Готовимся к ЕГЭ-2015 по математике. реальный КИМ ЕГЭ- 2014 (1 часть) основная волна (запад)

Учитель математики МБОУ СОШ № 143
г. Красноярска
Князькина Т. В.

В летнем лагере 310 детей и 28 воспитателей. В автобус помещается не более 40 пассажиров. Какое наименьшее число автобусов требуется заказать, чтобы перевести всех детей и воспитателей из лагеря в город?

РЕШЕНИЕ

Пусть:

a - число детей;

b - количество воспитателей;

c - вместимость автобуса.

Интересует величина N -

целая часть с избытком числа

$$n = \frac{a+b}{c}$$

В данном случае:

$$a := 310 : b := 28 : c := 40 :$$

$$n = \frac{a+b}{c} = n = \frac{169}{20} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} n = 8.4500$$

$$N = \left\lceil \frac{a+b}{c} \right\rceil = N = 9$$

$$N = \operatorname{ceil}\left(\frac{a+b}{c} \right) = N = 9$$

ОТВЕТ

9

В старинной книге полезных советов «Домострой» имеется рецепт десерта Шарлотка. Для приготовления Шарлотки следует взять 12 фунтов яблок. Сколько килограммов яблок надо взять хозяйке для приготовления Шарлотки? Считайте, что 1 фунт равен 400 грамм.

РЕШЕНИЕ

Пусть:

a - необходимая масса яблок в фунтах;

b - эквивалент 1 фунта в граммах (1 г = 0.001 кг).

Искомая масса яблок c в килограммах:

$$c = \frac{a \cdot b}{1000}$$

В данном случае:

$$a := 12 : b := 400 :$$

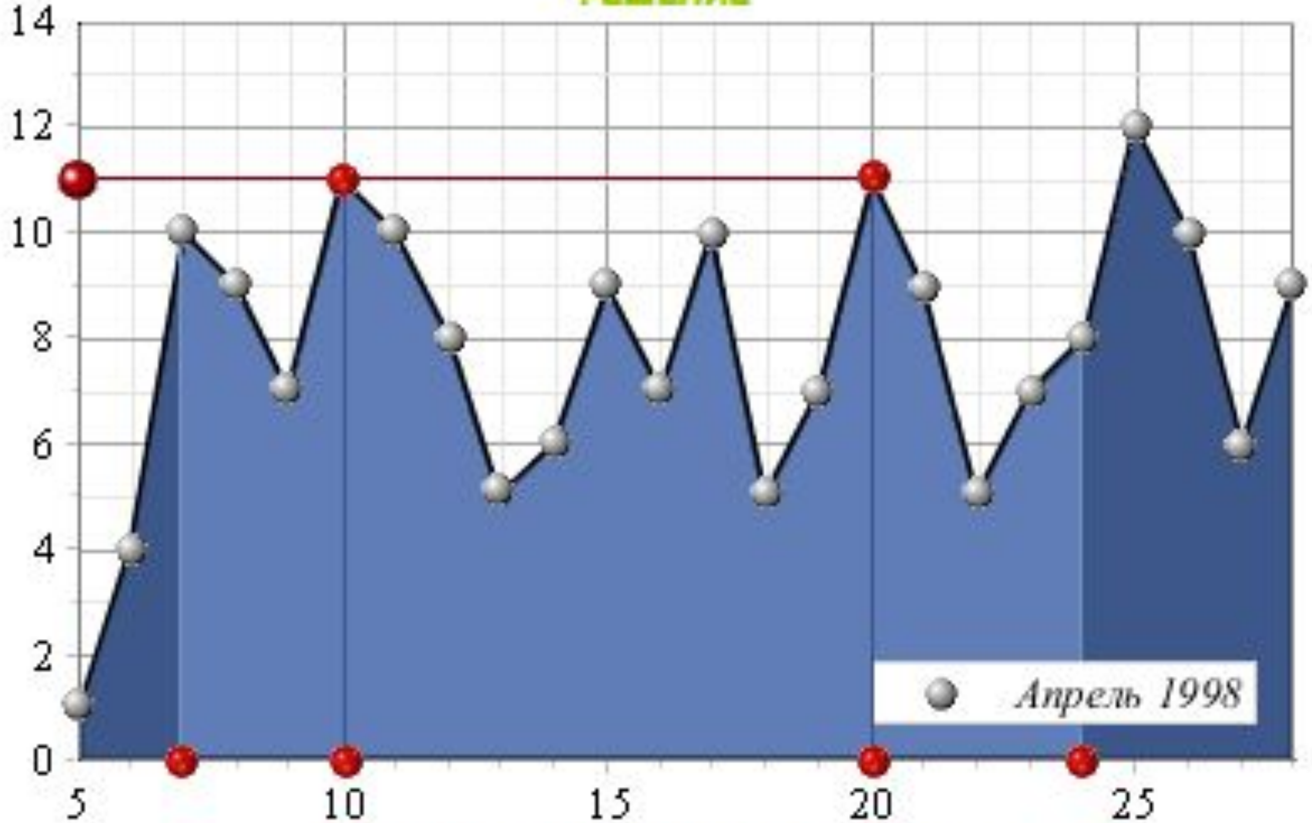
$$c = \frac{a \cdot b}{1000} = c = \frac{24}{5} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} c = 4.8000$$

ОТВЕТ

4.8

B3 На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Сочи каждый день с 5 по 28 апреля 1998 года.
На оси абсцисс отмечены дни, на оси ординат - температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией.
Определите по рисунку наибольшую среднесуточную температуру воздуха в Сочи в период с 7 по 24 апреля.

РЕШЕНИЕ



Непосредственно из диаграммы следует:

ИСКОМОЕ $= t_{10} = t_{20} = 11$

ОТВЕТ

11

B4 Для группы иностранных гостей требуется купить 30 путеводителей. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Цена путеводителя и условия доставки всей покупки приведены в таблице. Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

РЕШЕНИЕ

Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	255	350	Нет
Б	270	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 8000 р.
В	245	450	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 7500 р.

Пусть:

N - количество путеводителей;

A, B, C - цена одного путеводителя в каждом из магазинов (руб.);

a, b, c - соответствующие стоимости доставки (руб.);

m, n, p - акционные суммы (руб.).

Трижды вычислим возможные затраты: X, Y, Z, - и результаты сравним.

В данном случае:

$restart : N := 30 : A := 255 : B := 270 : C := 245 : a := 350 : b := 300 : c := 450 : m := 0 : n := 8000 : p := 7500 :$

$$X = N \cdot A + a = X = 8000$$

$$Y = N \cdot B = Y = 8100$$

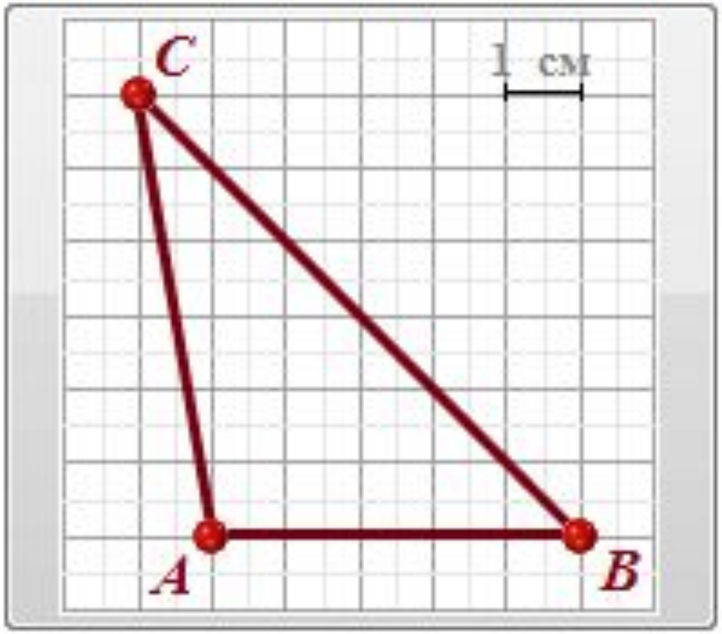
$$Z = N \cdot C + c = Z = 7800$$

(Учли, что бесплатная доставка будет только в магазине *Б*).

ОТВЕТ

7800

B5 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB (в сантиметрах).



РЕШЕНИЕ

РИСУНОК

Пусть $AB = c$ - длина основания треугольника.

Длина средней линии MN:

$$m = \frac{c}{2}$$

В данном случае:

$restart : c := 5 :$

$$m = \frac{c}{2} = m = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} m = 2.5000$$

ОТВЕТ

2.5

В6 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 49 шахматистов среди которых 7 участников из России, в том числе Иван Котов. Найдите вероятность того, что в первом туре Иван Котов будет играть с каким-либо шахматистом из России.

РЕШЕНИЕ

Задача на классическое определение вероятности.
Пусть $n = 49$ - общее количество шахматистов, $m = 7$ - число соотечественников.
Интересует событие «спортсмен будет играть с каким-либо шахматистом-соотечественником».
Ему благоприятствуют из всех возможных $n-1$ исходов только $m-1$.
Искомая вероятность : $p = (m-1)/(n-1)$.

$restart;\ n := 49 : m := 7 :$

$$p = \frac{m-1}{n-1} = p = \frac{1}{8} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} p = 0.12500$$

ОТВЕТ

0.125

B7 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} = 5^{x+5}$.

РЕШЕНИЕ

Перейдём от показательного уравнения к линейному, не забывая о равносильности:

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} = 5^{x+5} \Leftrightarrow \left(5^{-2}\right)^{x+2} = 5^{x+5} \Leftrightarrow$$

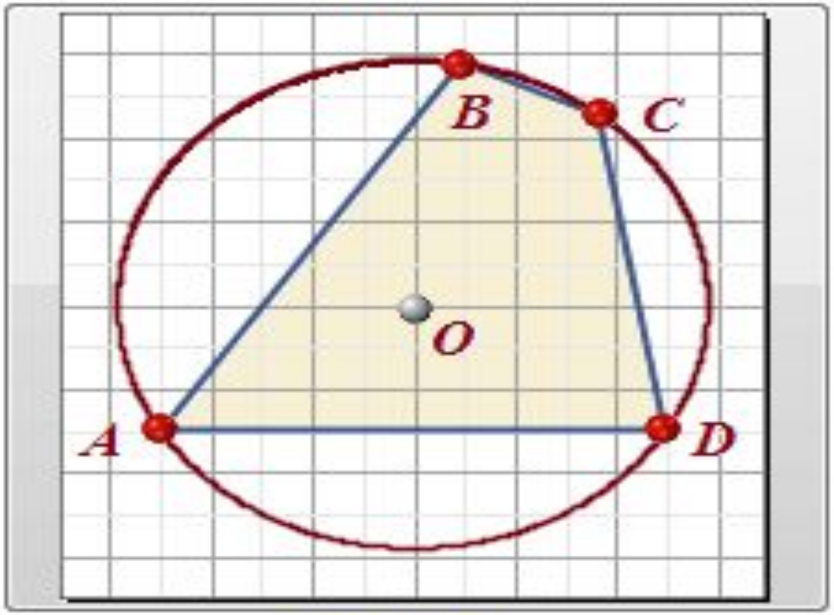
$$5^{-2x-4} = 5^{x+5} \Leftrightarrow -2x-4 = x+5 \Leftrightarrow$$

$$3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$$

ОТВЕТ

-3

B8 Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 65° и 41°. Найдите больший из оставшихся углов этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



РЕШЕНИЕ

РИСУНОК

Пусть $\angle BAD = \alpha,\ \angle ADC = \beta,\ \angle BCD = x,\ \angle ABC = y.$

По свойству вписанных углов:

$$\angle BAD + \angle BCD = 180°,\ \angle ADC + \angle ABC = 180° \Leftrightarrow$$

$$\alpha + x = 180°,\ \beta + y = 180° \Leftrightarrow$$

$$x = 180° - \alpha, y = 180° - \beta.$$

Искомая величина:

$$\varphi = \max\{180° - \alpha, 180° - \beta\}$$

В данном случае:

$$restart : \alpha := 41 : \beta := 65 :$$

$$\varphi = \max(180 - \alpha, 180 - \beta) = \varphi = 139$$

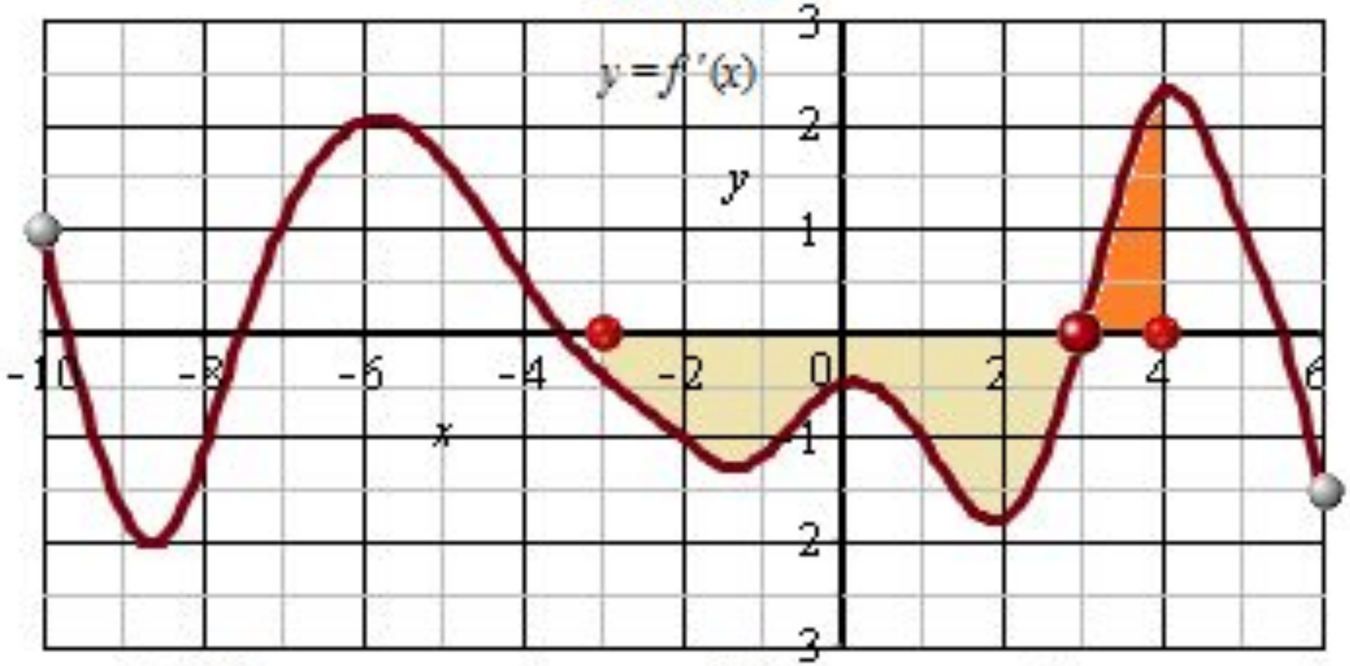
ОТВЕТ

139

B9 На рисунке изображен график $y = f'(x)$ - производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;6)$.
В какой точке отрезка $[-3;4]$ функция
$y = f(x)$ принимает наименьшее значение?

РЕШЕНИЕ

РИСУНОК

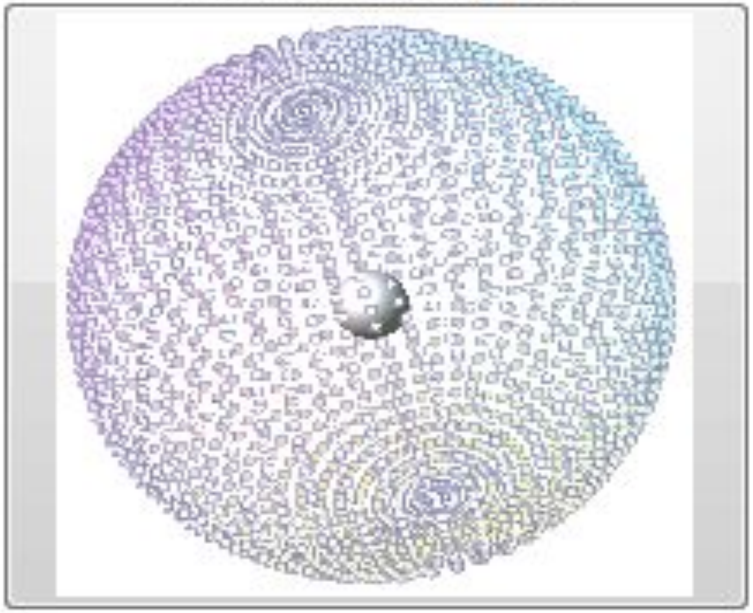


На отрезке $[-3;4]$ производная функции $f'(x)$ в точке $x = 3$ меняет свой знак с «−» на «+» (при переходе слева направо).
Поэтому $x = 3$ - точка минимума и, заодно, - точка наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке.

ОТВЕТ

3

B10 Даны два шара. Диаметр первого шара в 8 раз больше диаметра второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



РЕШЕНИЕ

РИСУНОК

Пусть D и d - диаметры сфер, $D/d = k$.

Соответствующие площади поверхностей:

$$S = \pi D^2, s = \pi d^2$$

Искомое отношение:

$$n = \frac{S}{s} = \frac{\pi D^2}{\pi d^2} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 = k^2$$

В данном случае:

$restart : k := 8 :$

$n = k^2 = n = 64$

ОТВЕТ

64

B11 Найдите значение выражения

$$\sqrt{72}-\sqrt{288}\sin^2\frac{21\pi}{8}$$

РЕШЕНИЕ

Упростим иррациональность и применим тригонометрическую формулу понижения степени:

$$Z=\sqrt{72}-\sqrt{288}\sin^2\frac{21\pi}{8}$$

$$Z=\sqrt{2\cdot 6^2}-\sqrt{2\cdot 12^2}\cdot\frac{1-\cos\frac{21\pi}{4}}{2}$$

$$Z=6\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{2}\cdot\left(1-\cos\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Воспользуемся периодичностью косинуса:

$$Z=6\cdot\sqrt{2}\cdot\left(1-\left(1-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$$

Воспользуемся формулой приведения:

$$Z=6\cdot\sqrt{2}\cdot\left(1-1-\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z=-6\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$

$$Z=-6\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-6$$

$$\sqrt{72}-\sqrt{288}\sin\left(\frac{21\pi}{8}\right)^2=6\sqrt{2}-12\sqrt{2}\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)^2\overset{\text{simplify trig}}{=}-6$$

ОТВЕТ

-6

B12 Гоночный автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a $км/ч^2$. Скорость v в конце пути вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$, где l - пройденный автомобилем путь. Определите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль чтобы, проехав 250 метров, приобрести скорость 60 $км/ч$. Ответ выразите в $км/ч^2$.

РЕШЕНИЕ

Выразим ускорение из преложенной формулы скорости:

$$v=\sqrt{2la} \xrightarrow{\text{solve for a}} a=\frac{1}{2}\frac{v^2}{l}$$

Не забудем метры перевести в километры.

В данном случае:

$$restart : l := \frac{250}{1000} : v := 60 :$$

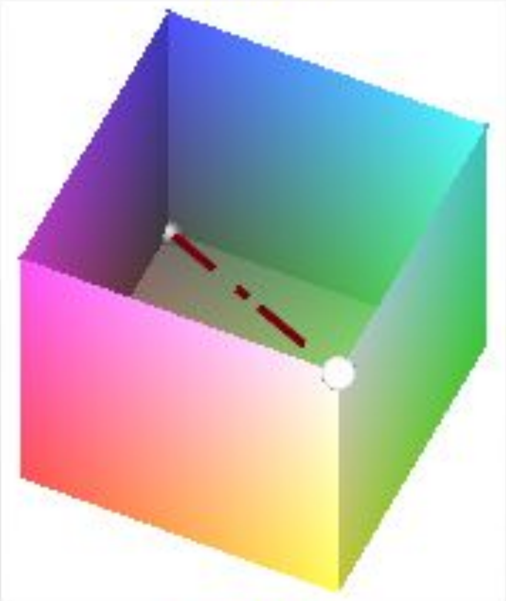
$$a=\frac{1}{2}\frac{v^2}{l}=a=7200$$

ОТВЕТ

7200

В13 Диагональ куба равна $\sqrt{48}$. Найдите объем куба.

РЕШЕНИЕ



РИСУНОК

Пусть а - длина ребра куба.

Длина его диагонали:

$$d = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Объём куба:

$$v = a^3 = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$$

В данном случае:

$$restart : d := \sqrt{48} :$$

$$v = \frac{d^3}{3\sqrt{3}} = v = 64$$

ОТВЕТ

64

B14 Имеется два раствора. Первый содержит 10% соли, второй - 30% соли. Из этих двух растворов получили третий раствор массой 200 кг, содержащий 25% соли. На сколько килограммов масса первого раствора меньше массы второго?

РЕШЕНИЕ

Пусть:

m - процентная концентрация 1-го раствора, n - 2-го, p - 3-го;

u - масса 1-го раствора, v - 2-го, w - 3-го;

$x = v - u$ - искомое.

На основании определения процентной концентрации раствора, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{u\cdot\dfrac{m}{100} + v\cdot\dfrac{n}{100}}{w} = \dfrac{p}{100} \\ u + v = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\cdot m + v\cdot n = w\cdot p \\ v = w - u \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u = w\cdot\dfrac{p-n}{m-n} \\ v = w\cdot\dfrac{m-p}{m-n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = w\cdot\frac{m-p}{m-n} - w\cdot\frac{p-n}{m-n}$$

$$x = \frac{w\cdot(m+n-2p)}{m-n}$$

В данном случае:

$restart : m := 10 : n := 30 : p := 25 : w := 200 :$

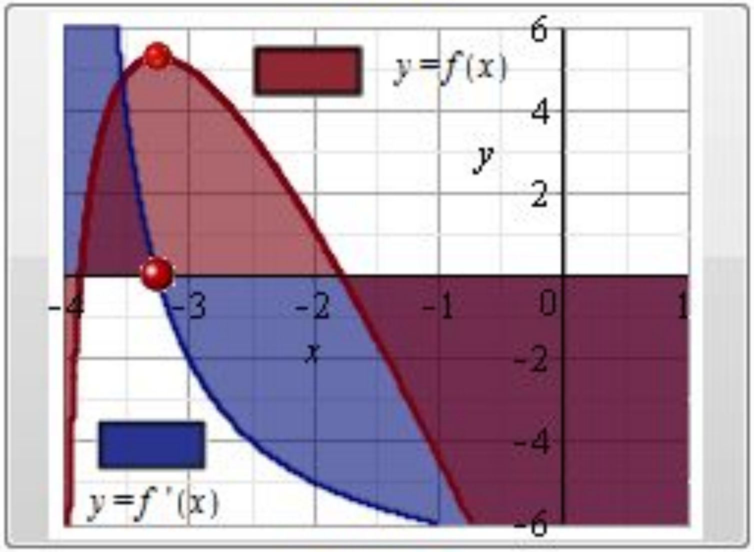
$$x = \frac{w\cdot(m+n-2p)}{m-n} = x = 100$$

ОТВЕТ

100

B15 Найдите точку максимума функции $y=2\ln(x+4)^3-8x-19$.

РЕШЕНИЕ



РИСУНОК

Функция

$$y=2\ln(x+4)^3-8x-19=6\ln(x+4)-8x-19$$

определена, непрерывна и дифференцируема для всех $x\in(-4;\infty)$.

Её производная:

$$y'=6\cdot\frac{1}{x+4}-8=2\cdot\frac{3-4x-16}{x+4}=-8\cdot\frac{x+\frac{13}{4}}{x+4}$$

Точка $x=-\frac{13}{4}$ - критическая. Поскольку при переходе через неё слева направо производная меняет знак с «+» на «−» , то это искомая точка **максимума**.

restart : *maximize*$(2*\ln((x+4)\hat{}3)-8*x-19, x=-4..1,$ *location*$)$

$$7+6\ln\left(\frac{3}{4}\right), \left\{\left[\left\{x=-\frac{13}{4}\right\}, 7+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}$$

ОТВЕТ

-3.25