MÜHAZİRƏ 1

KOMPLEKS ƏDƏDLƏR VƏ ONLAR ÜZƏRINDƏ ƏMƏLLƏR

Fərz edək ki, x və y ixtiyari həqiqi ədədlərdir. Bu ədədlər vasitəsilə təyin olunan

$$z = x + iy \qquad (1)$$

şəklində ifadəyə kompleks ədəd deuilir; burada i xəyali vahid adlanan riyazi işarədir. i xəyali vahidi $i^2 = -1$ bərabərliyi ilə təyin olunur.

x və y həqiqi ədədlərinə z kompleks ədədinin uyğun olaraq həqiqi və xəyali hissəsi deyilir və simvolik olaraq $x = \operatorname{Re} z$ və $y = \operatorname{Im} z$ ilə işarə olunur.

$x - iy$ kompleks ədədi $z = x + iy$ kompleks ədədinə **qoşma olan kompleks ədəd** adlanır və $\boldsymbol{\bar{z} = x - iy}$ kimi işarə olunur.

Qeyd edək ki, $i^2 = -1$ olmasından çıxır ki, i-nin istənilən tam üstlü qüvvəti, -1,1,i,-i ədədlərindən birini verir:

$i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, i^5 = i^4 \cdot i = i$ və s.

Kompleks ədədlər üzərində əməllər

Həqiqi və xəyali hissələri uyğun olaraq bərabər olan $z_1 = x_1 + iy_1$ və $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks ədədlərini bərabər hesab edirlər:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \tag{2}$$

Buradan aydındır ki, (2) bərabərliyi həqiqi ədədlərin iki $x_1 = x_2$ və $y_1 = y_2$ bərabərlikləri ilə eyni güclüdür.

Böyük (>) və kiçik (<) anlayışlarının kompleks ədədlər üçün mənası yoxdur.

Verilmiş $z_1 = x_1 + iy_1$ və $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks ədədlərinin **cəmi və hasili** aşağıdakı qayda ilə təyin edilir:

1. $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$;

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) =$$
$$= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

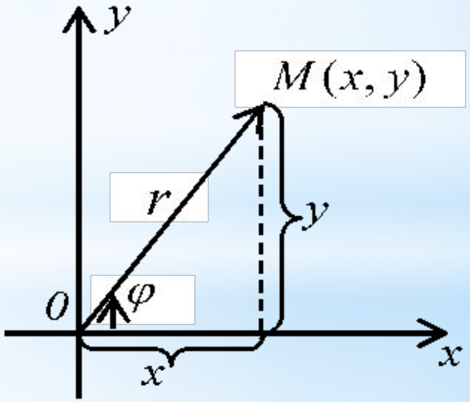
Cəbri şəkildə verilmiş $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ədədlərinin nisbətini belə tapmaq olar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{i(x_1y_2 - x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Kompleks ədədlərin həndəsi göstərilişi

Hər bir $z = x + iy$ kompleks ədədini həndəsi olaraq müstəvi üzərindəki (x, y) nöqtəsi ilə göstərirlər. Kompleks ədədləri həndəsi olaraq göstərmək üçün işlədilən müstəviyə kompleks müstəvi deyilir. Kompleks müstəvi üzərində absis oxuna həqiqi ox, ordinat oxuna isə xəyali ox deyilir.

Kompleks ədədin arqumenti və **modulu.** Komplek müstəvi üzərində $z = x + iy$ kompleks ədədini həndəsi göstərən (x, y) nöqtəsinin polyar koordinatları (ρ, φ) olsun. Onda:



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (3)$$

Buradan ρ və φ kəmiyyətlərini təyin etmək üçün

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (4)$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (5)$$

münasibətlərini alarıq. (5) bərabərlikləri vasitəsi ilə təyin olunan φ-yə $z = x + iy$ **kompleks ədədinin arqumenti** deyilir və $\varphi = Argz = Arg(x + iy)$ kimi işarə olunur. Buradan aydın görünür ki, $Argz$ kəmiyyəti çoxqiymətlidir və $2k\pi$ (k tam ədəddir) həddinə qədər dəqiqliklə təyin olunur. Buna görə də çox vaxt $Argz$-in baş üiymətini ayırmaq lazım gəlir. $Argz$-in

$$-\pi < Argz \le \pi \tag{6}$$

bərabərsizliyini ödəyən qiymətinə onun baş qiyməti deyilir və $\arg z$ ilə içarə olunur və aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0, \quad y \ge 0, \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & \text{əgər} \quad x < 0, \quad y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y < 0, \end{cases}$$

(4) münasibəti ilə təyin olunan $\rho \geq 0$ ədədi z kompleks ədədinin modulu adlanır və

$$\rho = |z| = |x + iy|$$

ilə göstərilir.

(3) münasibətlərinə əsasən $z = x + iy$ ədədini

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{7}$$

şəklində yazmaq olar (7) ifadəsinə z kompleks ədədinin triqonometrik şəkli deyilir.

Eyler düsturu.Kompleks ədədlər üçün Eyler düsturu

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{8}$$

münasibətinə deyilir. (8) düsturundan istifadə etsək (7) münasibətini

$$z = \rho e^{i\varphi} \tag{9}$$

və yaxud

$$z = |z|e^{iArgz} \tag{10}$$

şəklində yaza bilərik.

(9) ifadəsi z kompleks ədədinin üstlü şəkli adlanır.

$z = \rho e^{i\varphi}$ olduqda $\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$ olur. Deməli, qarşılıqlı qoşma kompleks

ədədlər üçün $|z| = |\bar{z}|$ və $\arg z = -\arg \bar{z}$ $(\arg z \neq \pi)$ münasibətləri ödənir.

Eylerin (8) düsturundan

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \tag{11}$$

Münasibətini də almaq olar.

Tapşırıq: (8) və (11) bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplayıb, çıxmaqla $\cos\varphi$ və $\sin\varphi$ üçün ifadələr alaraq, onlar vasitəsilə $sh\varphi, ch\varphi$ ifadələrini almaqla $\cos i\varphi = ch\varphi, \sin i\varphi = ish\varphi$ olduğun göstərməli.

Modulun və Arqumentin Xassələri

Verilmiş z_1 və z_2 KƏ-nin cəmini və fərqini həndəsi olaraq məlum paraleloqram qaydası ilə tapırlar.Asanlıqla görmək olar ki, $|z_1 - z_2|$ ifadəsi z_1 və z_2 nöqtələri arasındakı məsafəyə bərabərdir. Kompleks müstəvi üzərində təpə nöqtələri $0, z_1, z_2$ nöqtələrində olan üçbucaq götürək. Bu üçbucağın tərəflərinin uzunluğu $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$ olar. Məlumdur ki, üçbucağın bir tərəfinin uzunluğu qalan iki tərəfinin uzunluqları cəmindən böyük ola bilməz:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad (1)$$

buradan $|z_1| = |z_2 + (z_1 - z_2)|$ və $|z_2| = |z_1 + (z_2 - z_1)|$ yazaraq $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$ münasibətini alarıq.

z_1 və z_2 KƏ-ni üstlü şəkildə götürək:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$

Aydındır ki,

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Deməli

$$|z_1 z_2| = \rho_1 \rho_2 = |z_1|\,|z_2| \tag{2}$$

və

$$Arg(z_1 \cdot z_2) = (\varphi_1 + \varphi_2) = Argz_1 + Argz_2 \tag{3}$$

münasibətləri doğrudur.

$z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ olduqda

$$|z^n| = |z|^n, \tag{4}$$

$$Argz^n = nArgz. \tag{5}$$

Xüsusi halda, $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ olduqda (4) və (5) düsturlarına əsasən

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{6}$$

(6) düsturuna Muavr düsturu deyilir.

Tapşırıq: (2) və (3) bərabərliklərində z_1 əvəzinə $\frac{z_1}{z_2}$ nisbətini $(z_2 \neq 0)$ götürməklə KƏ-in nisbətinin modulu və arqumenti haqqında düsturları yazın.

KƏ-dən kökalma

$\omega^n = z$ münasibəti ödənildikdə $\omega = re^{i\theta}$ ədədinə $z = \rho e^{i\varphi}$ ədədinin n-ci dərəcədən kökü deyilir və $\omega = \sqrt[n]{z}$ ilə işarə olunur. $\omega^n = z$ münasibətindən $r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi}$ alarıq.Buradan:

$$\rho = r^n \text{ və } n\theta = \varphi + 2k\pi$$

Onda KƏ-dən n-ci dərəcədən kökalma düsturu belə yazılar:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Misal. $\sqrt{-i}$ kökünün qiymətlərini tapın.

SON