6.7. ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА

Теорема 1.

Если числовая последовательность

$$\{a_n\}$$

монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Возможны два случая:

1 **Последовательность не убывает и ограничена сверху:**

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le M$$

2 **Последовательность не возрастает и ограничена снизу:**

$$m \ge a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$$

Теорема 2.

Если в некоторой окрестности точки x_0 (или при достаточно больших значениях x) функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел, равный A, то функция $f(x)$ имеет тот же предел A.

Доказательство:

Пусть при $x \to x_0$
существуют пределы

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \qquad \lim_{x \to x_0} \psi(x) = A$$

Следовательно, для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$**, найдется такое положительное число** δ**, что при всех** x**, таких что** $|x-x_0|<\delta$**, одновременно выполняются неравенства:**

$$|\varphi(x) - A| < \varepsilon \qquad |\psi(x) - A| < \varepsilon$$

или $A-\varepsilon<\varphi(x)<A+\varepsilon, \quad A-\varepsilon<\psi(x)<A+\varepsilon$

Т.к. по условию функция *f(x)* заключена между функциями *φ(x) и ψ(x)*, то

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

Т.е.

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

А это и означает по определению предела функции в точке, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$