группу*, так как все они несовместны и одно из них обязательно наступит в данном опыте (выборе лампочки).

Вероятность наступления одного из них есть достоверное событие, тогда $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$.

События {мощность лампочки не более 60 Вт} (т.е. меньше или равна 60 Вт), и {мощность лампочки более 60 Вт} (в данном случае – 90 Вт) являются противоположными.

По свойству противоположных чисел $P(B)+P(C)+P(D)=1\text{-}P(A)$.

Учитывая, что $P(B)+P(C)+P(D)=P(B+C+D)$, получим

$$P(B+C+D)=1\text{-}P(A)=1\text{-}0{,}4=0{,}6.$$

Пример. Два стрелка стреляют в одну и ту же цель, причём вероятность поражения цели первым стрелком 0,8, а вторым стрелком 0,5. Оба стрелка стреляют одновременно и один раз. Какова вероятность того, что цель будет поражена хотя бы одним из стрелков?

Решение:

Пусть A – попадание в цель первым стрелком,

B – вторым стрелком,

$A+B$ – поражение цели хотя бы одним стрелком,

$A \cdot B$ – поражение цели обоими стрелками.

Тогда $P(A+B) = 0{,}8 + 0{,}5 - P(A \cdot B)$.

Считая события A и B независимыми имеем:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$.

Тогда $P(A+B) = 0{,}8 + 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}9$.

Теоремы умножения вероятностей

Когда наступит событие $C = A \cdot B$?

A и B ***наступят вместе***

независимые

зависимые

условная вероятность

$$P_A(B)$$

Теорема

Вероятность произведения двух ***зависимых*** событий A и B равна …

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Теорема

Вероятность произведения двух независимых событий равна …

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Пример. В ящике имеются 7 белых и 5 чёрных шаров, отличающихся лишь цветом. Опыт состоит в том, что сначала вынимают (не глядя) один шар и, не опуская его обратно, вынимают ещё один шар. Какова вероятность, что оба вынутых шара чёрные?

Решение: Появление первого чёрного шара (событие A) имеет вероятность $P(A)=\dfrac{5}{12}$. Если первый шар оказался чёрным, то условная вероятность события B – появление второго чёрного шара (при условии, что первый шар был чёрным) – равна $P_A(B)=\dfrac{4}{11}$, т.к. перед вынимание второго шара осталось 11 шаров, из них 4 чёрных. Вероятность вынуть два чёрных шара подряд можно подсчитать по формуле:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{33}.$$

Пример. Три ящика содержат по 10 деталей. В первом ящике - 8 стандартных деталей, во втором - 7, в третьем - 9. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение. Вероятность того, что из первого ящика взята стандартная деталь (событие A), $P(A) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Вероятность того, что из второго ящика взята стандартная деталь (событие B), $B(\quad) = \frac{7}{10}$.

Вероятность того, что из третьего ящика взята стандартная деталь (событие C), $P(\quad) = \frac{9}{10}$. Так как события A, B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения):

$$P(A \cdot B \cdot A) = P\ B(\quad)P\ C(\quad)\cdot(\quad) = \frac{4}{5}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{9}{10} = 0{,}504$$

ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ СОБЫТИЙ

$P(A+B)=?$

События A и B *несовместные*

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

События A и B *совместные*

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

$P(AB)=?$

События A и B *независимые*

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

События A и B *зависимые*

$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$

Брошены 3 игральные кости. Определить вероятность того, что выпадет три «шестерки».

Круговая мишень состоит из зон с номерами

1, 2, 3.

Вероятности попадания в эти зоны при одном выстреле соответственно равны 0,1; 0,35 и 0,4.

Найти вероятность: попадания в первую или третью зоны.

Пусть A и B – некоторые события, связанные с одним опытом, причем $P(A) = 0{,}25$ и $P(B) = 0{,}35$.

Предполагая, что A и B независимы, вычислите вероятность того, что произошло одно из событий A и B.

Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в 1, 2 и 3 справочнике соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8.

Найти вероятность того, что формула содержится только в двух справочниках.

В группе 25 студентов, из них 10 юношей и 15 девушек.

Какова вероятность того, что из вызванных наудачу трех студентов первые две девушки, третий – юноша?

Ученик получает оценку от 2 до 5 баллов. Вероятности того, что ему поставят «4», «3» и «2», соответственно равны 0,45, 0,23 и 0,09.

Определите вероятность того, что он получит оценку не ниже «4».

В группе, состоящей из 25 студентов, спортивный разряд по борьбе имеют 10 человек, по стрельбе – 12.

Вероятность того, что студент этой группы имеет разряды по обоим видам спорта, равна 0,32.

Найдите вероятность того, что наугад выбранный студент имеет какой-нибудь разряд.

Два стрелка произвели по одному выстрелу.

Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,5, вторым 0, 7.

Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

Формула
полной вероятности

Формула полной вероятности

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из n попарно несовместных событий

$$H_1, H_2, \ldots, H_n,$$

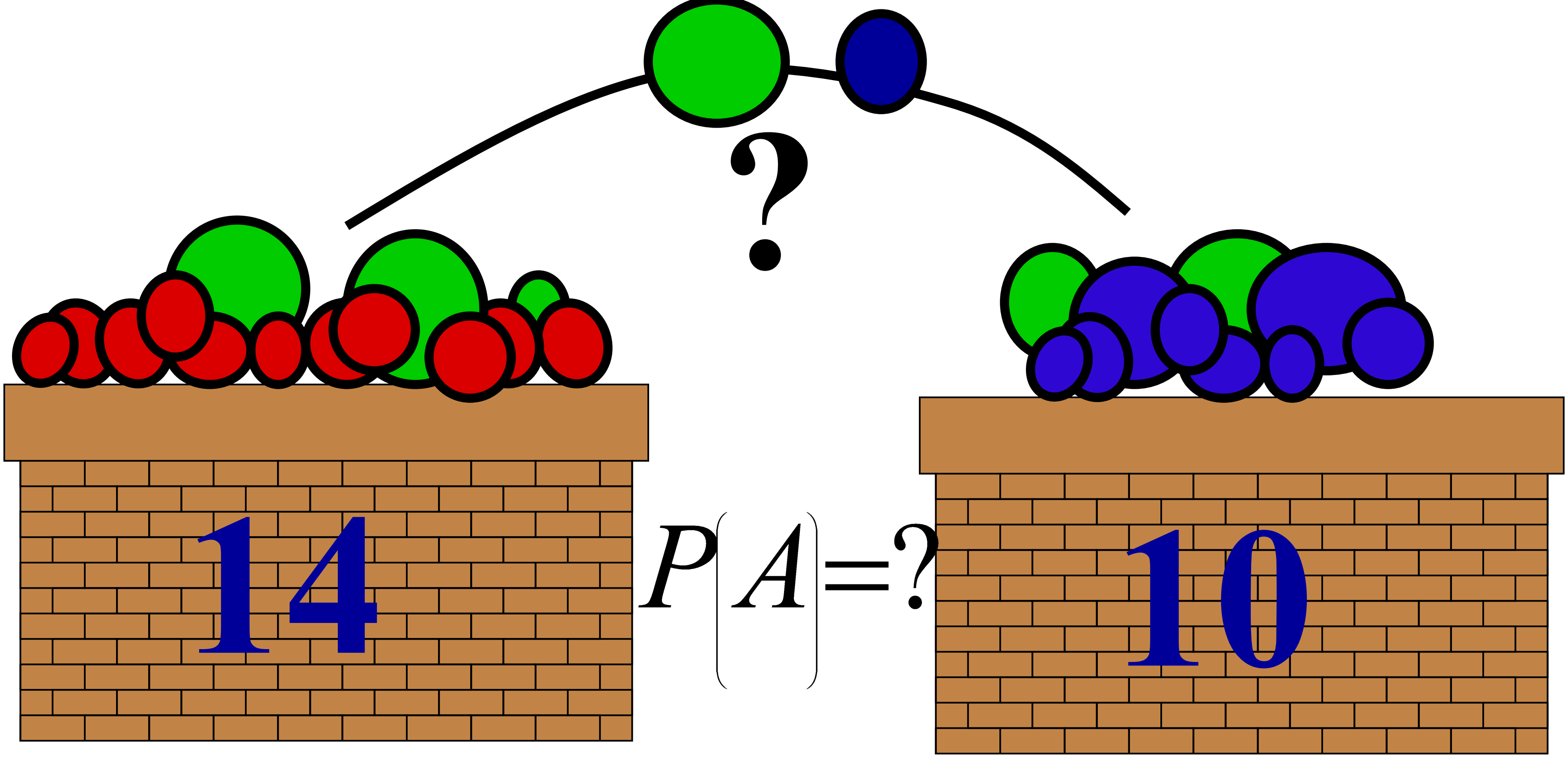
образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A)$$

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называются ***гипотезами***

Пример. В двух корзинах имеются шары.
В первой корзине 14 шаров, из них 3 зеленого цвета. Во второй корзине 10 шаров, из них 2 зеленого цвета.

Из второй корзины наудачу взят один шар и переложен в первую корзину. Найти вероятность того, что взятый наудачу шар из первой корзины окажется зеленым.



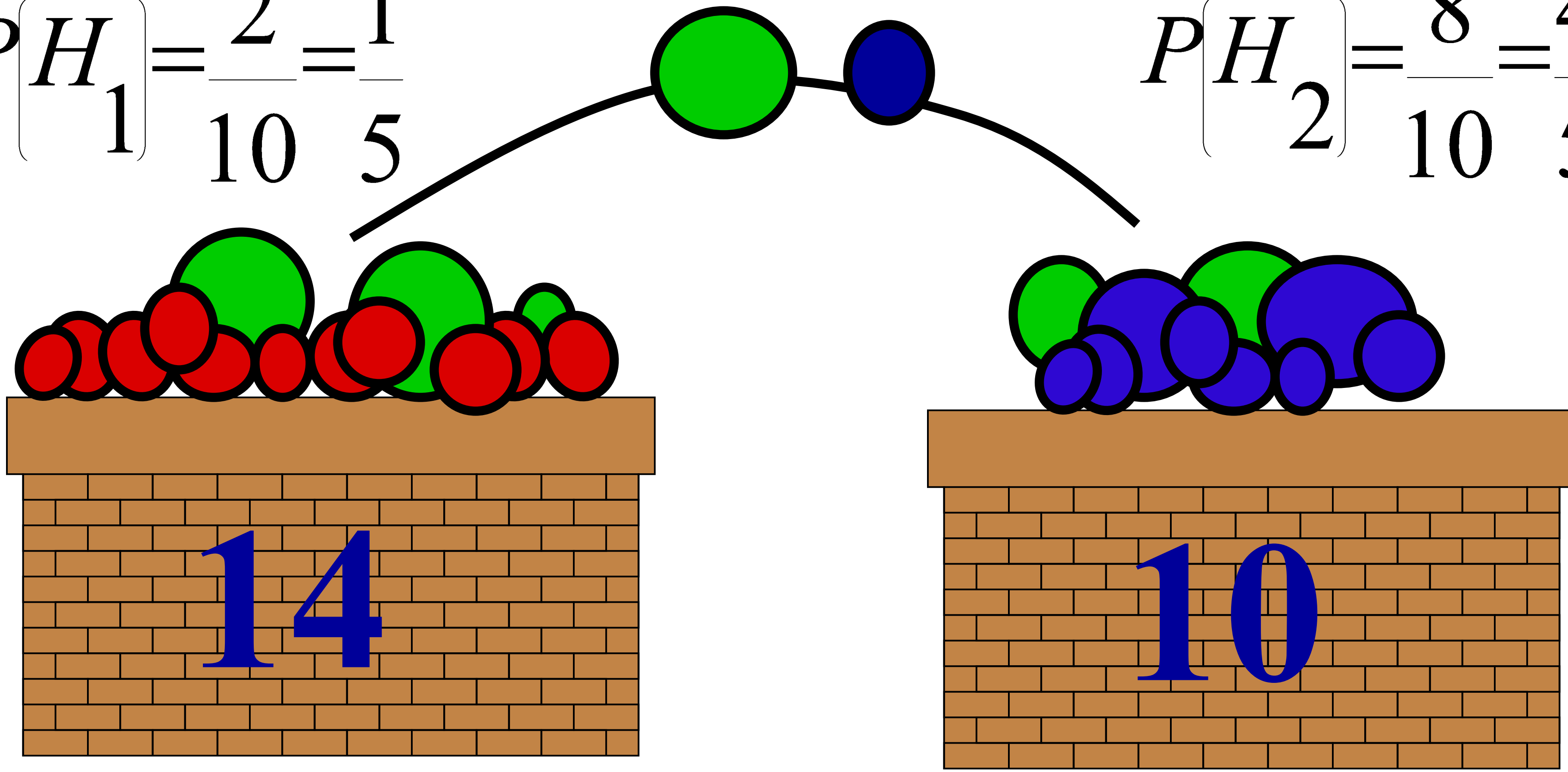
$$P(A) = ?$$

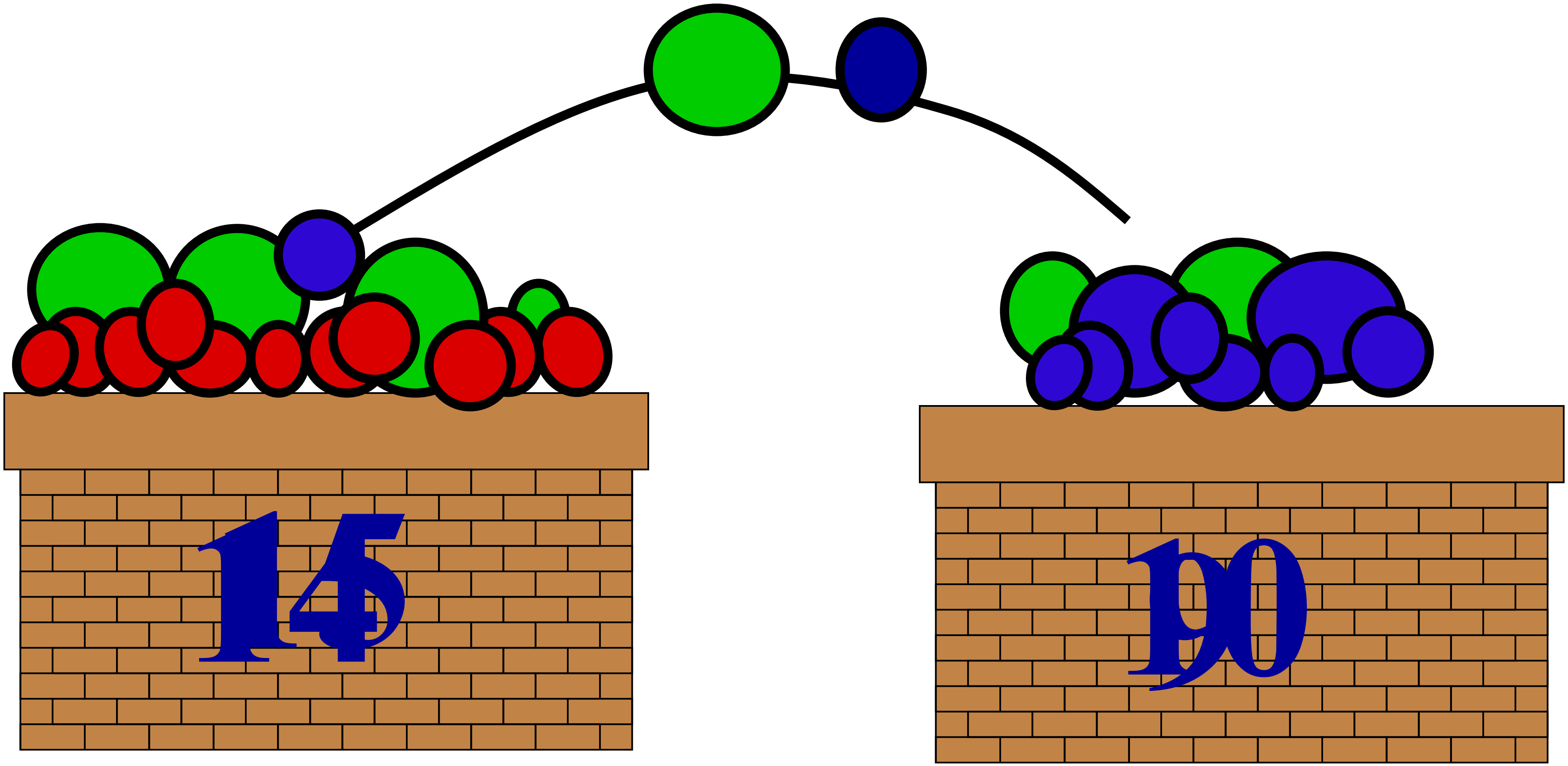
H_1 H_2

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A)$$

$P(H_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$P(H_2) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$





$$P_{H_1}(A)=\frac{4}{15}$$

$$P_{H_2}(A)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

$$P(A)=\frac{4}{15}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{16}{75}$$

Формула Байеса используется для ***<u>переоценки вероятностей доопытных гипотез.</u>***

Для оценки вероятности появления некоего события **A** выдвигают ряд ***<u>несовместных</u>*** гипотез (все возможные решения), которые могут повлечь за собой событие **A**.

Перед началом эксперимента выдвинутым гипотезам приписываются ***<u>предположительные вероятности</u>***.

Далее эти гипотезы можно проверить с помощью эксперимента.

Целью эксперимента является ***<u>разумная коррекция</u>*** этих *доопытных* вероятностей.

В результате эксперимента эти *доопытные* вероятности заменяются ***<u>послеопытными</u>***, причем некоторые из них могут оказаться настолько малыми, что позволяют отбросить соответствующие гипотезы из дальнейших рассмотрений.

Опыт с оставшимися гипотезами можно повторить, каждый раз уточняя их вероятности. Таким образом мы можем выстроить рейтинг гипотез, выводя на первые позиции те, которые наиболее вероятно повлекут за собой событие **A**.

Формула Байеса

$$P_A\left(H_k\right)=\frac{P\left(H_k\right)P_{H_k}\left(A\right)}{P\left(A\right)}$$

Пусть произведено одно испытание, в результате которого произошло событие A.

$$P\left(A\right)=\sum_{j=1}^{n}P\left(H_j\right)P_{H_j}\left(A\right)$$

Как, в связи с тем, что событие А уже произошло, изменились величины $P\left(H_k\right)$, $k=1,2,\ldots,n$

$$P_A\left(H_k\right)=?$$

$$P_A\left(H_k\right)=\frac{P\left(H_k\right)P_{H_k}\left(A\right)}{\sum_{j=1}^{n}P\left(H_j\right)P_{H_j}\left(A\right)}$$

Пример. Предположим, что 5% мужчин и 0,25% всех женщин имеют рост выше 180 см, наугад выбранное лицо имеет рост выше 180 см считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек:

а) мужчина; б) женщина.

Событие A – выбранный человек оказался ростом выше 180 *см*

Гипотеза H_1 - выбранный человек мужчина

Гипотеза H_2- выбранный человек женщина

$$P(H_1)=P(H_2)=0,5$$

$$P(A) = ?$$

$$P_{H_1}(A) = 0,05$$

$$P_{H_2}(A) = 0,0025$$

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,0025 = 0,02625$$

а)

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{0,5\cdot 0,05}{0,02625}=\frac{20}{21}$$

б)

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{0,5\cdot 0,0025}{0,02625}=\frac{1}{21}$$

Пример. Известно, что 30% приборов собирает специалист высшей квалификации, 70% приборов – специалист средней квалификации. Вероятность того, что прибор, собранный специалистом высшей квалификации, надёжен, равна 0,9. Для специалиста средней квалификации эта вероятность равна 0,8. Взятый наудачу прибор оказался надёжным. Найти вероятность того, что этот прибор собран специалистом высшей квалификации.

Событие А: Взятый наудачу прибор оказался надёжным.

Гипотеза H_1 – появление прибора, собранного специалистом высшей квалификации.
Гипотеза H_2 – появление прибора, собранного специалистом средней квалификации.

$P(H_1) = 0,3$ $P(H_2) = 0,7$

$P(A/H_1) = 0,9$ $P(A/H_2) = 0,8$

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,8 = 0,83$$

$$P(H_1/A) = 0,3 \cdot 0,9 \,/\, 0,83 \approx 0,325$$

Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли

Пусть относительно некоторого случайного события A проводится n испытаний, в одних и тех же условиях, в силу чего вероятность наступления события A остается одной и той же в каждом испытании, т.е. испытания независимые.

Обозначим эту вероятность через p.

Какова вероятность того, что при этих n испытаниях событие A произойдет m раз?
(m – любое число, заключенное между нулем и n)

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} =$$

$$= \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Пример. Стрелок стреляет по цели пять раз подряд. Вероятность поражения цели этим стрелком при одном выстреле равна 0,8.

Какова вероятность того, что цель будет поражена четыре раза?

$$P_{4,5} = C_5^4 \cdot (0,8)^4 \cdot (0,2)^1 = 0,4096 \approx 0,41$$

Пример

Каждый день акции корпорации АВС поднимаются в цене или падают в цене на один пункт с вероятностями соответственно 0,75 и 0,25. Найти вероятность того, что акции после шести дней вернутся к своей первоначальной цене. Принять условие, что изменения цены акции вверх и вниз – независимые события.

Случайное событие

качественная характеристика испытания

Случайной величиной называется величина, которая может в зависимости от исходов испытания принимать те или иные случайные значения

Случайная величина

количественная характеристика испытания

Обозначение С.В.: X, Y, Z

Значения С.В.: x, y, z

Вероятность С.В.: $P(x) = P(X = x)$

Случайные величины

Случайная дискретная величина - это

такая величина ,число возможных испытаний которой либо конечно, либо бесконечное множество, но обязательно счетное

Примеры ДСВ

1. Частота попаданий при 3 выстрелах – X

$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3$

2. Игрок бросает монету – при выпадении герба он выигрывает 100 рублей, решки – проигрывает 100 рубль. Случайная величина X–выигрыш игрока будет принимать значения +100 или -100 в зависимости от того, чем закончится эксперимент – гербом или решкой.

Примеры ДСВ

3. Эксперимент – одновременное бросание двух игральных кубиков, случайная величина – сумма выпавших очков, может принимать все целые значения от 2 до 12 в зависимости от выпавшей комбинации.

Случайные величины

Случайной непрерывной величиной

называется такая величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Число всех возможных значений НСВ

бесконечно

Примеры НСВ

1. Случайное отклонение по дальности точки падения снаряда от цели

2. Продолжительность работы электрической лампы

3. Дальность полета снаряда, уровень воды в половодье и т.д.

Числовые характеристики ДСВ

Математическое ожидание Д.С.В.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Свойства математического ожидания Д.С.В.

1) $M(C) = C$

Теорема. $M\left(X\right) \approx \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$

2) $M(C \cdot C) = X \cdot$ (   )

3) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$

независимые

4) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$

Теорема. $M(X)$ *числа появления события* A *в* n *независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.*

$$M(X) = np$$

$$\underbrace{X - M(X)}_{?} \qquad D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$$

Дисперсия С.В.

отклонение значений случайной величины от $M(X)$

$(X - M(X))^2$	$(x_1 - M(X))^2$	$(x_2 - M(X))^2$	$\ldots$	$(x_n - M(X))^2$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

$$D(X) = \left[x_1 - M(X)\right]^2 \cdot p_1 + \left[x_2 - M(X)\right]^2 \cdot p_2 + \ldots$$

$$\ldots + \left[x_n - M(X)\right]^2 \cdot p_n$$

Свойства дисперсии Д.С.В.

1) $D(C) = 0$

2) $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$

3) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

Теорема. *Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в каждом испытании*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

$$D(X) = npq$$

Способы вычисления дисперсии Д.С.В.

1) $$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$$

2) $$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2$$

Законы распределения ДСВ

Способы задания закона распределения

а) таблицей - **рядом распределения**

Возможные значения случайной величины X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	$\dots$
Их вероятности p	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n	$\dots$

1

б) Графическое представление этой таблицы – **многоугольник распределения**

Законы распределения ДСВ

1. *Биномиальный закон распределения*

$$P = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

$$q = 1 - p$$

2. *Закон распределения Пуассона*

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$$

$$\lambda = n \cdot p \leq 10$$

$p \leq 0,1$ $\qquad$ $n \to \infty$

Числовые характеристики НСВ

Математическое ожидание Н.С.В.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Дисперсия Н.С.В.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Модой (M_0) Д.С.В. называется ее наиболее вероятное значение

Модой (M_0) Н.С.В. называется такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум

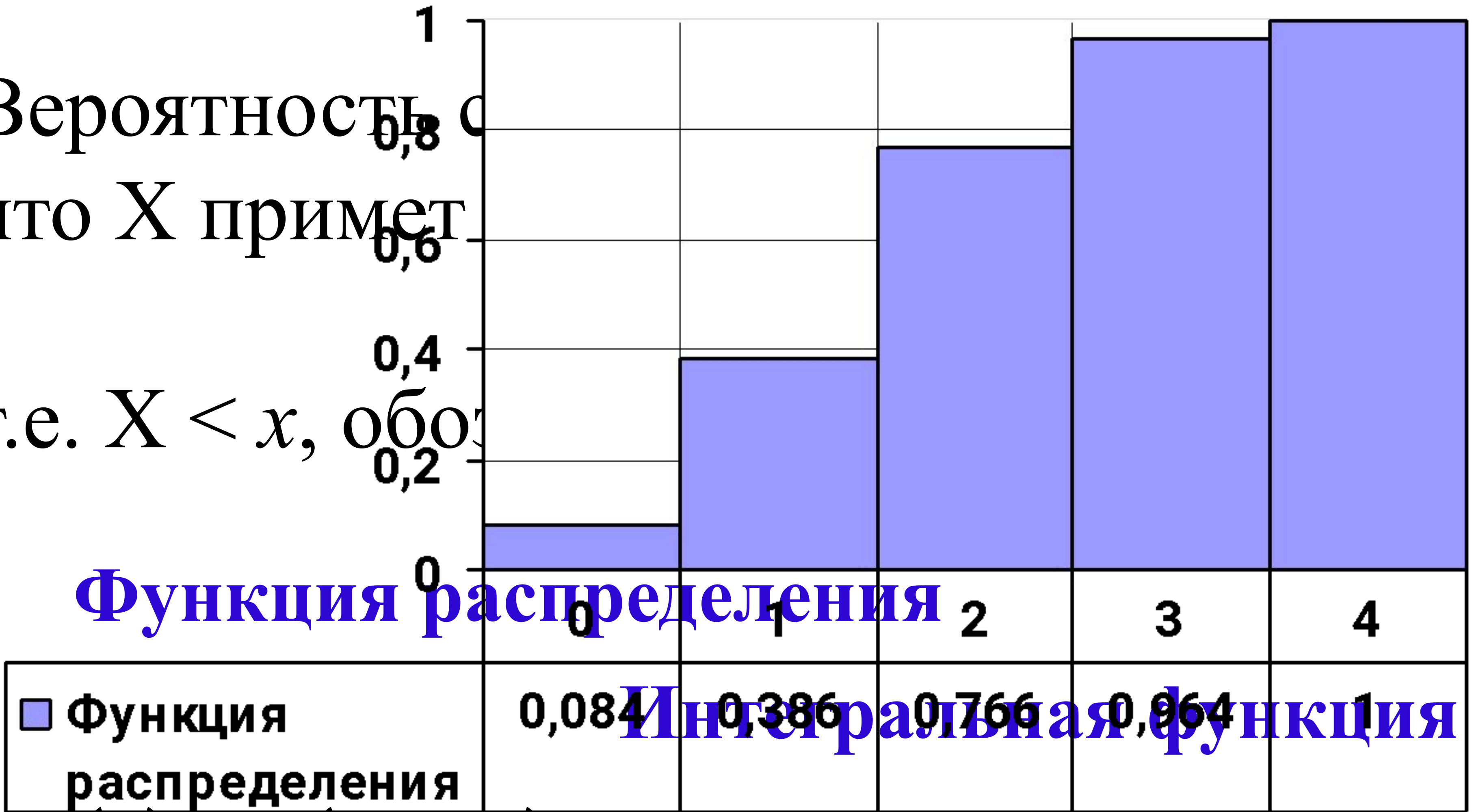
$$f(M_0) = \max$$

Пусть x – действительное число.

Вероятность с

что X примет

т.е. $X < x$, обо



Функция распределения

Интегральная функция

$$F(x) = P(X < x)$$

Свойства плотности распределения

$f(x) = F'(x)$ **-плотность распределения** вероятности Н.С.В. X

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

1. $f(x) \ge 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

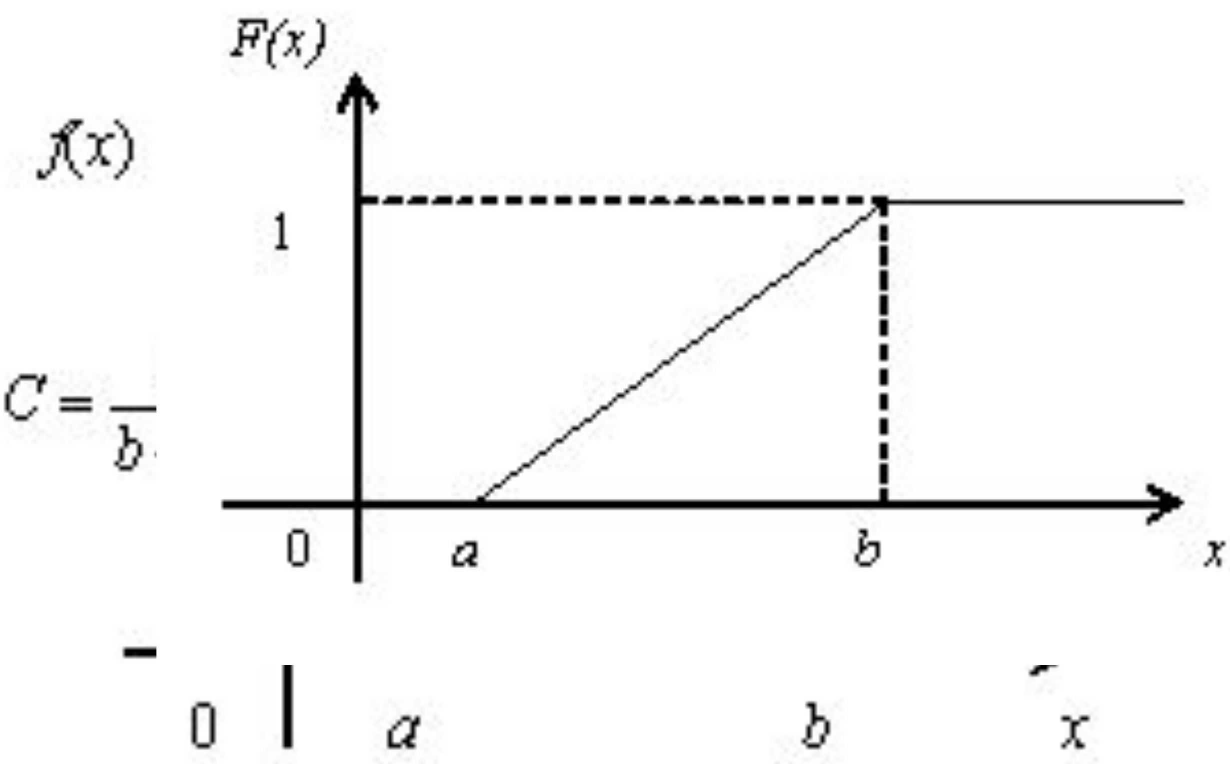
$$f(x) = \begin{cases} a\sin x, & при \quad 0 \le x \le \pi \\ 0, & при \quad x < 0 \quad или \quad x > \pi \end{cases}$$

Законы распределения Н.С.В.

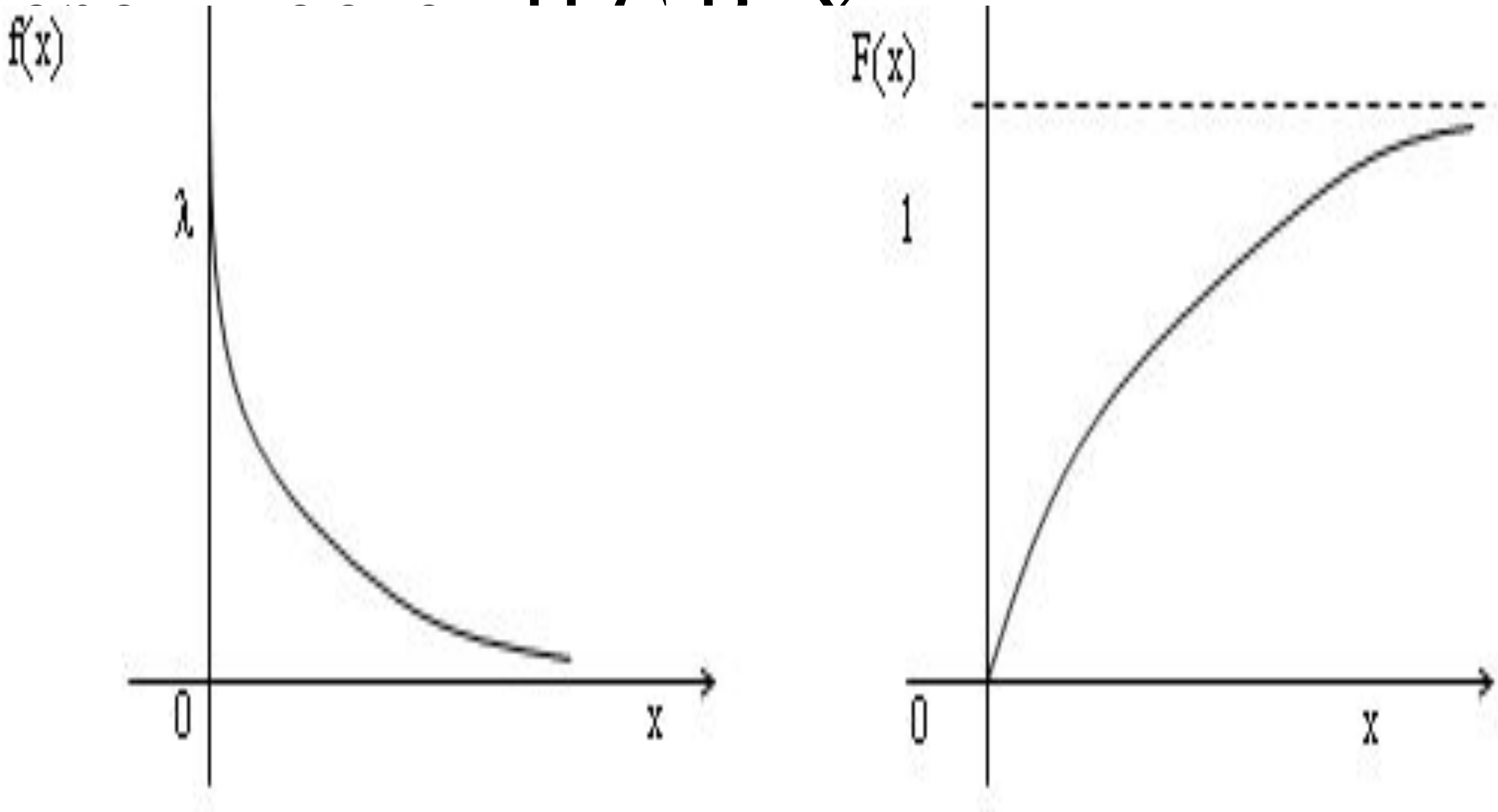
1. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a \le x \le b \\ 1, & при \quad x > b \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C & a \le x \le b \\ & x > b \end{cases}$$



2. Показательное распределение



$1 - e$ *при* $x \geq 0$

3. Нормальный закон распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

Пример. Задана Н.С.В. X своей плотностью распределения $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 2x, & \text{при } -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & \text{при } |x| > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

1. Определить коэффициент А.
2. Найти функцию распределения.
3. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
4. Определить вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$
5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Найдем коэффициент А

$$f(x)=\begin{cases} A\cos 2x, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & \text{при} \quad |x|>\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx =$$

$$= \frac{A\sin 2x}{2} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x \; npu & -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, \quad npu & |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Найдем функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x \quad \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, \quad \text{при} \quad |x| > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & \text{при} \quad -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\\ 0, & \text{при} \quad |x|>\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

1) На участке $x<-\frac{\pi}{4}$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x, \quad при \quad -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\\[2ex] 0, \qquad при \quad |x|>\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

2) На участке $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-\pi/4}0dx+\int_{-\pi/4}^{x}\cos 2xdx=$$

$$=\frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x}=\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x \quad при \quad -\dfrac{\pi}{4}\le x \le \dfrac{\pi}{4}\\ 0, \quad при \quad |x|>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

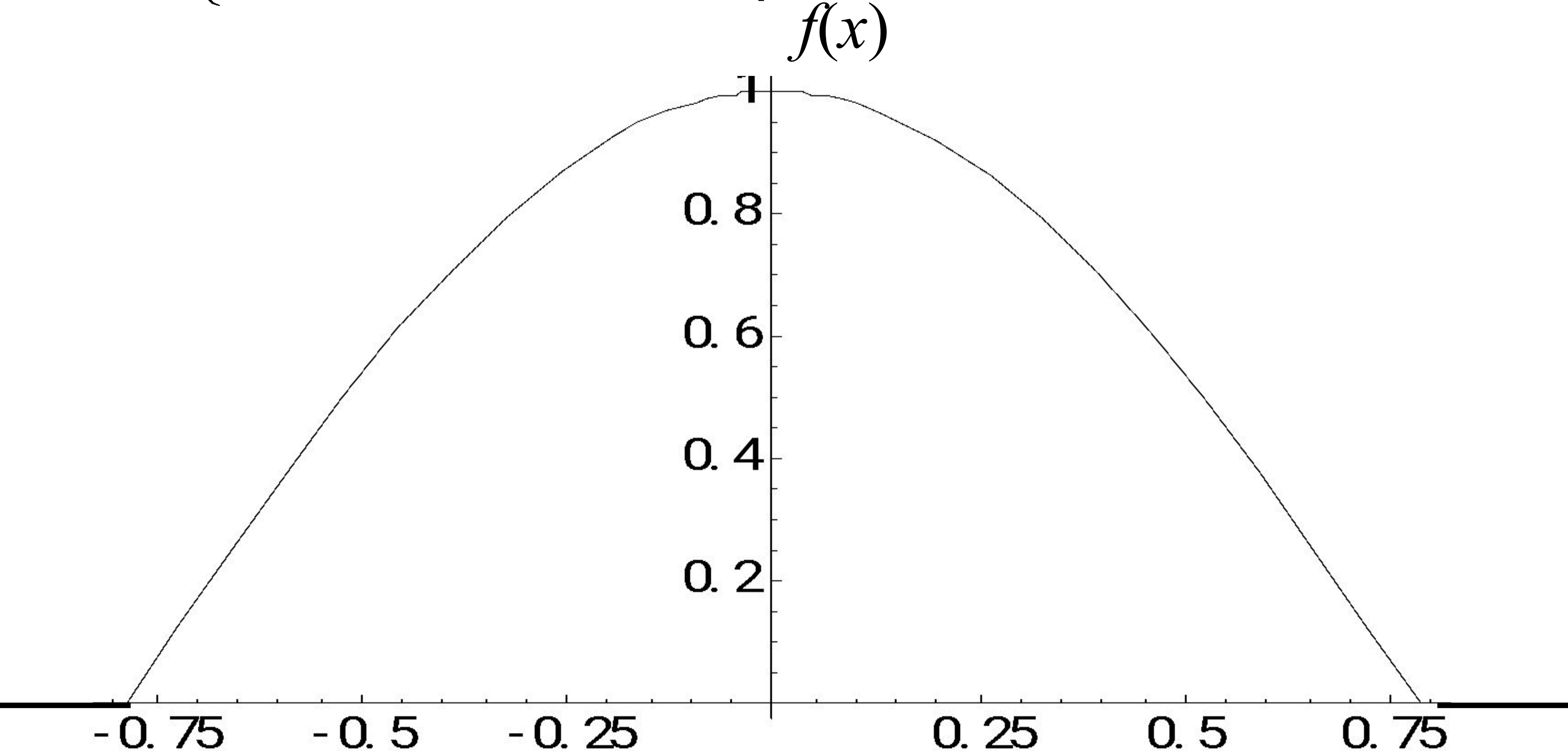
3) На участке $x>\dfrac{\pi}{4}$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-\pi/4}0dx+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2x dx+\int_{\pi/4}^{x}0dx=$$

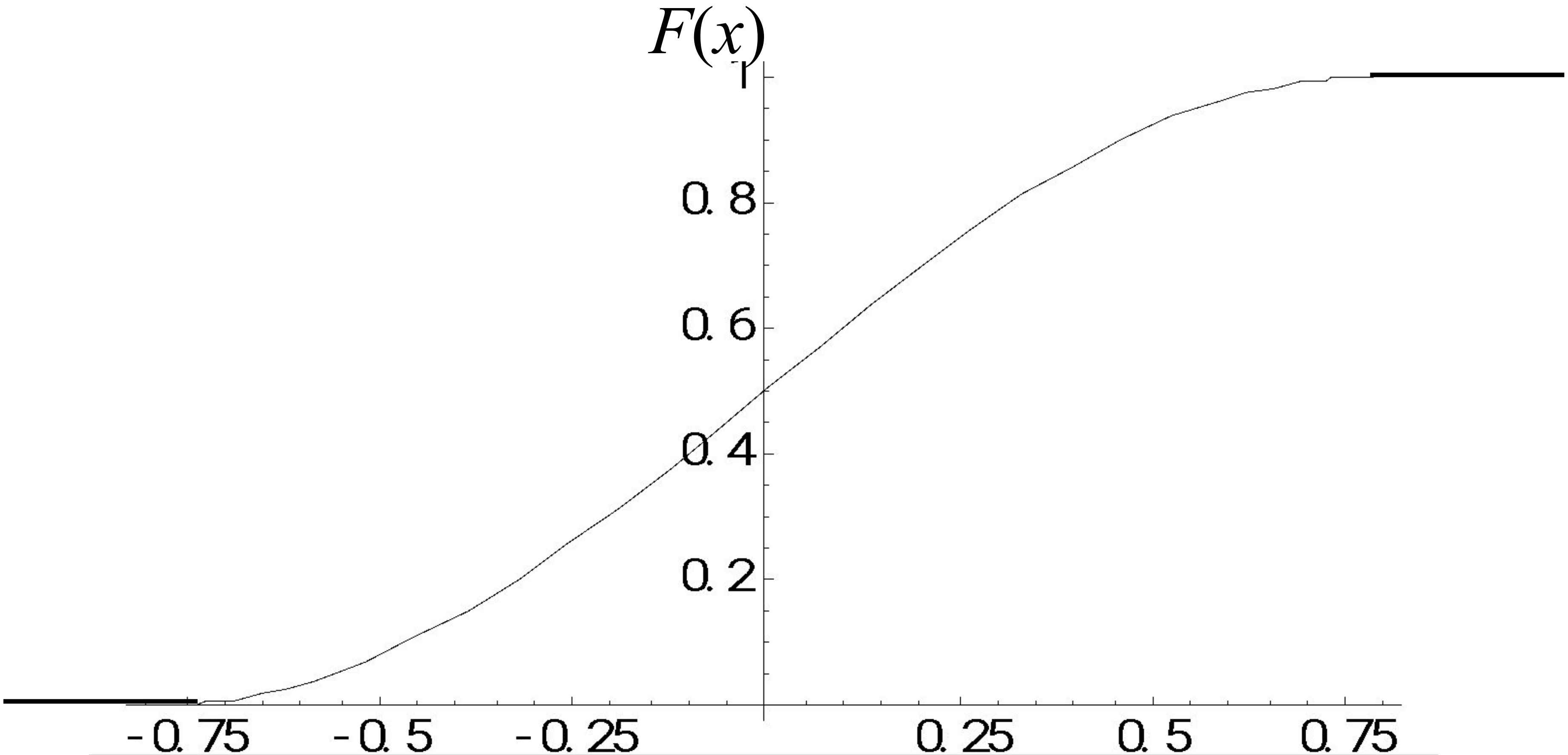
$$=\frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & npu \quad x < -\dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{\sin 2x + 1}{2}, & -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1, & npu \quad x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x & npu \quad -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 0, & npu \quad |x|>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$



$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x<-\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{\sin 2x+1}{2}, & -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int_{\pi/6}^{2} f(x)dx =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{2} 0 dx =$$

$$= \frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,067$$

Определить математическое ожидание,
дисперсию и
среднее квадратическое отклонение
случайной величины X

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx+\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2xdx+\int\limits_{\pi/4}^{\infty} 0dx=$$

$$=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2xdx=\left\{\begin{matrix} u=x; & dv=\cos 2xdx \\ du=dx; & v=\dfrac{\sin 2x}{2} \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{x\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{2}dx=\frac{\cos 2x}{4}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=0$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx+\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\cos 2xdx+\int_{\pi/4}^{\infty} 0dx=$$

$$=\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\cos 2xdx=\left\{\begin{matrix} u=x^2; & dv=\cos 2xdx \\ du=2xdx; & v=\dfrac{\sin 2x}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} \Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} x \sin 2x dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & \sin 2x dx = dv \\ du = dx; & v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{x \cos 2x}{2} \Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\sin 2x}{4} \Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = 0{,}1163$$

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = 0,1163 - 0 = 0,1163$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,1163} \approx 0,341$$