

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt; \quad t^{x-1} e^{-t} \underset{(t \rightarrow 0+0)}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \Rightarrow \begin{array}{l} x > 0 \text{ с.к.} \\ x \leq 0 \text{ раск.} \end{array}$$

с.к. $\forall x$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = (\text{Лопиталь}) = \dots = 0 \Rightarrow 0 < t^{x+1} e^{-t} < 1 \quad \forall t \geq t_0,$$

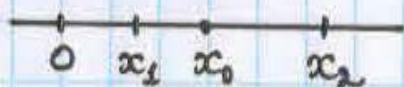
$$\text{т.е. } t^{x-1} e^{-t} < \frac{1}{t^2} \Rightarrow (2 > 1) \text{ с.к. } \forall x.$$

Итак, $\Gamma(x)$ определена $\forall x > 0$.

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

$\Gamma(x)$ непрерывна на $(0, +\infty)$ (?) $\forall x_0 > 0 \quad x_1 \in (0, x_0), \quad x_2 \in (x_0, +\infty)$

$$0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x_1-1} e^{-t} + t^{x_2-1} e^{-t} \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{x \in [x_1, x_2]}{\Rightarrow} \Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x) \in C[x_1, x_2] \Rightarrow \Gamma(x) \text{ непрерывна при } x = x_0$$

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

$\Gamma(x)$ дифф-ма на $(0, +\infty)$, т.е. $\forall x > 0 \exists \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} dt$ (?)

$$\int_0^{+\infty} |t^{x-1} \ln t e^{-t}| dt = \int_0^1 t^{x-1} \ln \frac{1}{t} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} \ln t e^{-t} dt$$

$$t^{x-1} \ln \frac{1}{t} e^{-t} \underset{(t \rightarrow 0+0)}{\sim} t^{x-1} \ln \frac{1}{t} = \frac{\ln \frac{1}{t}}{t^{1-x}} < \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{x/2}}{t^{1-x}} = \frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}} \quad \text{с.к., т.к. } 1 - \frac{x}{2} < 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\ln \frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{x}{2}}} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \tau}{\tau^{x/2}} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{x}{2} \tau^{x/2-1}} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{2}{x \tau^{x/2}} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+2} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x+2}}{e^t} = 0 \Rightarrow 0 \leq t^{x-1} \underbrace{\ln t}_{< t} e^{-t} < t^x e^{-t} < \frac{1}{t^2} \quad \text{с.к. } (2 > 1)$$

$\forall x_0 > 0 \quad x_1 \in (0, x_0), \quad x_2 \in (x_0, +\infty) \Rightarrow \forall t > 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$

$$|t^{x-1} \ln t e^{-t}| \leq |\ln t| e^{-t} (t^{x_1-1} + t^{x_2-1}) \Rightarrow \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t e^{-t} dt \Rightarrow \text{но } x \in [x_1, x_2]$$
$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t e^{-t} dt \xrightarrow{x \in [x_1, x_2]} \Gamma'(x), \text{ т.е. } \Gamma'(x_0) = \int_0^{+\infty} t^{x_0-1} \ln t e^{-t} dt.$$

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln^k t \cdot e^{-t} dt, \quad x > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(вывести самостоятельно)

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln^k t \cdot e^{-t} dt, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

(вывести самостоятельно)

Итак, $\Gamma(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция при $x \in (0, +\infty)$

$\Gamma(x) > 0$, $\Gamma''(x) > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow$ её график в 1-м квадранте,

кривая $y = \Gamma(x)$ — вогнутая вниз.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

$$x > 0 \Rightarrow \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} t^x d(e^{-t}) = -t^x e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$$

$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad x > 0$ - формула понижения

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

$$x > 0 \Rightarrow \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} t^x d(e^{-t}) = -t^x e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$$

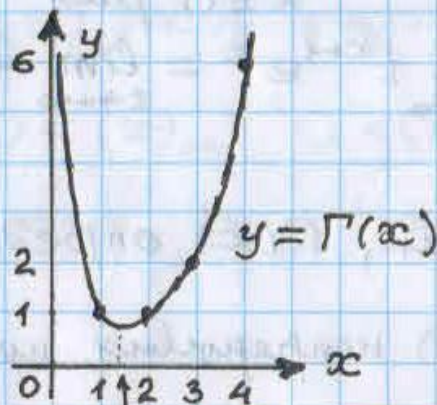
$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad x > 0$ - формула понижения

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1, \quad \Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2, \dots, \Gamma(n+1) = n! \quad \text{- это следует по индукции}$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+0} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = +\infty,$$

т.е. $x=0$ - вертикал. асимптота при $x \rightarrow 0+0$.



Накл. асимптот нет, ибо $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty; \quad \beta_n = \frac{1}{\alpha_n} = \frac{n}{(n-1)!}, \quad \beta_{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)!}{n! \cdot n} = \frac{n+1}{n^2} \rightarrow 0 < 1, \text{ т.е.}$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ с.х. (Даламбер) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, т.е. $\alpha_n \rightarrow +\infty$.

Точка минимума: $x_0 = 1.4616\dots$, $\Gamma(x_0) = 0.8856\dots$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0 \quad - \text{формула понижения}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1 \quad - \text{формула дополнения (8/2)}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0 \text{ - формула понижения}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1 \text{ - формула дополнения (Б/а)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \dots, \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$$

Эти соотнош. можно иметь индукцией

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z^2}}{z} \cdot z dz = 2 \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz \text{ - интеграл Пуассона}$$

$t = z^2, dt = 2z dz$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad x > 0 \quad - \text{формула понижения}$$

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1 \quad - \text{формула дополнения}$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad \text{или} \quad \Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x \cdot \Gamma(1-x)}$$

можно продолжить на $x < 0$, кроме

отрицательных целых чисел.

x можно считать комплексным.