Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt, \quad x>0$$

$$\Gamma(x) = \underbrace{\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\,dt}_{\substack{x>0 \text{ сх.} \\ x\le 0 \text{ расх}}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt}_{\text{сх. } \forall x}; \quad t^{x-1}e^{-t} \underset{(t\to 0+0)}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \Rightarrow \begin{matrix} x>0 \text{ сх} \\ x\le 0 \text{ расх.} \end{matrix}$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = (\text{Лопиталь}) = \ldots = 0 \Rightarrow 0 < t^{x+1}e^{-t} < 1 \quad \forall t \ge t_0,$$

т.е. $t^{x-1}e^{-t} < \frac{1}{t^2} \Rightarrow (2>1)$ сх. $\forall x$.

Итак, $\Gamma(x)$ определена $\forall x>0$.

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt,\quad x>0$$

$\Gamma(x)$ непрерывна на $(0,+\infty)$ (?) $\forall x_0>0$ $x_1\in(0,x_0)$, $x_2\in(x_0,+\infty)$

$0\le t^{x-1}e^{-t}\le t^{x_1-1}e^{-t}+t^{x_2-1}e^{-t}$ $\forall t>0$ $\forall x\in[x_1,x_2]$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \overset{x\in[x_1,x_2]}{\rightrightarrows} \Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x)\in C[x_1,x_2] \Rightarrow \Gamma(x)$ непр. при $x=x_0$

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt,\quad x>0$$

$\Gamma(x)$ дифф-ма на $(0,+\infty)$, т.е. $\forall x>0\ \exists\ \Gamma'(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}\,dt$ (?)

$$\int_0^{+\infty}|t^{x-1}\ln t\, e^{-t}|\,dt=\underbrace{\int_0^{1} t^{x-1}\ln\frac{1}{t}\, e^{-t}\,dt}_{x>0 \text{ сх.}}+\underbrace{\int_1^{+\infty} t^{x-1}\ln t\, e^{-t}\,dt}_{x>0 \text{ сх.}}$$

$$t^{x-1}\ln\frac{1}{t}\,e^{-t}\underset{(t\to0+0)}{\sim} t^{x-1}\ln\frac{1}{t}=\frac{\ln\frac{1}{t}}{t^{1-x}}<\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{x/2}}{t^{1-x}}=\frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}\quad \text{сх., т.к. } 1-\frac{x}{2}<1$$

$$\lim_{t\to0+0}\frac{\ln\frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{x}{2}}}\underset{\left(\frac{1}{t}=\tau\right)}{=}\lim_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\tau}{\tau^{x/2}}=\lim_{\tau\to+\infty}\frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{x}{2}\tau^{x/2-1}}=\lim_{\tau\to+\infty}\frac{2}{x\tau^{x/2}}=0$$

$$\lim_{t\to+\infty}t^{x+2}e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x+2}}{e^t}=0\Rightarrow 0\le t^{x-1}\underbrace{\ln t}_{<t}\,e^{-t}<t^{x}e^{-t}<\frac{1}{t^2}\quad \text{сх } (2>1)$$

$\forall x_0>0\quad x_1\in(0,x_0),\ x_2\in(x_0,+\infty)\Rightarrow\forall t>0\ \forall x\in[x_1,x_2]$

$$|t^{x-1}\ln t\,e^{-t}|\le|\ln t|\,e^{-t}\left(t^{x_1-1}+t^{x_2-1}\right)\Rightarrow\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln t\,e^{-t}\,dt\rightrightarrows \text{ по } x\in[x_1,x_2]$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}\,dt\overset{x\in[x_1,x_2]}{\rightrightarrows}\Gamma'(x),\ \text{т.е.}\ \Gamma'(x_0)=\int_0^{+\infty}t^{x_0-1}\ln t\,e^{-t}\,dt.$$

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0$$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln^k t \cdot e^{-t}\, dt, \quad x > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(вывести самостоятельно)

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0$$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln^k t \cdot e^{-t}\, dt, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{matrix}$$

(вывести самостоятельно)

Итак, $\Gamma(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция при $x \in (0, +\infty)$,

$\Gamma(x) > 0$, $\Gamma''(x) > 0$ $\forall x > 0$ $\Rightarrow$ её график в 1-м квадранте,

кривая $y = \Gamma(x)$ - выпуклая вниз.

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \ x>0.$$

$$x>0 \Rightarrow \Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^{x}e^{-t}dt=-\int_0^{+\infty} t^{x}d(e^{-t})=-t^{x}e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}+x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x)$$

$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $x>0$ - формула понижения

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\ x>0.$$

$$x>0 \Rightarrow \Gamma(x+1)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x}e^{-t}dt=-\int\limits_0^{+\infty} t^{x}d(e^{-t})=-t^{x}e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}+x\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x)$$

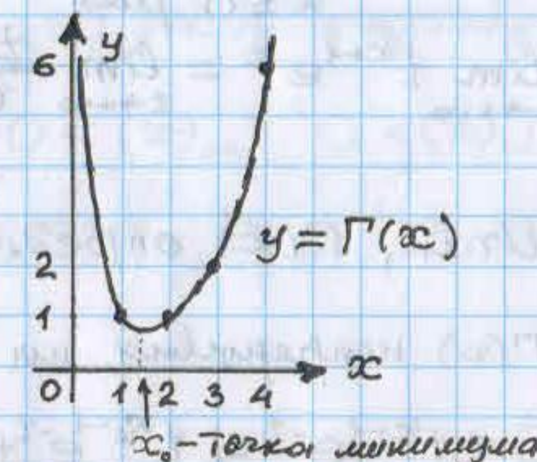
$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ x>0$ – формула понижения

$\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=1,\ \Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1\cdot\Gamma(1)=1,$

$\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2\cdot\Gamma(2)=2, \ldots, \Gamma(n+1)=n!$ – д-ть самост. по индукции

$\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+0}\Gamma(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}=+\infty,$

т. е. $x=0$ – вертик. асимптота при $x\to 0+0$.



Накл. асимптот нет, ибо $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\Gamma(x)}{x}=+\infty$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Gamma(n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!}{n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty;\ \beta_n=\dfrac{1}{\alpha_n}=\dfrac{n}{(n-1)!},\ \dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n}=\dfrac{(n+1)(n-1)!}{n!\cdot n}=\dfrac{n+1}{n^2}\to 0<1$, т. е.

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n$ сх. (Даламбер) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$, т. е. $\alpha_n\to+\infty$.

Точка минимума: $x_0=1.4616\ldots,\ \Gamma(x_0)=0.8856\ldots$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$$ – формула понижения

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1$$ – формула дополнения (б/д)

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\ x>0.$$

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ x>0$$ – формула понижения

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},\ 0<x<1$$ – формула дополнения (б/д)

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\ \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ldots,\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

д-ть самост. методом матем. индукции

$$\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=2\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-z^2}\cdot z}{z}dz=2\int\limits_0^{+\infty}e^{-z^2}dz$$ – интеграл Пуассона

$$t=z^2,\ dt=2z\,dz$$

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\ x>0.$$

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ x>0$$ – формула понижения

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},\ 0<x<1$$ – формула дополнения

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}$$ или $$\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin\pi x\cdot\Gamma(1-x)}$$

можно продолжить на $x<0$, кроме отрицательных целых чисел.

x можно считать комплексным.