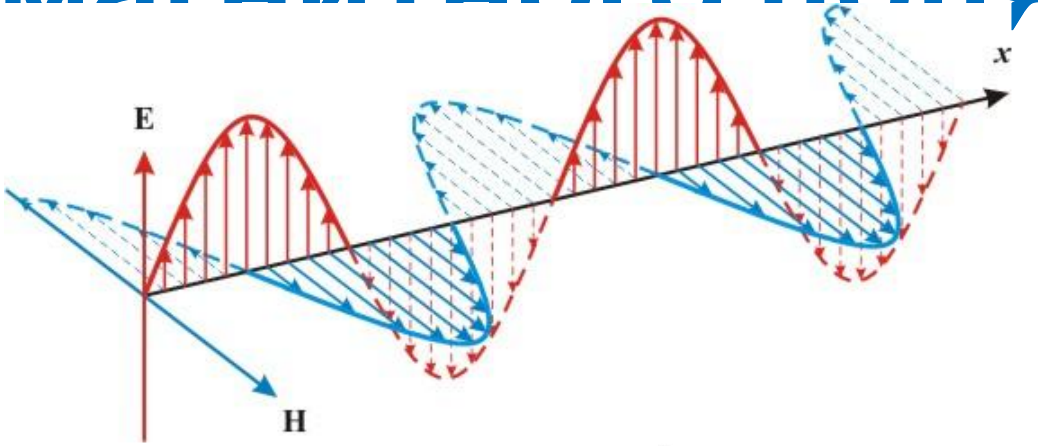
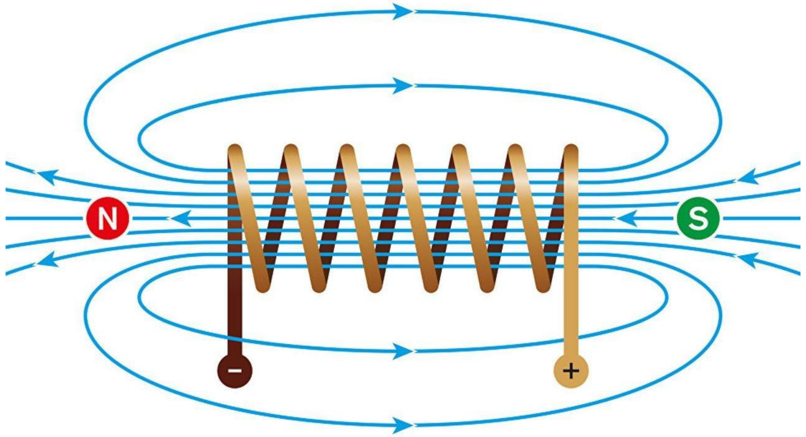
Теоретические основы электротехники

Теория электромагнитного поля





ВШВЭ, проф. Л. И. Сахно
2021

Индуктивность коаксиального кабеля.

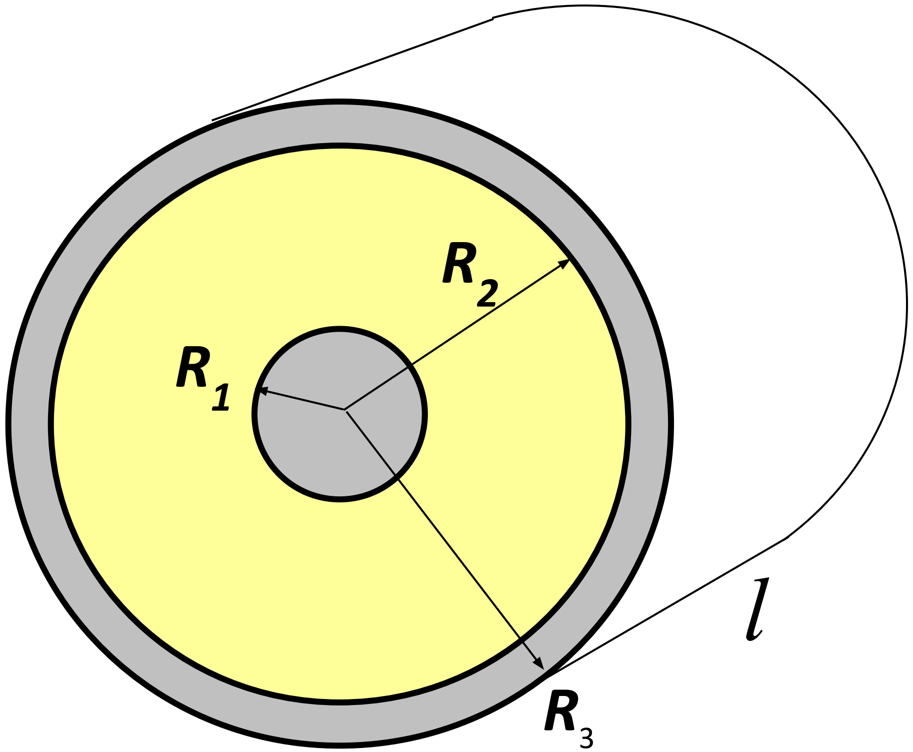
По внутренней жиле коаксиального кабеля радиуса R_1 протекает ток в одном направлении, а по наружной оболочке толщиной $(R_3 - R_2)$ такой же ток в обратном направлении.

Рассмотрим три области коаксиального кабеля

Первая область – внутри прямого проводника с током $(0 \le r \le R_1)$.

Вторая область - в слое изоляции кабеля $(R_1 \le r \le R_2)$

Третья область – внутри проводника (оболочки) с обратным током $(R_2 \le r \le R_3)$



$$d\Phi = B \cdot dS = \mu_0 \cdot H \cdot l \cdot dr.$$

Первая область – внутри прямого проводника с током $(0 \le r \le R_1)$.

$$H_1 = \frac{i'}{2\pi r} \qquad i' = i\frac{r^2}{R_1^2}$$

$$d\Phi_1 = \frac{\mu_0 i \cdot l \cdot r}{2\pi R_1^2} dr \qquad H_1 = \frac{i \cdot r}{2\pi R_1^2}$$

Первая область – внутри прямого проводника с током $(0 \le r \le R_1)$.

Элементарный магнитный поток в первой области проходит внутри проводника, магнитная проницаемость которого обычно равна μ_0, и сцепляется лишь с частью всего тока внутренней жилы, определяемой отношением площади, охваченной линиями индукции соответствующего радиуса к площади сечения всей внутренней жилы. Поэтому потокосцепление внутренней жилы можем записать в виде:

$$\Psi_1 = \int_0^{R_1} d\Psi_1 = \int_0^{R_1} \frac{r^2}{R_1^2} d\Phi_1 = \int_0^{R_1} \frac{r^2}{R_1^2} \frac{\mu_0 i \cdot l \cdot r}{2\pi R_1^2} dr = \frac{\mu_0 i \cdot l}{2\pi R_1^4} \int_0^{R_1} r^3 dr = \frac{\mu_0 i \cdot l}{2\pi R_1^4} \frac{R_1^4}{4} = \frac{\mu_0 i \cdot l}{8\pi}$$

Это соотношение определяет внутреннее потокосцепление провода кругового сечения с постоянным током, равномерно распределенным по его сечению.

Вторая область - в слое изоляции кабеля ($R_1 \leq r \leq R_2$)

В этой области напряженность магнитного поля убывает при удалении от оси кабеля, а элементарный магнитный поток равен элементарному потокосцеплению, так как сцепляется со всем током, проходящим по жиле кабеля, и является внешним по отношению к проводнику с током:

$$H_2 = \frac{i^{//}}{2\pi r} \qquad i^{//} = i \qquad H_2 = \frac{i}{2\pi r} \qquad d\Phi_2 = d\Psi_2 = \frac{\mu_0 i \cdot l}{2\pi r} dr$$

Внешнее потокосцепление коаксиального кабеля, определяемое магнитным потоком в рассматриваемой области равно:

$$\Psi_2 = \int_{R_1}^{R2} d\Psi_2 = \frac{\mu_0 i \cdot l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Третья область – внутри проводника (оболочки) с обратным током $(R_2 \le r \le R_3)$

В этой области напряженность магнитного поля зависит от обратного тока:

$$H_3 = \frac{i^{///}}{2\pi r} \qquad i^{///} = i\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) \qquad H_3 = \frac{i \cdot (R_3^2 - r^2)}{2\pi r(R_3^2 - R_2^2)}$$

$$d\Phi_3 = \frac{\mu_0 i \cdot l(R_3^2 - r^2)dr}{2\pi r(R_3^2 - R_2^2)}$$

Элементарный магнитный поток сцепляется с прямым током $(+i)$ и с частью обратного тока $-i\,\frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$

$$d\Psi_3 = d\Phi_3\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = d\Phi_3 \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

Третья область – внутри проводника (оболочки) с обратным током $(R_2 \le r \le R_3)$

$$\Psi_3 = \int_{R_2}^{R_3} d\Psi_3 = \frac{\mu_0 i \cdot l}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)^2} \int_{R_2}^{R_3} \frac{(R_3^2 - r^2)^2 dr}{r} = \frac{\mu_0 i \cdot l}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)^2} \left[\int_{R_2}^{R_3} \frac{R_3^4 dr}{r} - \int_{R_2}^{R_3} \frac{2R_3^2 r^2 dr}{r} + \int_{R_2}^{R_3} \frac{r^4 dr}{r} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 i \cdot l}{2\pi} \left[\frac{R_3^4}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{2R_3^2(R_3^2 - R_2^2)}{2(R_3^2 - R_2^2)^2} + \frac{R_3^4 - R_2^4}{4 \cdot (R_3^2 - R_2^2)^2} \right].$$

$$\Psi_3 = \frac{\mu_0 i \cdot l}{2\pi} \left[\frac{\ln\frac{R_3}{R_2}}{(1 - \frac{R_2^2}{R_3^2})^2} - \frac{1}{1 - \frac{R_2^2}{R_3^2}} + \frac{R_3^2 + R_2^2}{4 \cdot (R_3^2 - R_2^2)} \right]$$

Индуктивность коаксиального кабеля получим, разделив сумму всех составляющих потокосцепления на величину тока в кабеле:

$$L=\frac{\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3}{i}=\frac{\mu_0\cdot l}{8\pi}+\frac{\mu_0\cdot l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\mu_0\cdot l}{2\pi}\left[\frac{\ln\frac{R_3}{R_2}}{(1-\frac{R_2^2}{R_3^2})^2}-\frac{1}{1-\frac{R_2^2}{R_3^2}}+\frac{R_3^2+R_2^2}{4\cdot(R_3^2-R_2^2)}\right]$$

Первое слагаемое в полученной сумме называется внутренней индуктивностью прямолинейного провода кругового сечения:

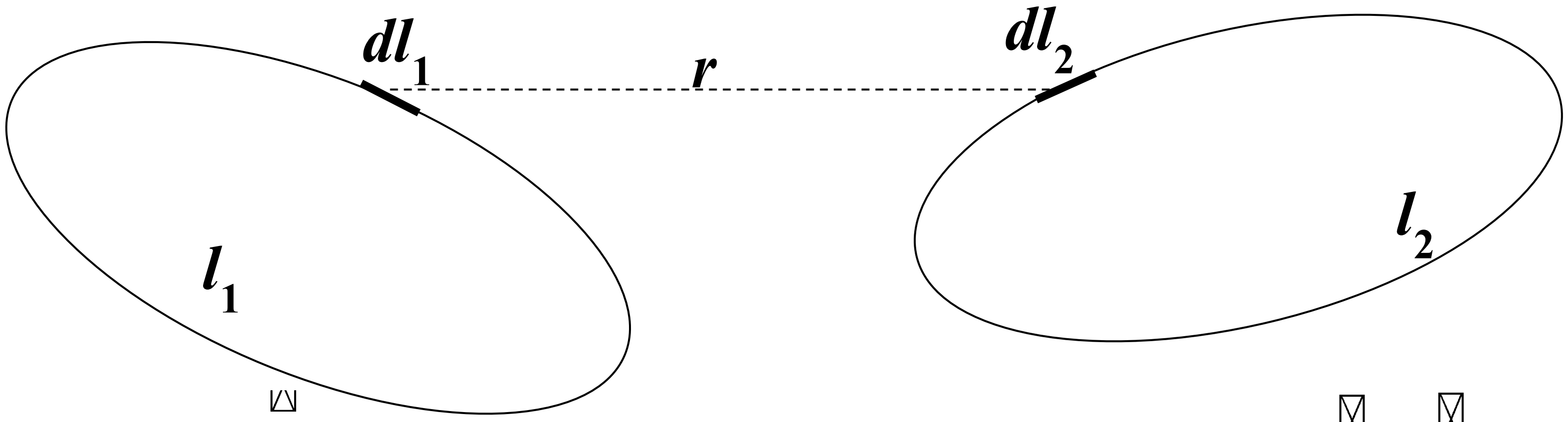
$$L_{\text{внутр}}=\frac{\mu_0\cdot l}{8\pi}$$

Внутренняя индуктивность круглого прямолинейного провода не зависит от его радиуса, а определяется лишь длиной и магнитной проницаемостью материала проводника

Индуктивности тонких проводников с токами

Определение взаимной индуктивности между тонкими контурами.

Контур считается тонким, если поперечные размеры проводника намного меньше его длины



$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0\, i_1}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{d\vec{l}_1}{r}$$

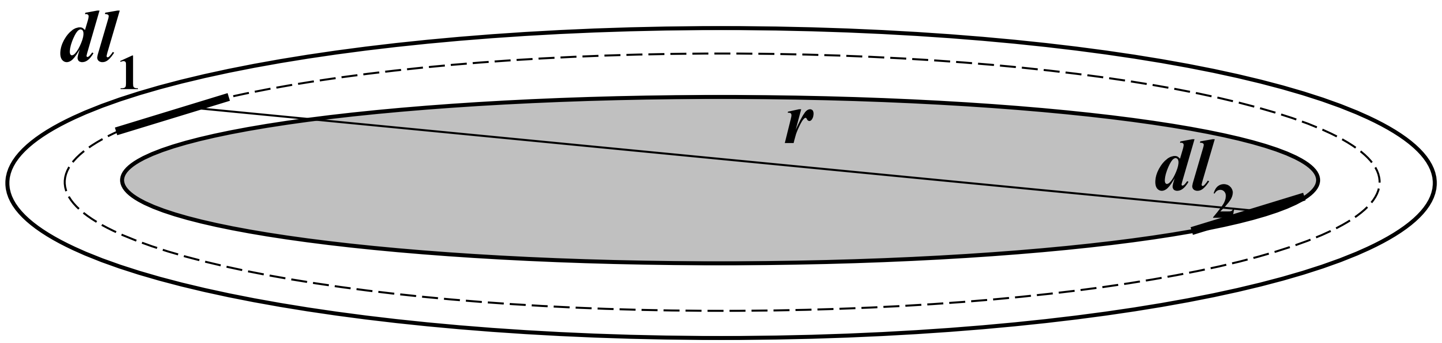
$$\Psi_{21} = \Phi_2 = \oint_{l_2}\vec{A}_2 d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0\, i_1}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}$$

Величина взаимной индуктивности между тонкими контурами определяется следующим соотношением:

$$M_{21} == \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}$$

Определение индуктивности тонкого контура

Разделим потокосцепление контура на внешнее и внутреннее, предполагая, что ток протекает по оси контура



Внешнее потокосцепление равно внешнему потоку и определяется интегралом по контуру l_2:

$$\Psi_{внешн} = \Phi_{внешн} = \oint_{l_2} \vec{A}_2 d\vec{l}_2 \qquad \vec{A}_2 = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1}{r}$$

$$\Psi_{внешн} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}$$

Внутреннее потокосцепление тонкого контура можно принять равным внутреннему потокосцеплению спрямленного проводника такой же длины, выражение для которого мы получили, рассматривая коаксиальный кабель:

$$\Psi_{\text{внутр}} = \frac{\mu \cdot i \cdot l_1}{8\pi}$$

Индуктивность тонкого контура определяется его суммарным потокосцеплением:

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{\Psi_{\text{внешн}}}{i} + \frac{\Psi_{\text{внутр}}}{i} = L_{\text{внешн}} + L_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r} + \frac{\mu \cdot l_1}{8\pi}$$

Предполагается, что магнитная проницаемость проводника может отличаться от μ_0.