

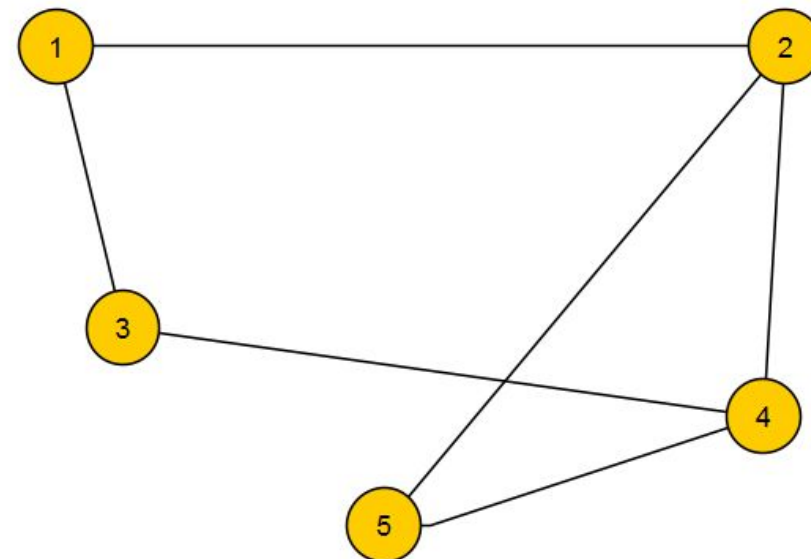
# Графы

# Что такое граф?

- **Граф** — это структура, представляющая собой набор объектов, в котором некоторые пары объектов в некотором смысле «связаны».
- Объекты, называемые **вершинами** (также называемыми *узлами* или *точками*).
- Каждая из связанных пар вершин называется **ребром**.

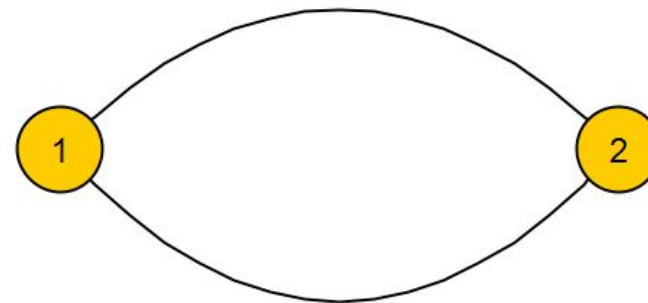
# Что такое граф?

- Например:
  - Вершины (желтые кружки) is  $V = \{1,2,3,4,5\}$
  - Ребра (черные линии) это пары вершин, которые связаны. В этом случае ребра :  
 $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$
- Мы также определяем граф как пару  $V$  и  $E$ . Если коротко, то  $G = (V, E)$ .  
Мы будем использовать это обозначение.

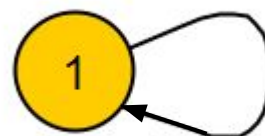
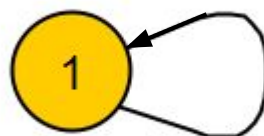
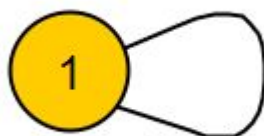
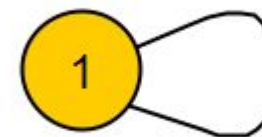


# Что такое граф?

- Параллельные вершины :
  - Два или более ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин.
  - В примере вершины 1 и 2 соединены с 2 ребрами.



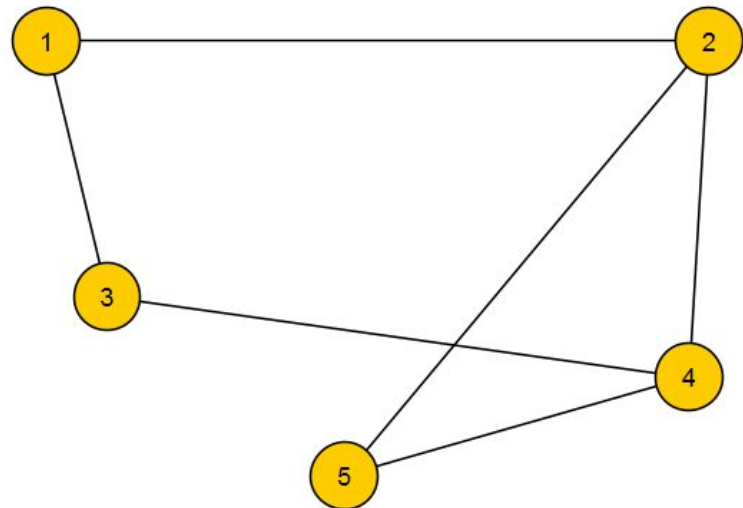
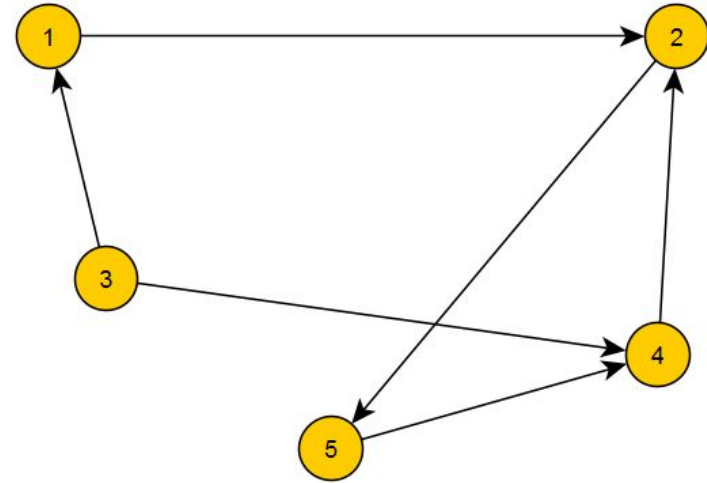
- Петля
  - Ребро, которое начинается и заканчивается в одной вершине.



# Что такое граф?

## Типы графов

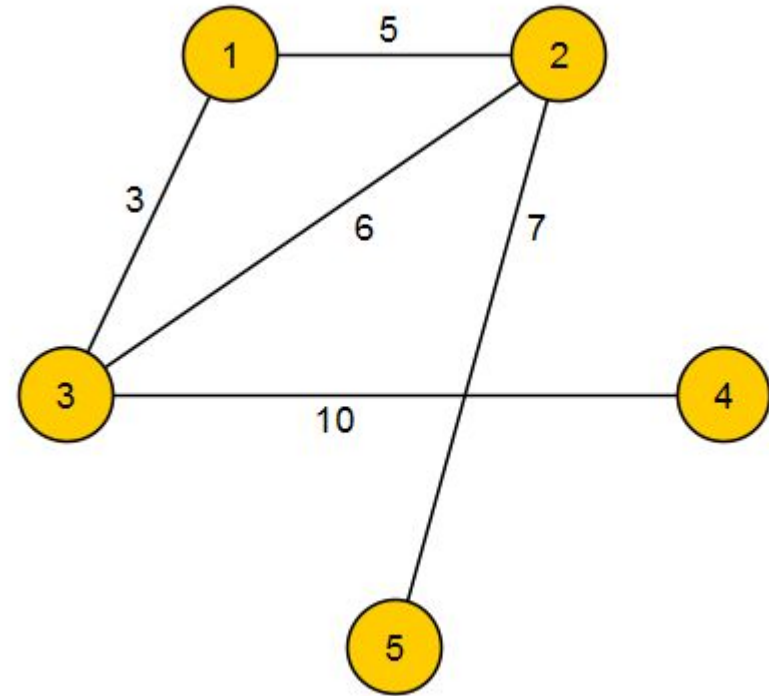
- Если ребра в графе ориентированы, т. е. указывают только в одном направлении, граф называется **ориентированным графом** или **орграфом**.
- Если ребра в графе не имеют направления, граф называется *неориентированным графом*.



# Что такое граф?

## Типы графов

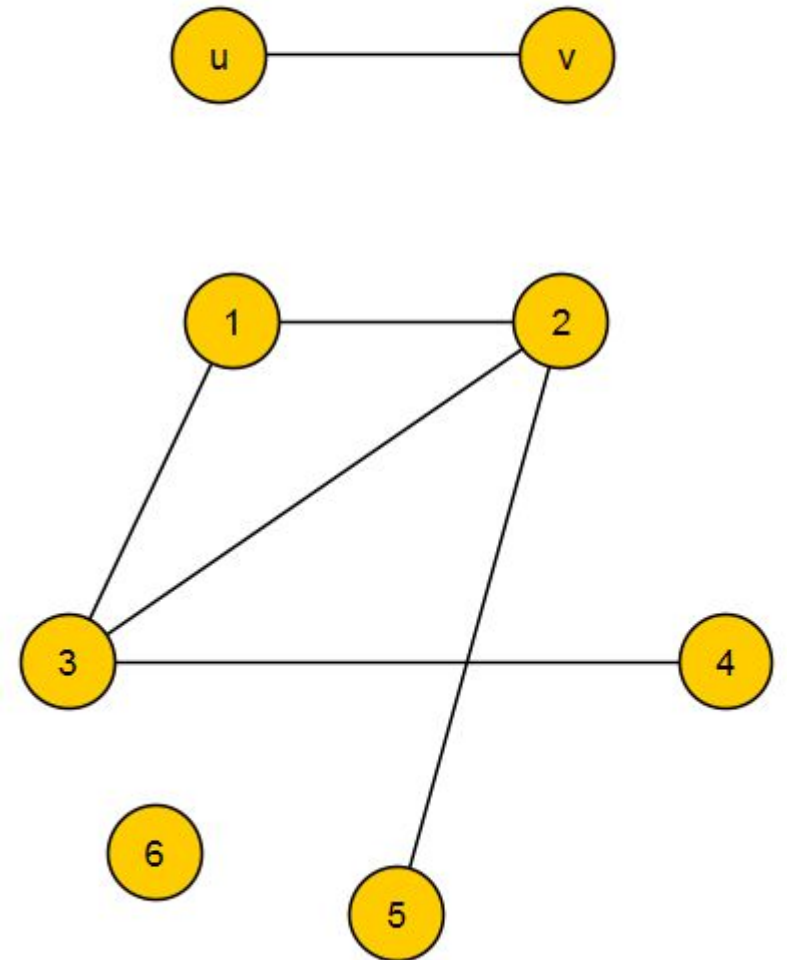
- Граф, в котором каждое ребро имеет числовой «вес», называется *взвешенным графом*.



# Что такое граф?

## Терминология

- Вершины  $u$  и  $v$  называются *смежными*, если  $u$  и  $v$  соединены некоторым ребром.
- Количество ребер, инцидентных вершине, называется *степенью вершины* или  $deg(v)$ . Вершина инцидентна ребру, если эта вершина является одной из двух вершин, которые соединяет ребро. Например,  $град(3) = 3$
- *Листовая вершина* — это вершина с  $deg(v) = 1$ , например, 5 — листовая вершина.
- *Изолированная вершина* — это вершина с  $deg(v) = 0$ , например, 6 — изолированная вершина.



# Что такое граф?

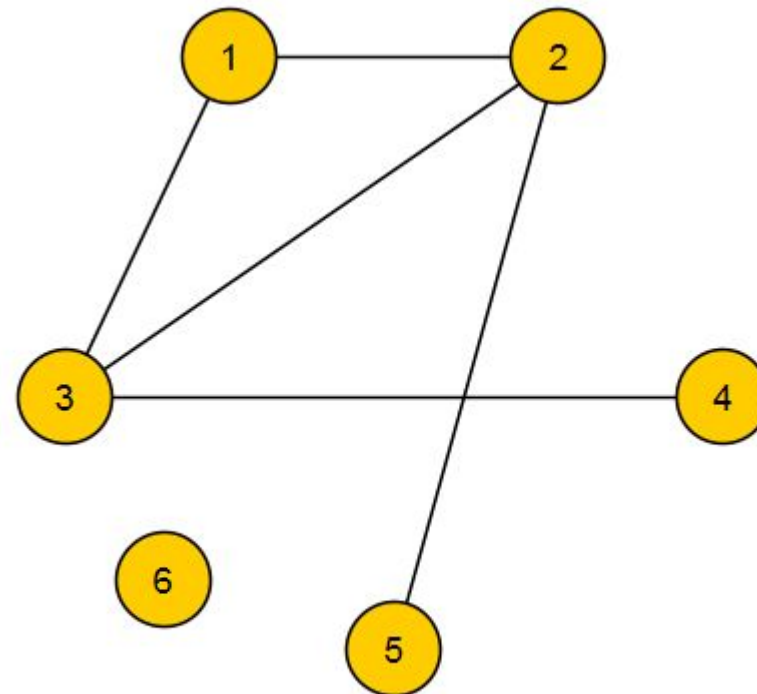
## Лемма о рукопожатии

• Лемма:

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \text{deg}(v)$$

где  $|E|$  количество ребер.

Другими словами, сумма степени всех вершин равна количеству ребер, умноженному на 2.

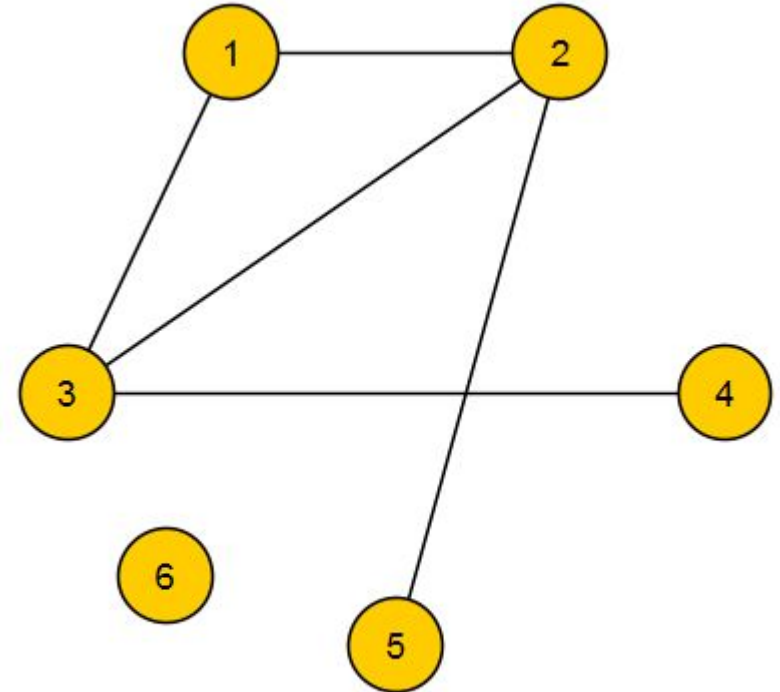




# Что такое граф?

## Терминология

- Граф называется *связным*, если в нем нет вершины с  $\text{deg} = 0$ .
- Каждый связный подграф называется компонентом.
- **Путь** в графе — это последовательность ребер, соединяющая последовательность вершин.
  - Например,  $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
- **Цикл** — это **путь**, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине.
  - Например,  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$



# Графическое представление

# Что такое граф?

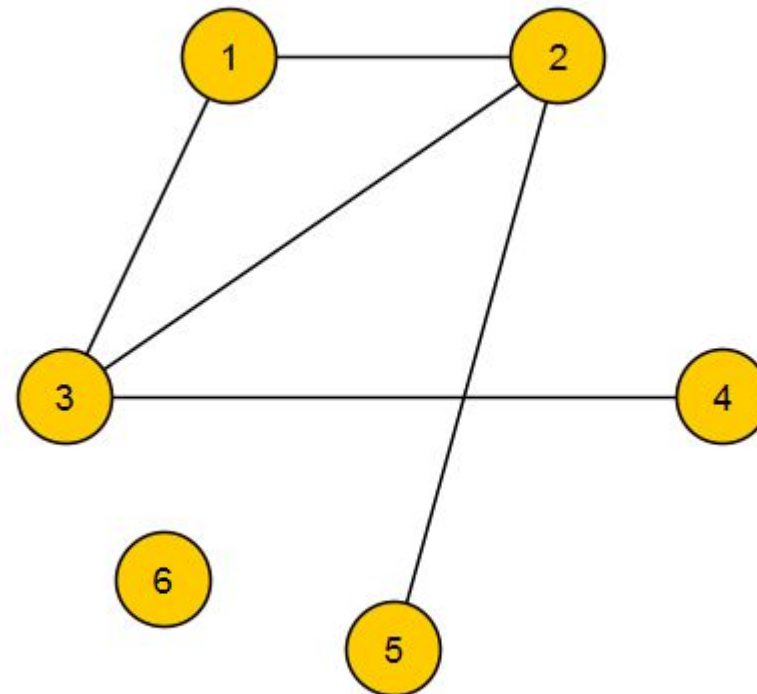
## Представление

- Нужно представить график в компьютере.
- 3 обычных вида представления:
  - Список ребер
  - Матрица смежности
  - Список смежности

# Что такое граф?

## Представление. Список ребер

- Простое перечисление ребер :
  - Для этого примера список узлов  
 $\{1, 2\}, \{2, 1\}$   
 $\{1, 3\}, \{3, 1\}$   
 $\{2, 3\}, \{3, 2\}$   
 $\{2, 5\}, \{5, 2\}$   
 $\{3, 4\}, \{4, 3\}$
- Можно использовать 2 массива **от** и **до**.
- Может использоваться массив пар.



# Что такое граф?

## Представление: Список смежности

- Хранить для каждой вершины все ее соседние вершины :

- Для этого примера список смежности

1 → {2, 3}

2 → {1, 3, 5}

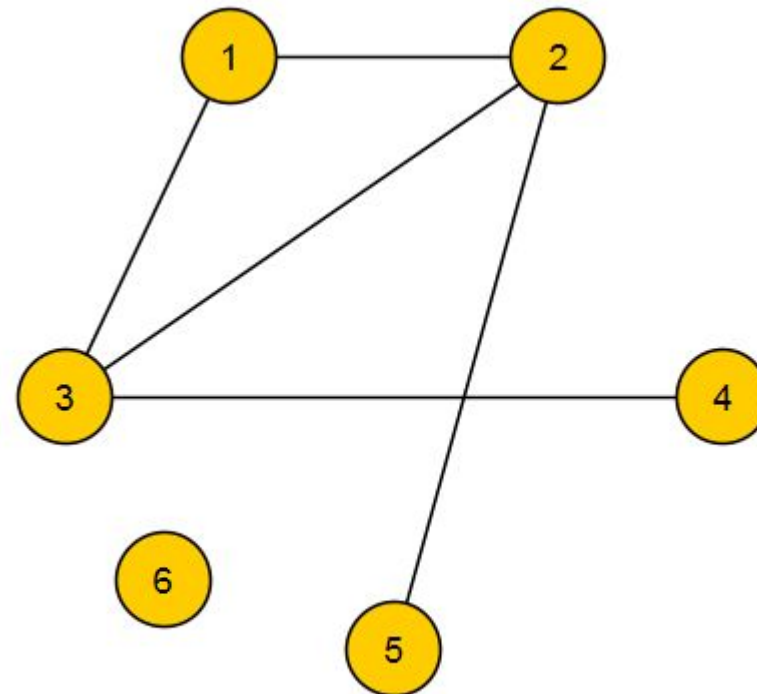
3 → {1, 2, 4}

4 → {3}

5 → {2}

6 → {}

- Можно использовать массив массивов.
- Карту можно использовать.

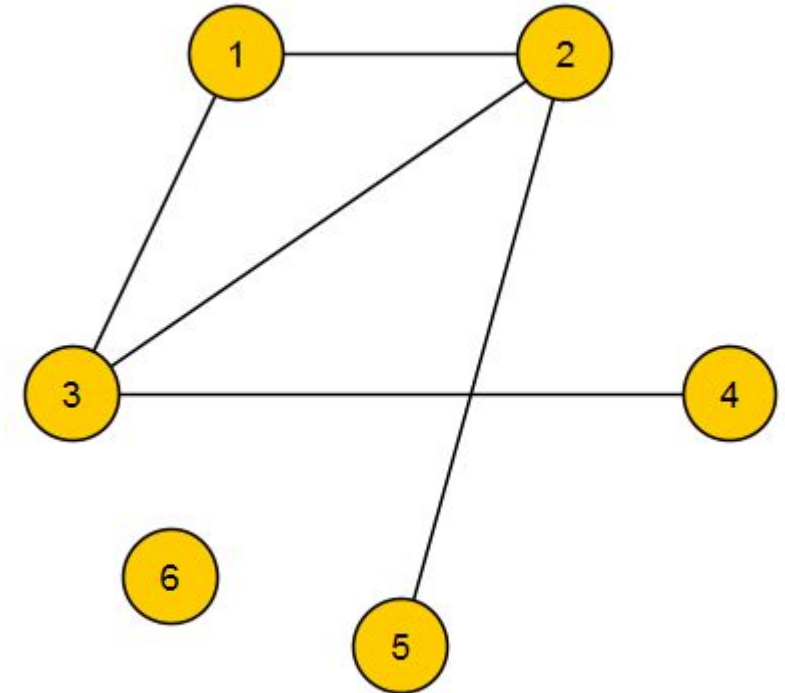


# Что такое граф?

## Представление: Матрица смежности

- Если между вершинами  $i$  и  $j$  есть ребро, то  $(i, j)$ -я матрица устанавливается в true, а в противном случае - в false:
  - Для этого примера матрица смежности

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0



- Можно использовать массив массивов.

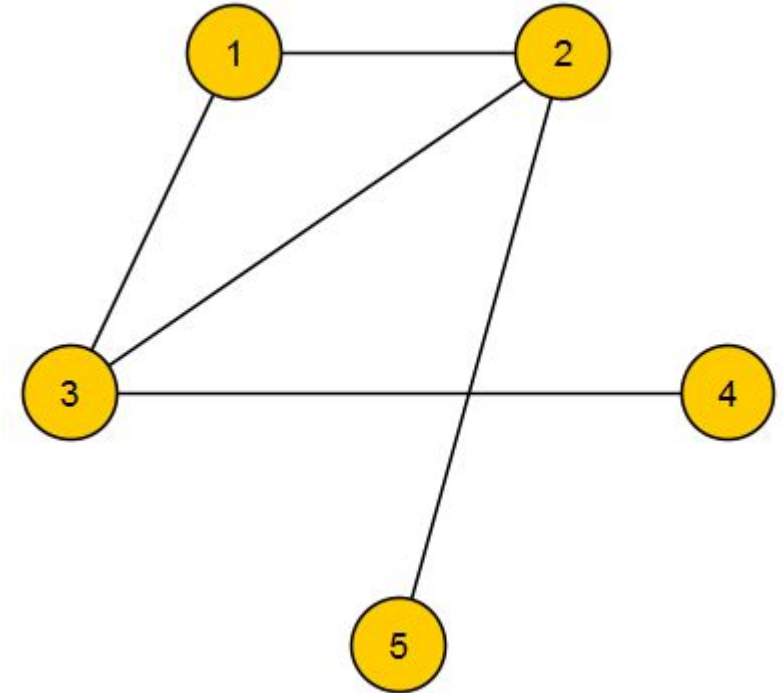
# Что такое граф?

## Представление. Ориентированный граф

- В случае ориентированного графа представление остается прежним, но ребра добавляются только в одном направлении.
  - Например, матрица соединений для ориентированного графа будет :

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	1	1	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

- Обратите внимание, что для неориентированного графа  $(i, j)$  всегда равно  $(j, i)$ . В случае направленного такого правила нет.



# Breadth First Search (BFS)

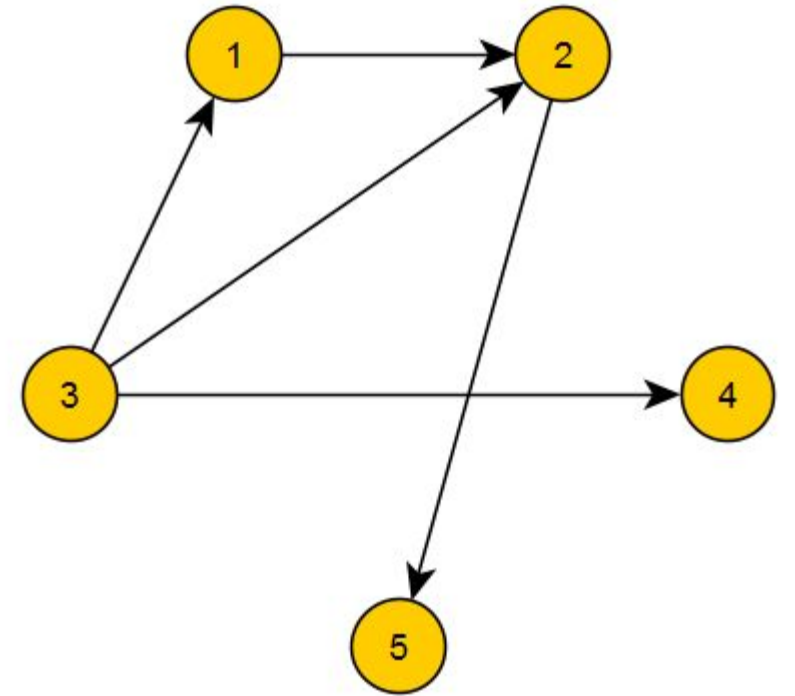
Поиск в ширину



# Breadth First Search (BFS)

- BFS также является методом обхода графа.
- Алгоритм:

```
BFS( $v$ )
{
    добавить  $v$  в очередь  $q$ 
    пока  $q$  не пусто
        взять первую вершину  $u$  из  $q$ 
        удалить первую вершину из  $q$ 
        пометить  $u$  как посетившую
        для всех непосещенных смежных вершин  $w$ 
            из  $u$ 
                добавить  $w$  в  $q$ 
    }
```

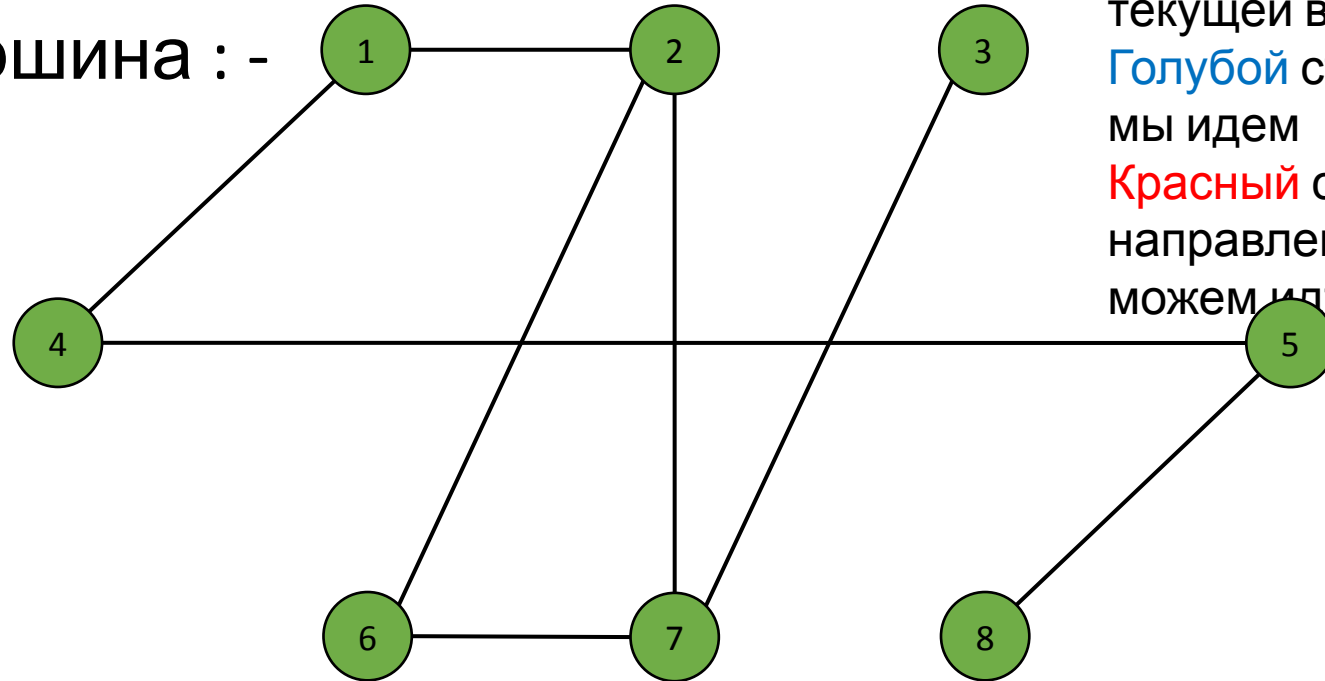


# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : { }

Очередь: { }

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

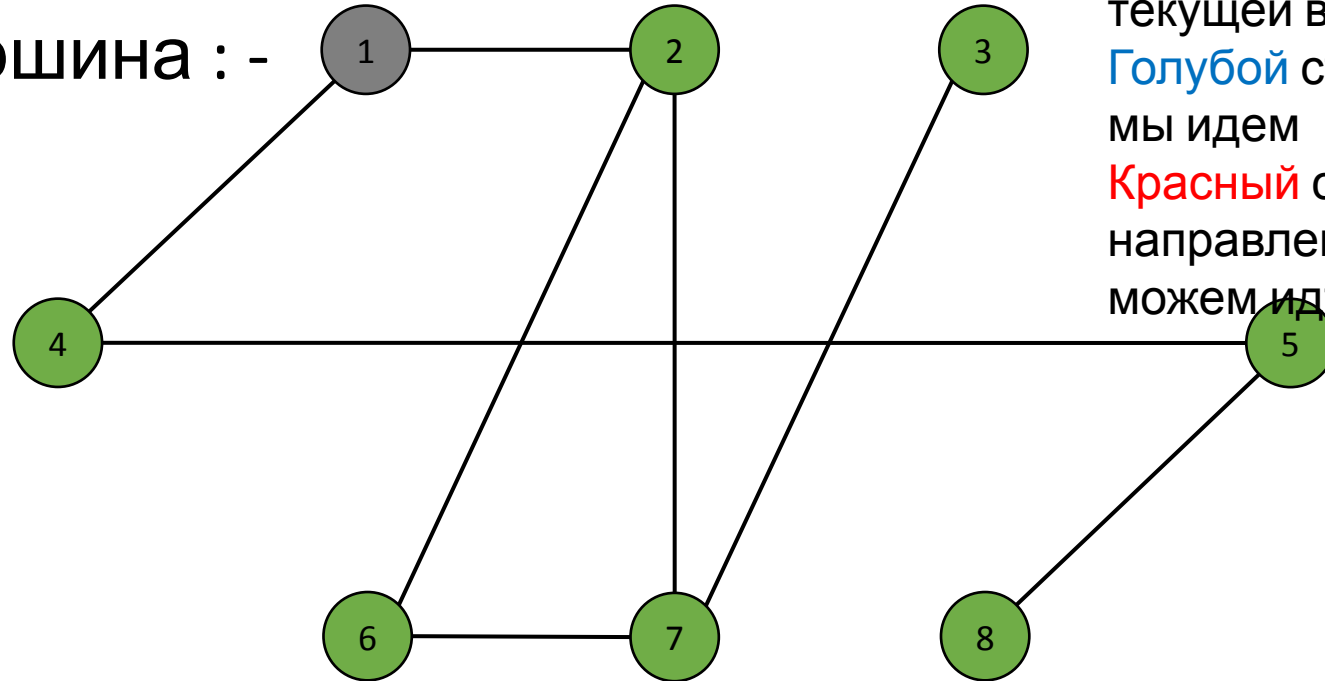
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : { }

Очередь : {1}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

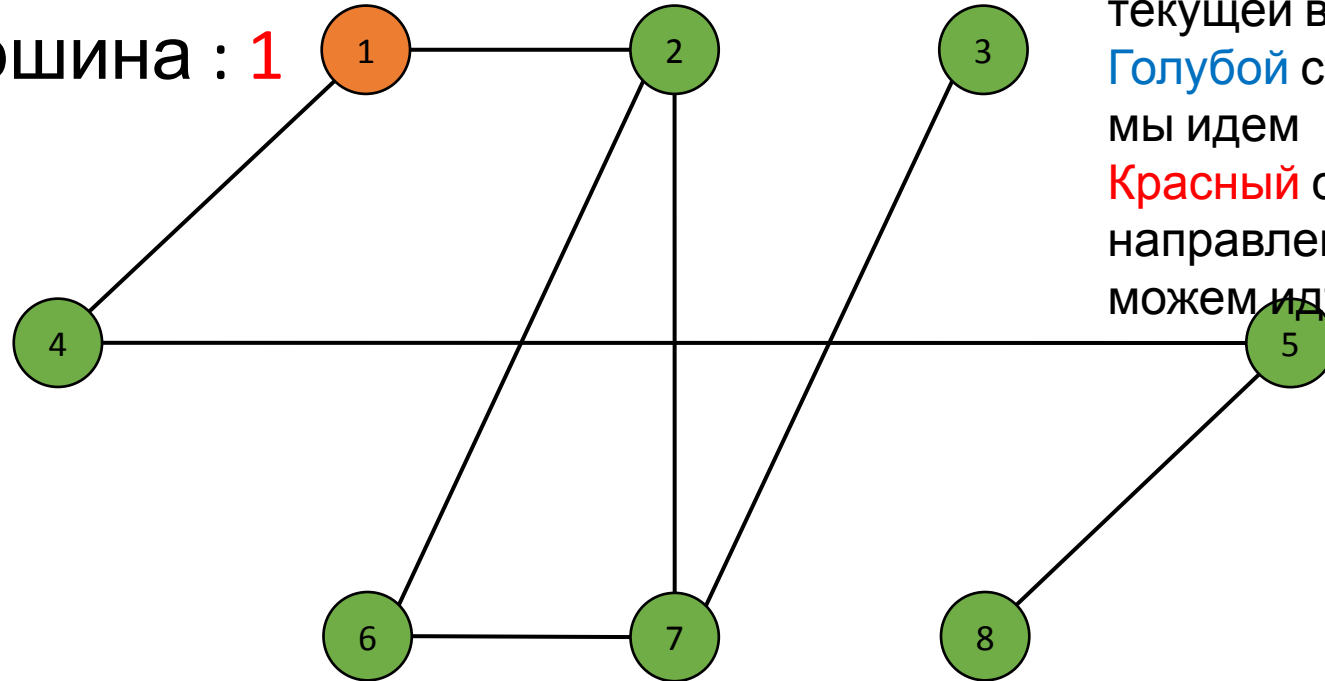
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1}

Очередь : {}

Текущая вершина : 1



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

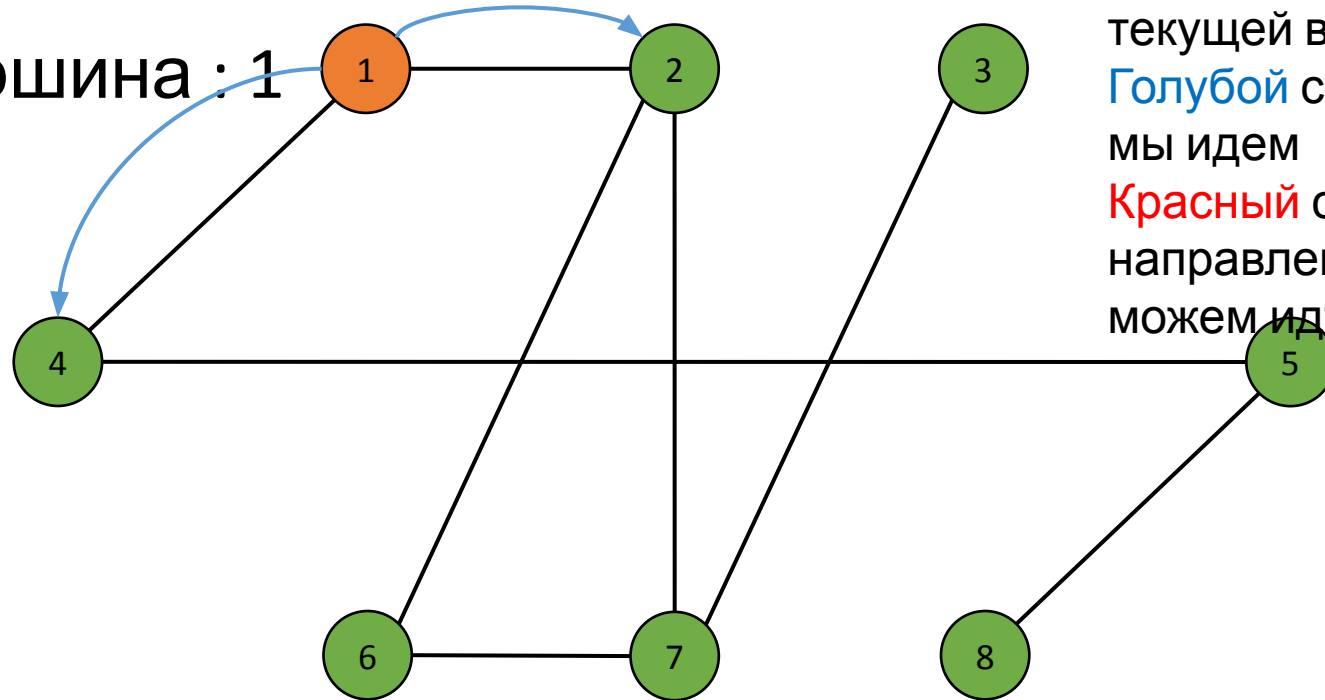
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1}

Очередь : {}

Текущая вершина : 1



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

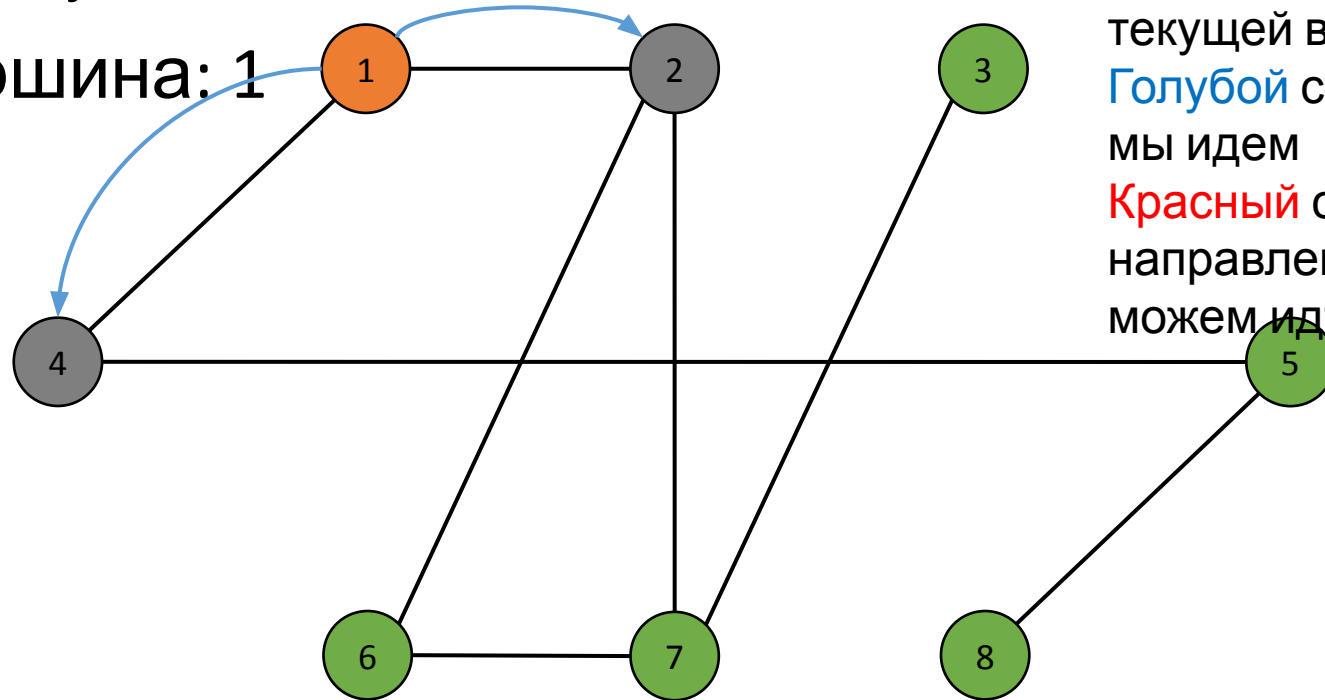
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1}

Очередь : {2, 4}

Текущая вершина: 1



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

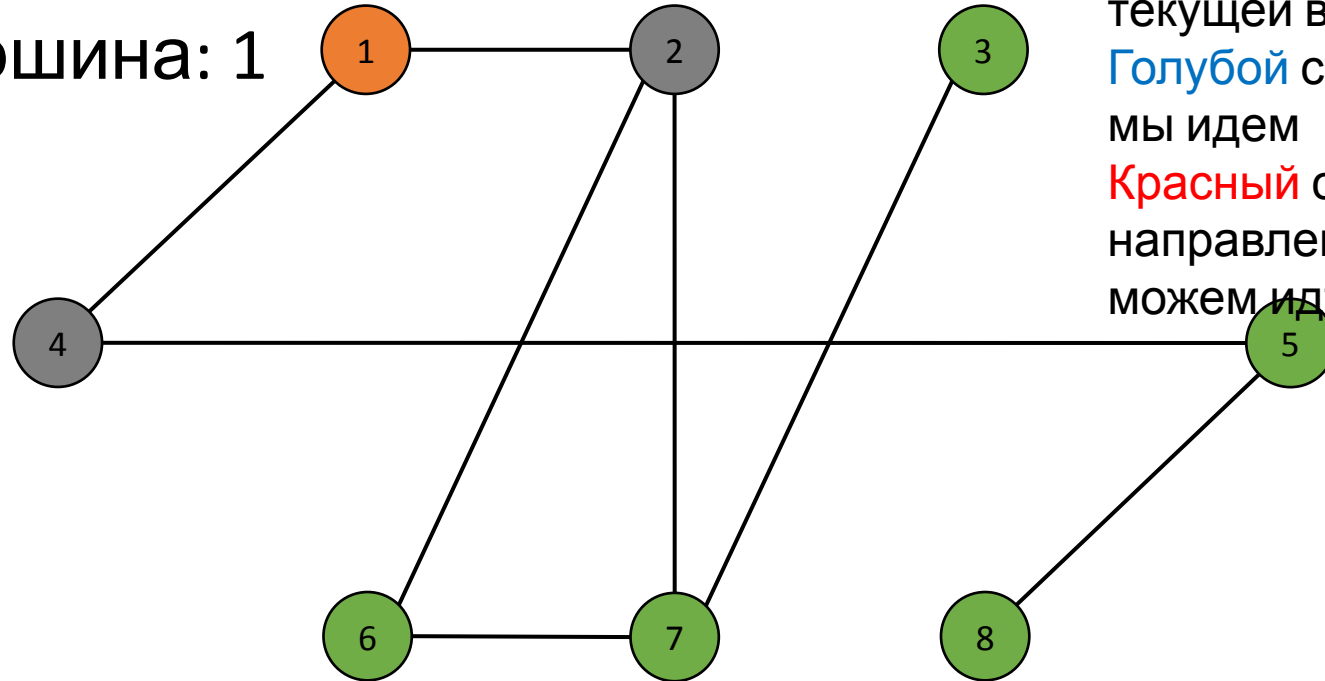
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1}

Очередь : {2, 4}

Текущая вершина: 1



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

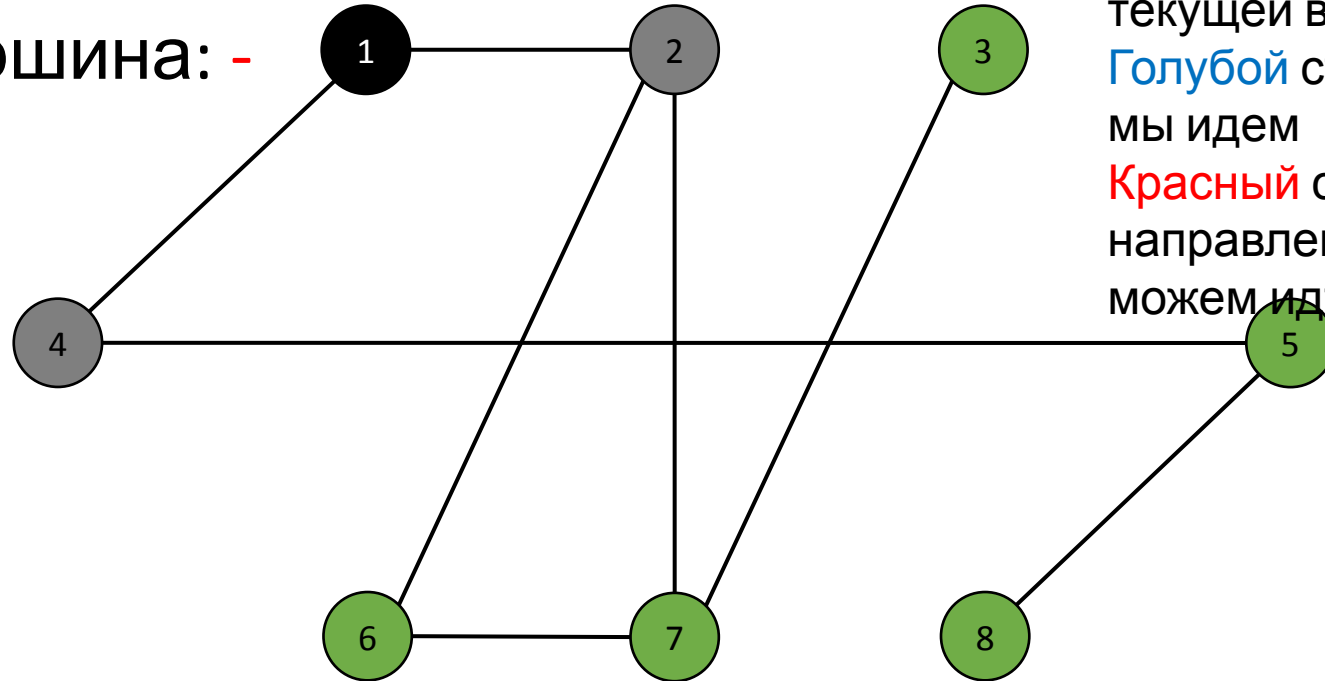
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1}

Очередь : {2, 4}

Текущая вершина: -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

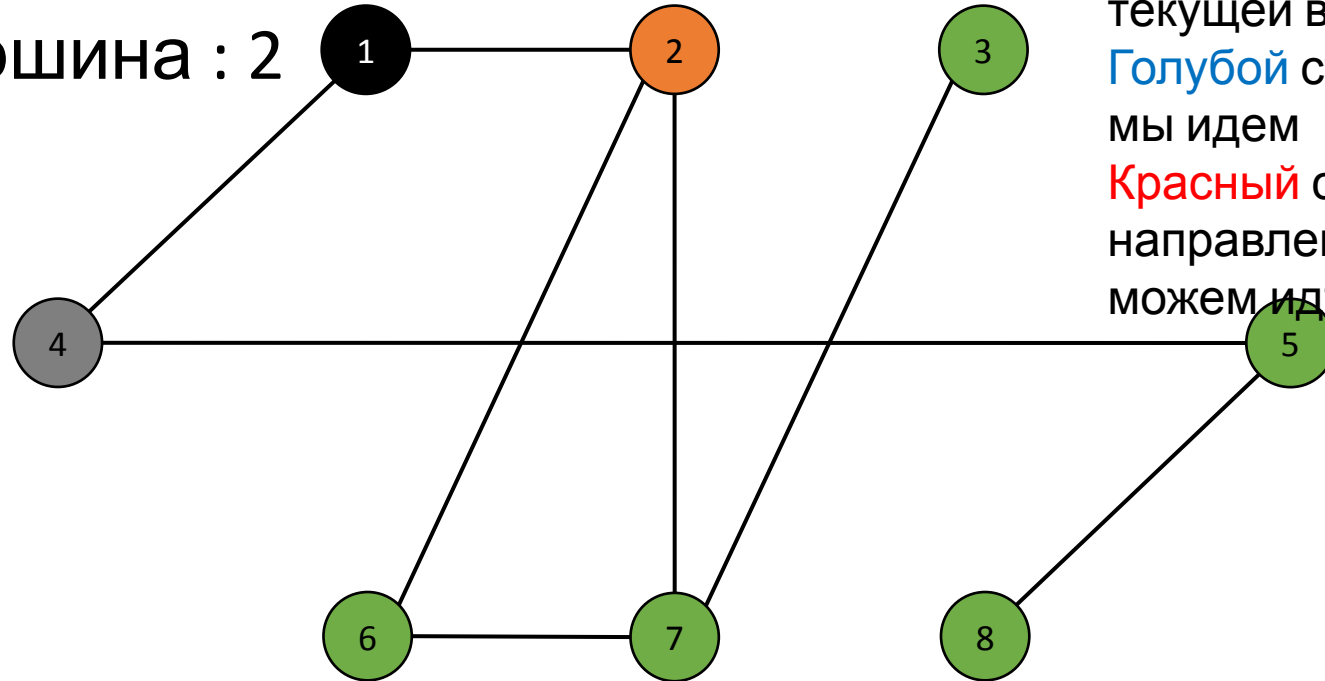


# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Очередь : {4}

Текущая вершина : 2



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

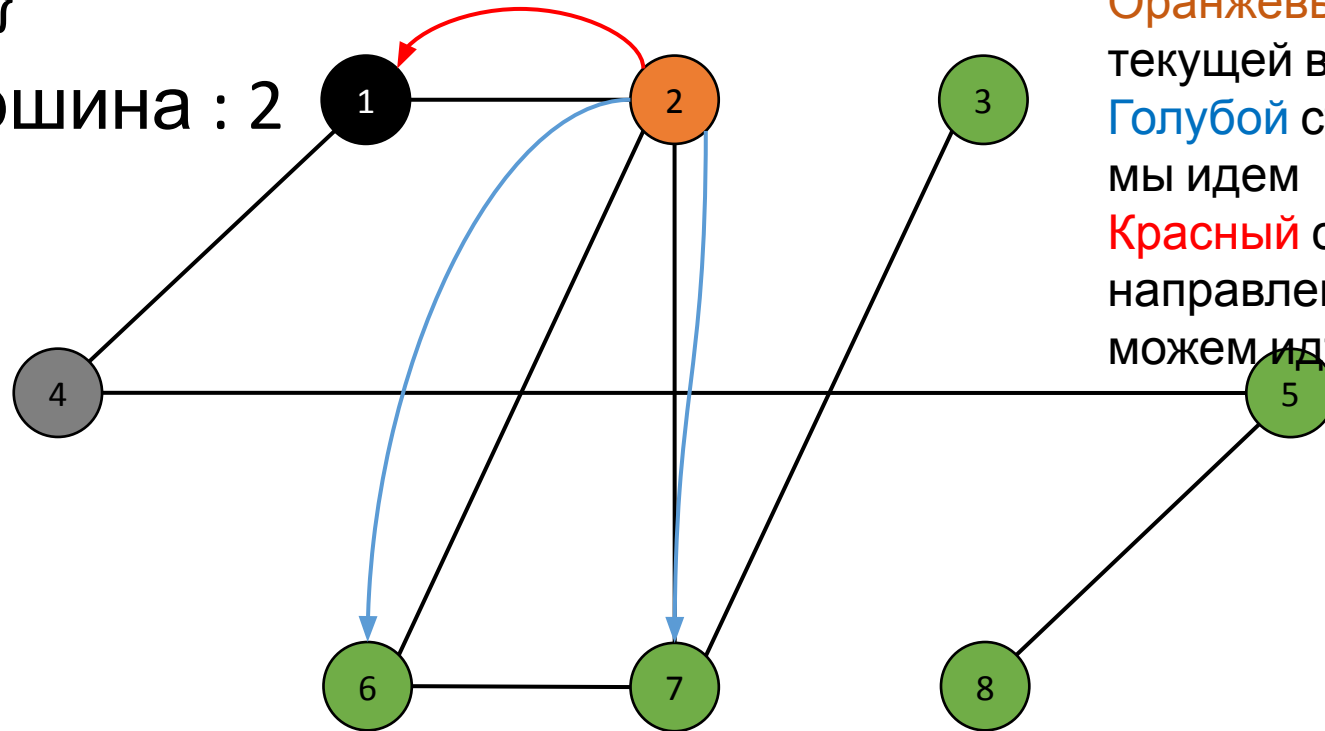
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Очередь : {4}

Текущая вершина : 2



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

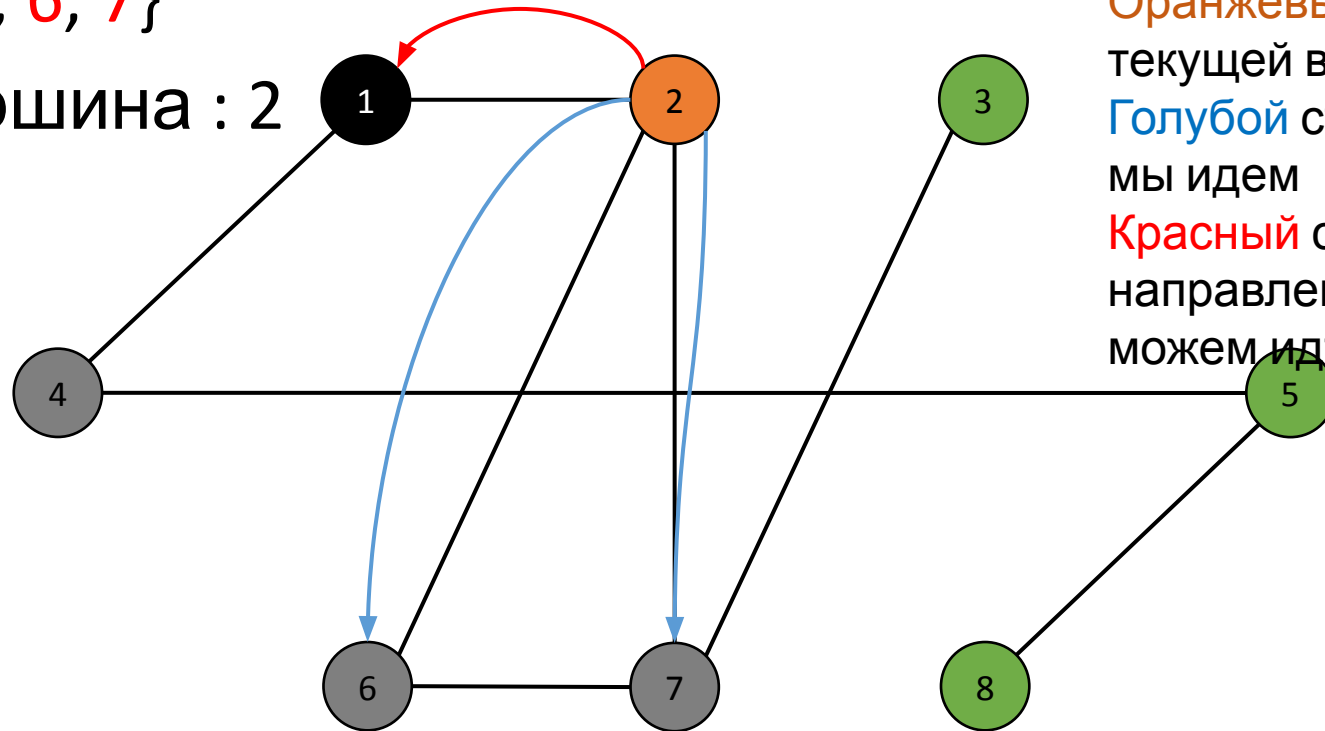
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Очередь : {4, 6, 7}

Текущая вершина : 2



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

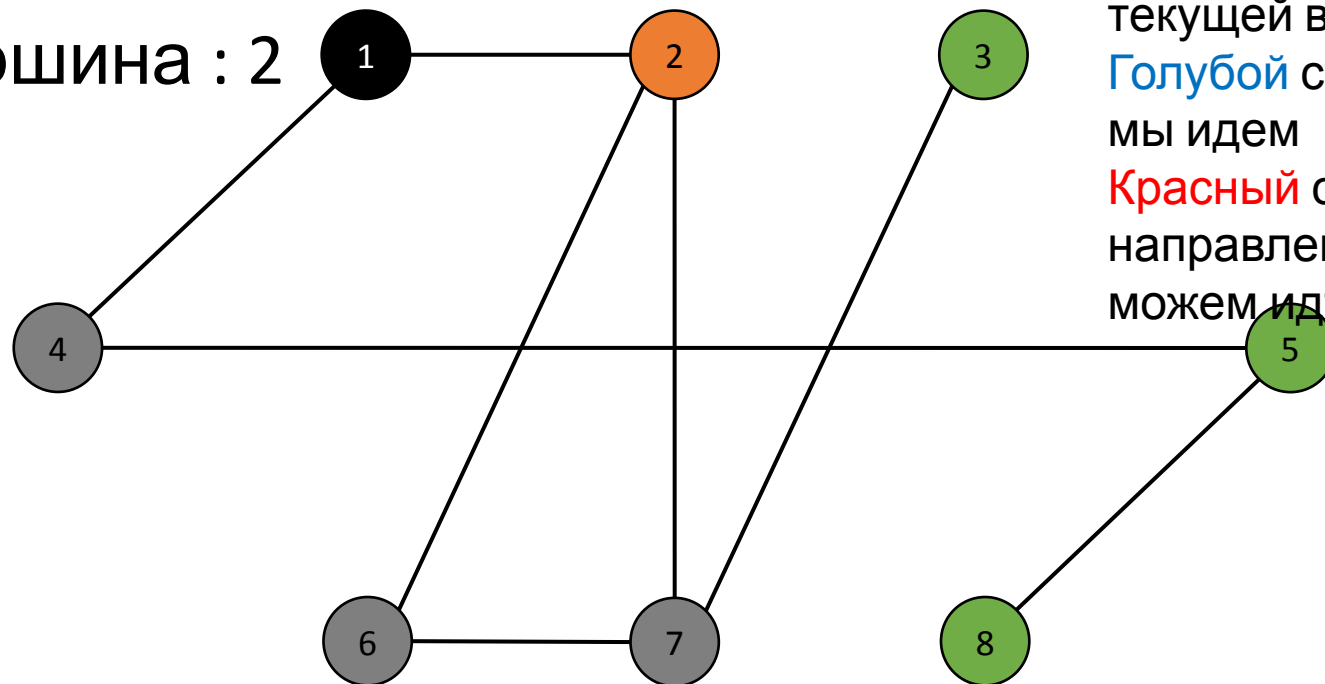
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Очередь : {4, 6, 7}

Текущая вершина : 2



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

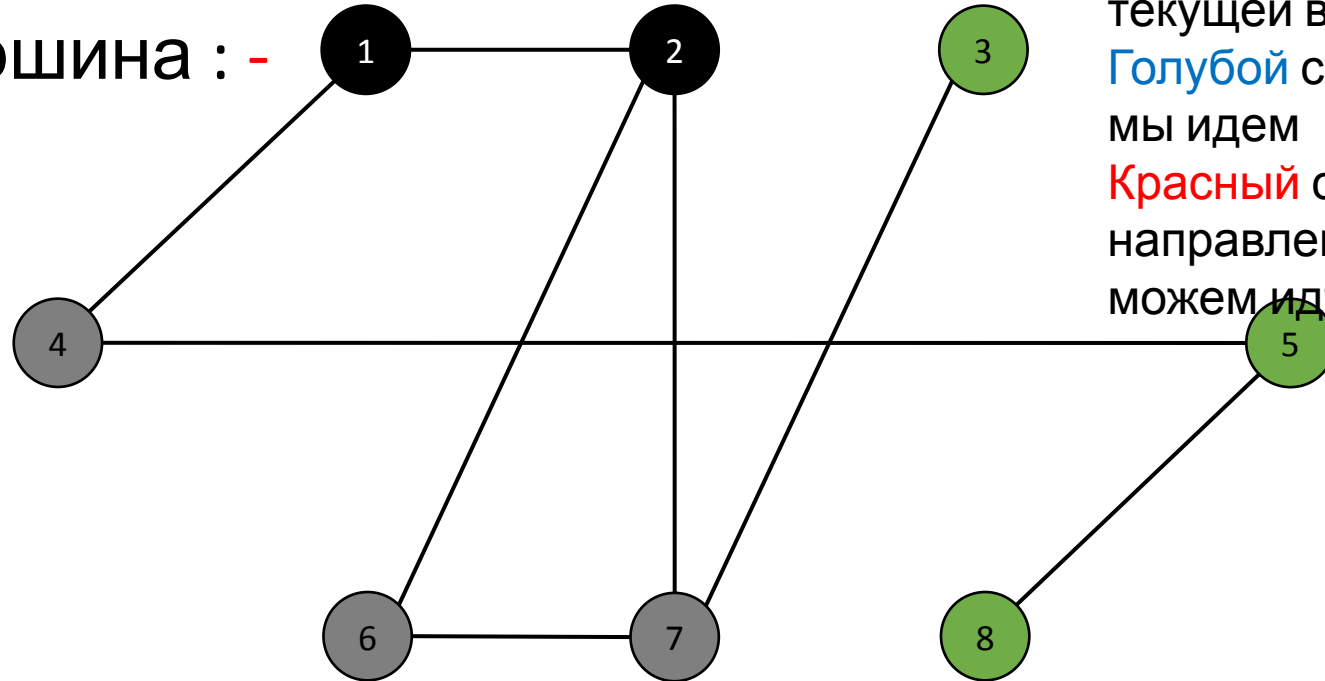
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Очередь : {4, 6, 7}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

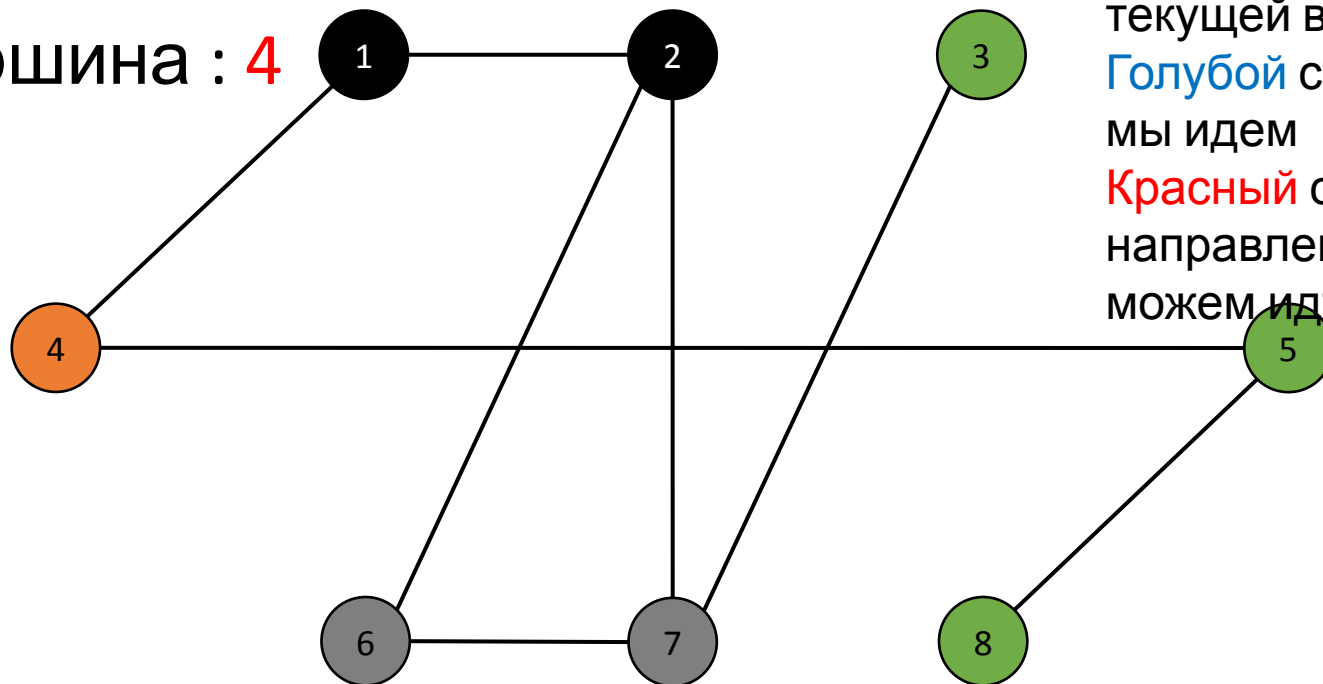
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4}

Очередь : {6, 7}

Текущая вершина : 4



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

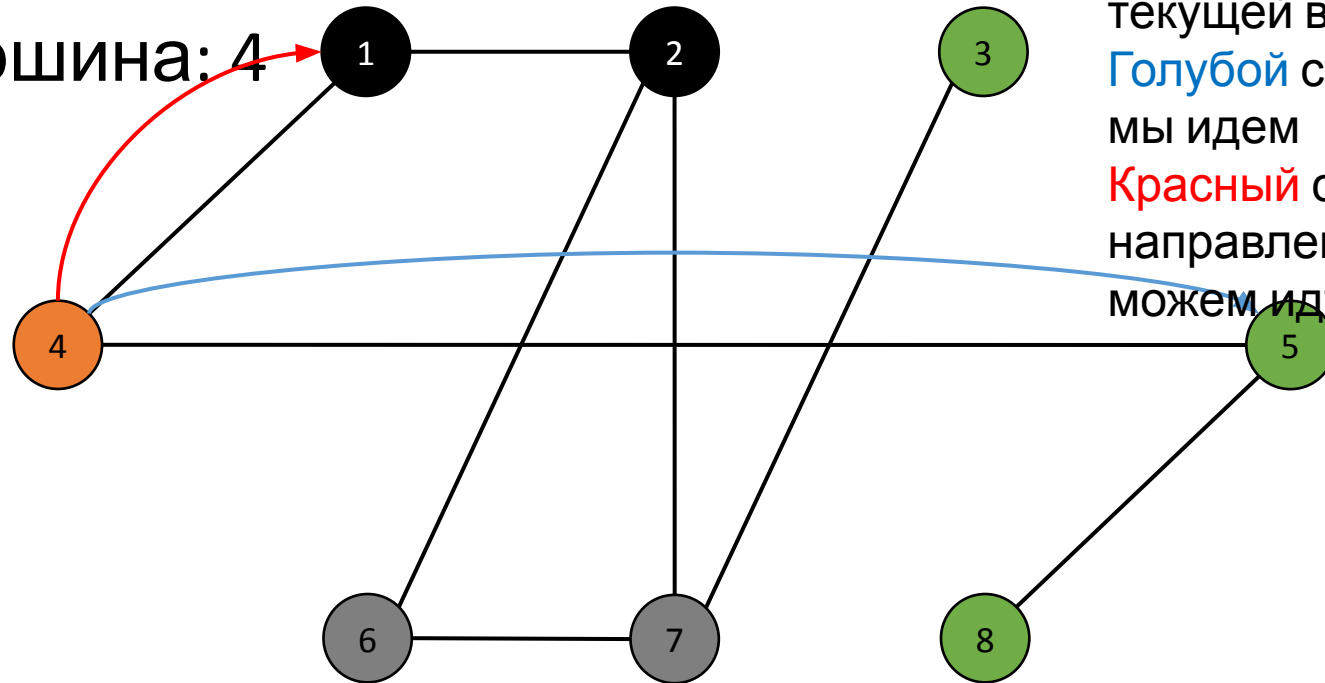
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4}

Очередь : {6, 7}

Текущая вершина: 4



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

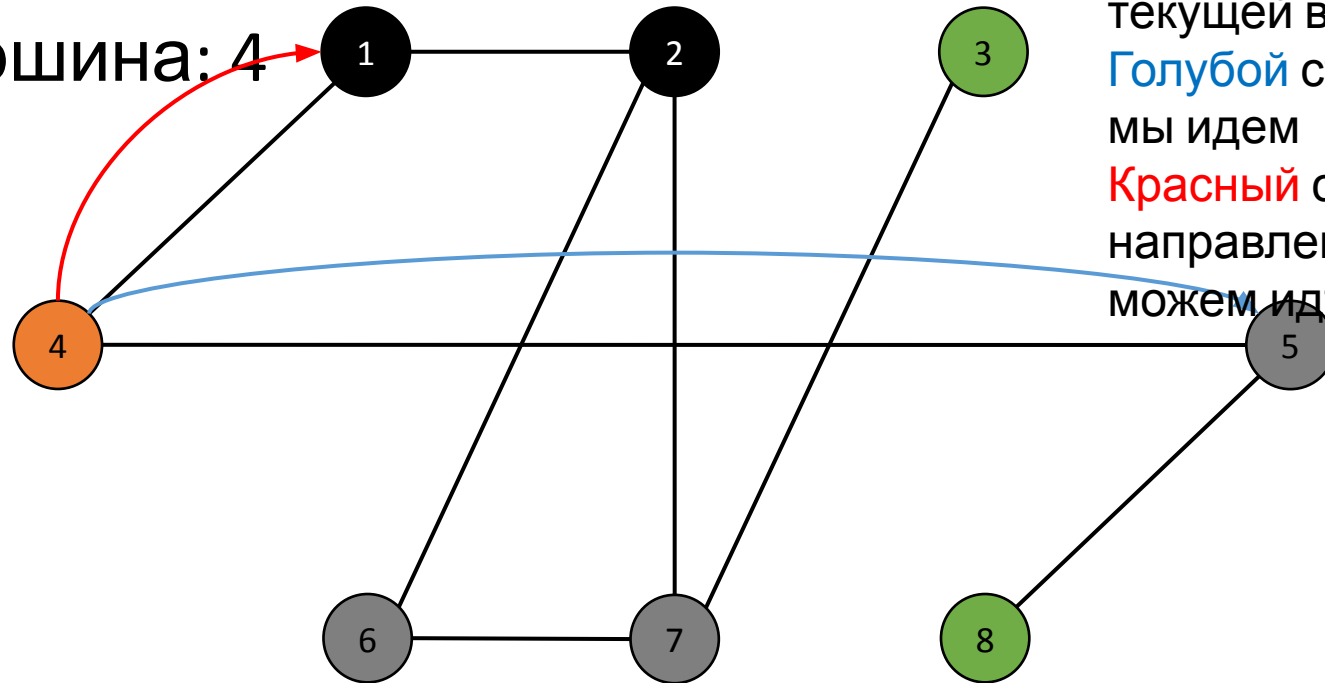
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4}

Очередь : {6, 7, 5}

Текущая вершина: 4



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

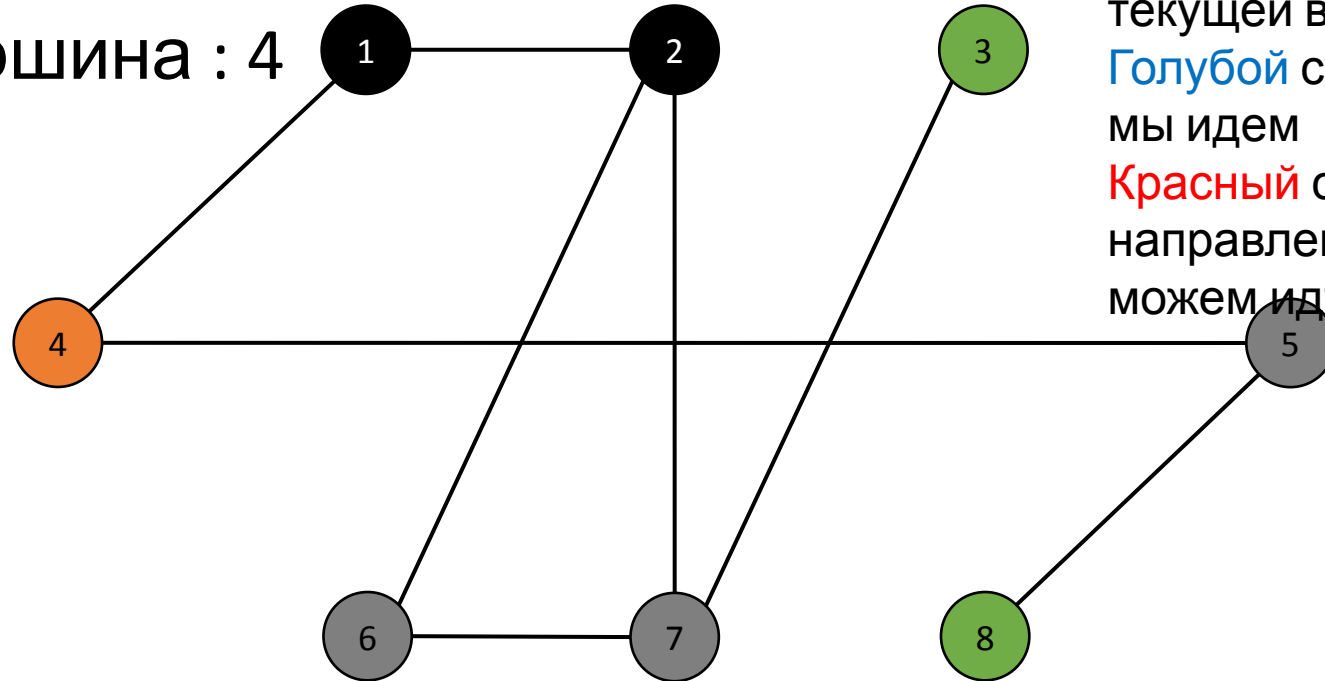


# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4}

Очередь : {6, 7, 5}

Текущая вершина : 4



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

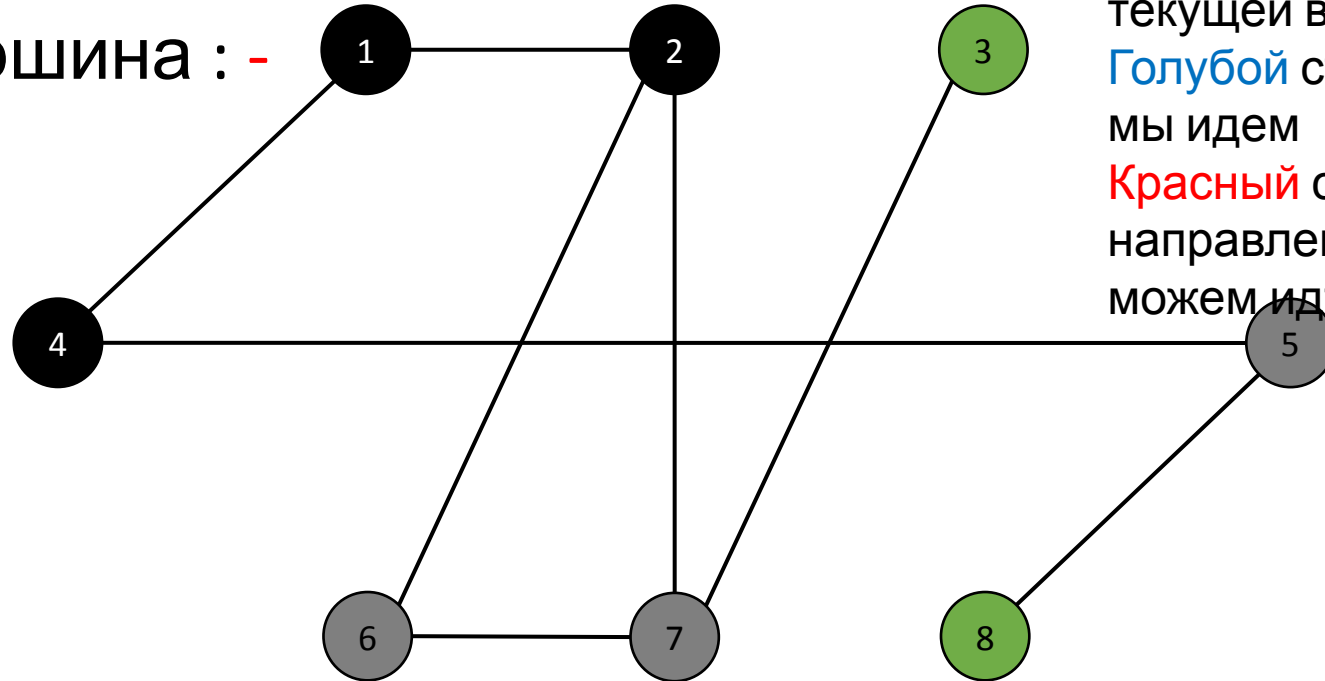
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4}

Очередь : {6, 7, 5}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

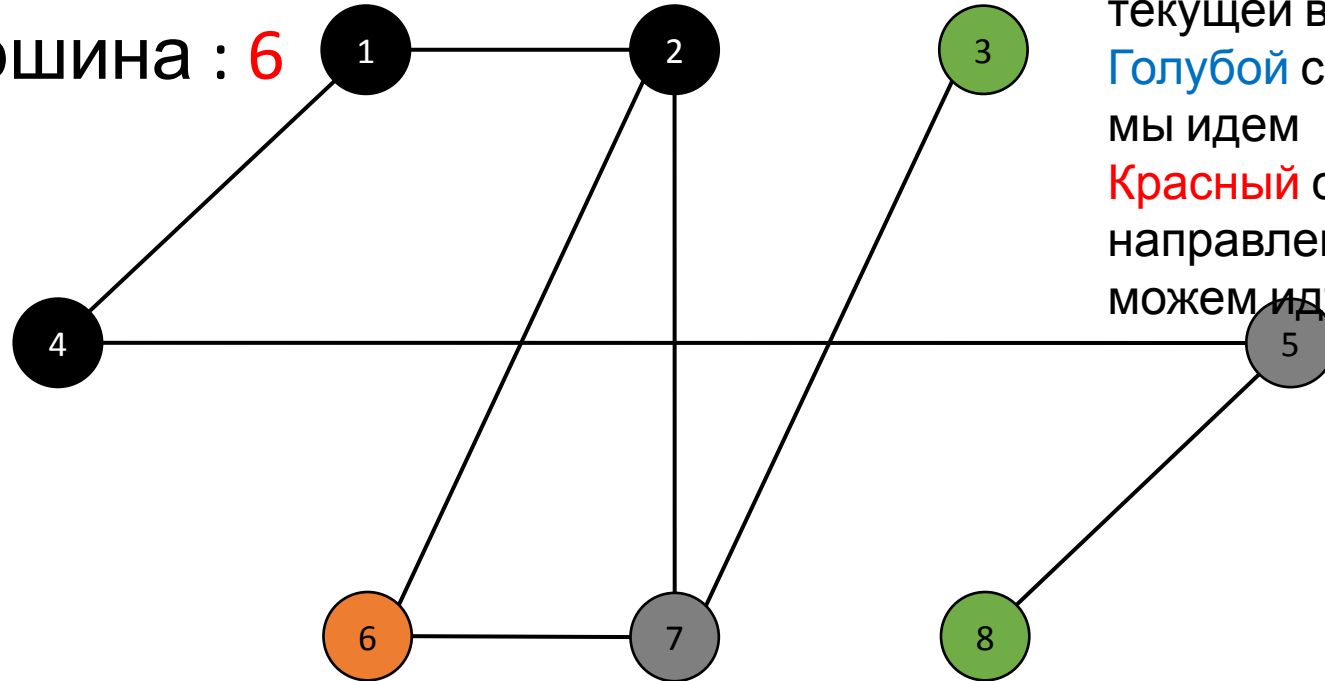
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6}

Очередь : {7, 5}

Текущая вершина : 6



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

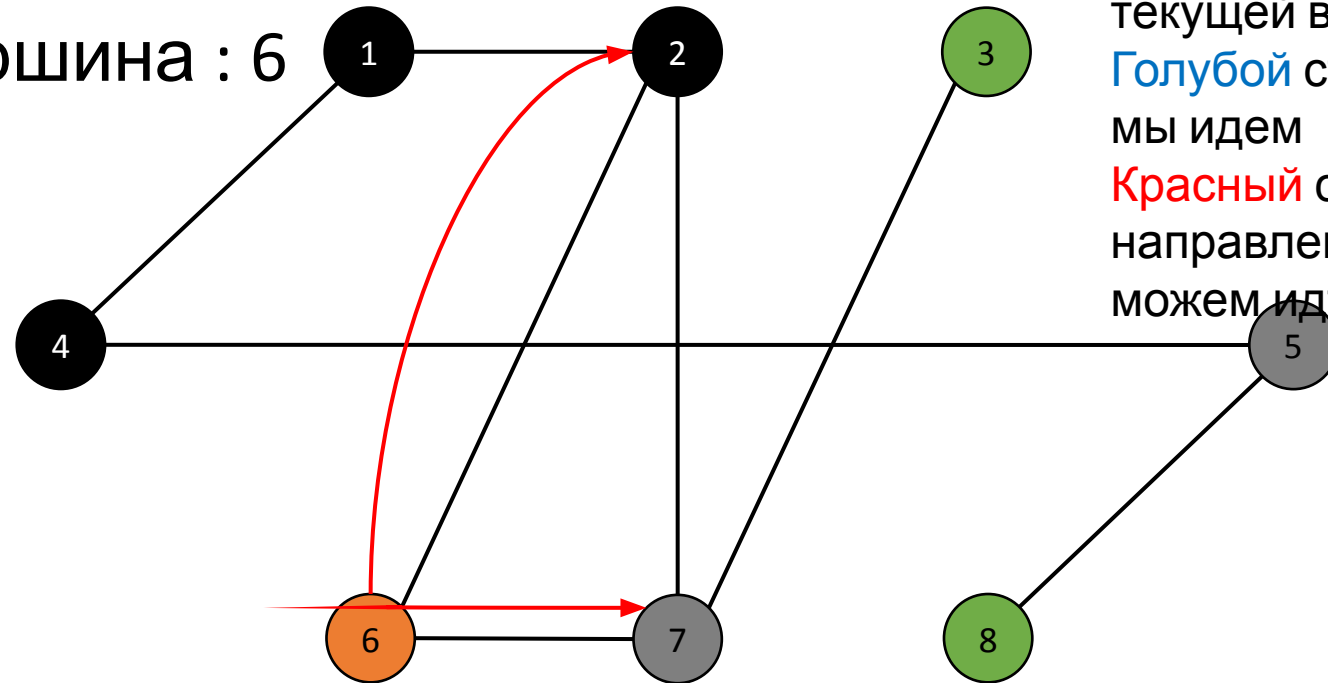
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6}

Очередь : {7, 5}

Текущая вершина : 6



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

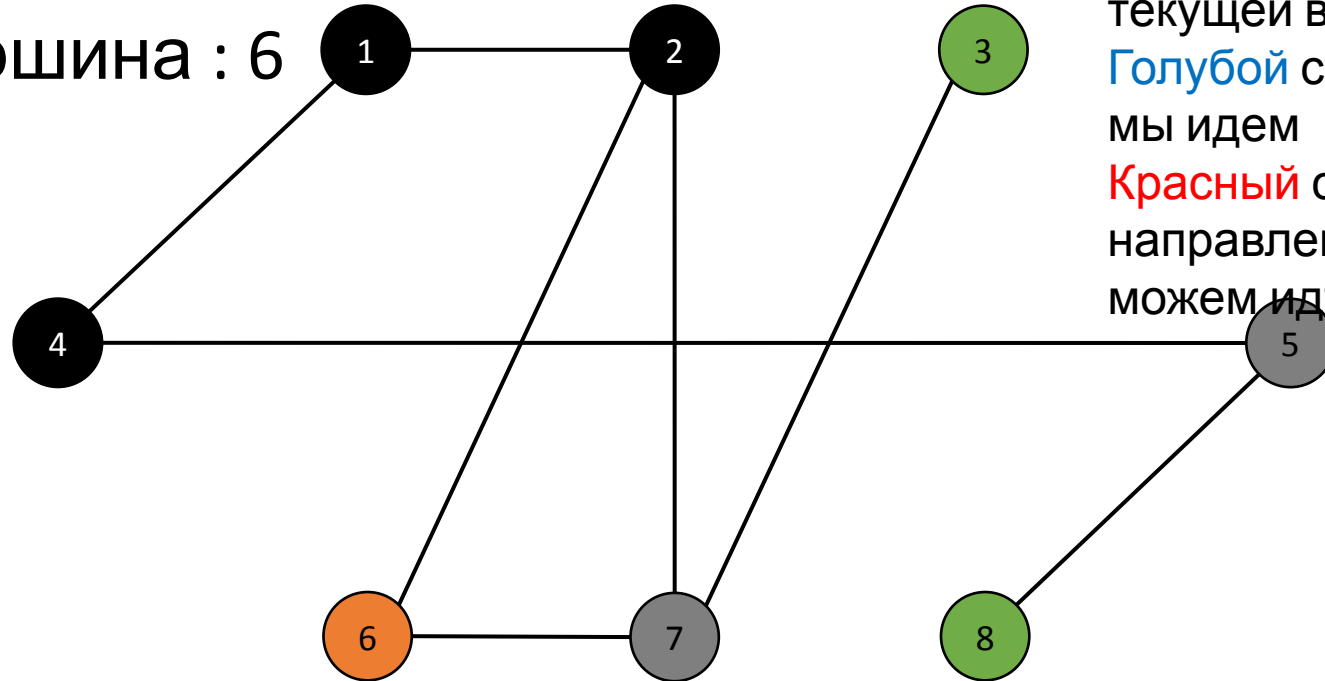
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6}

Очередь : {7, 5}

Текущая вершина : 6



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

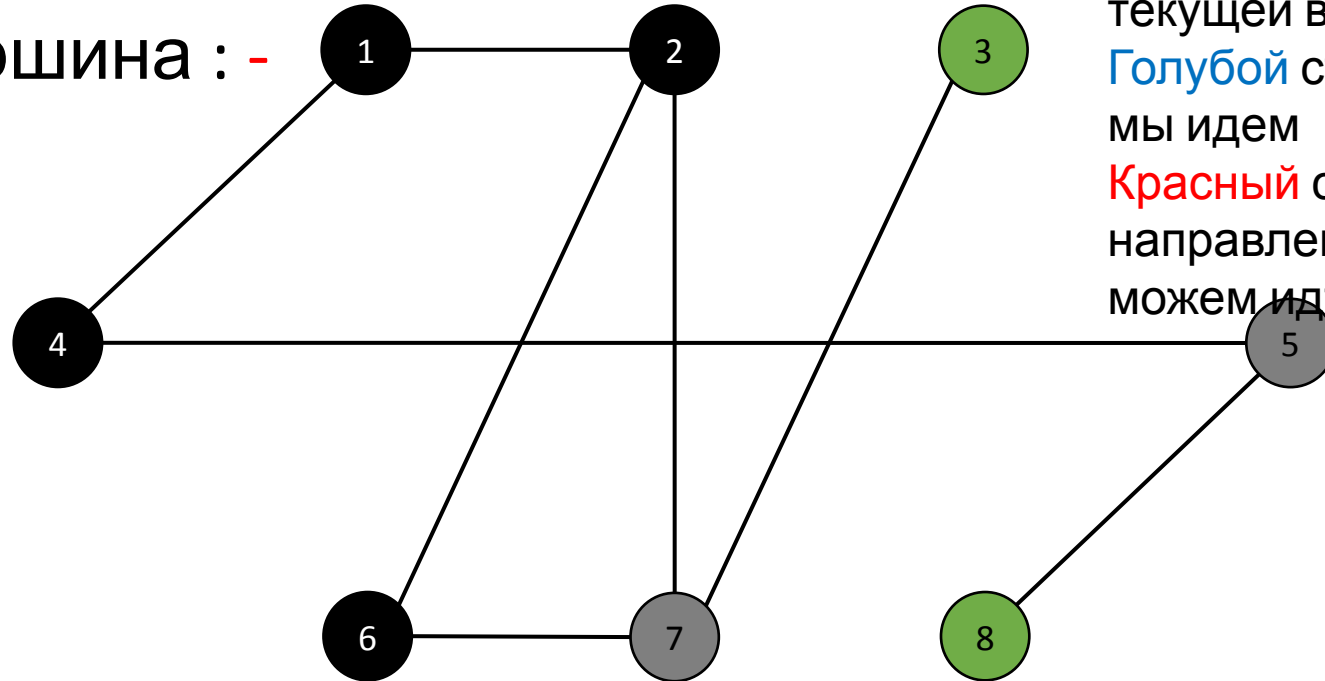
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6}

Очередь : {7, 5}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

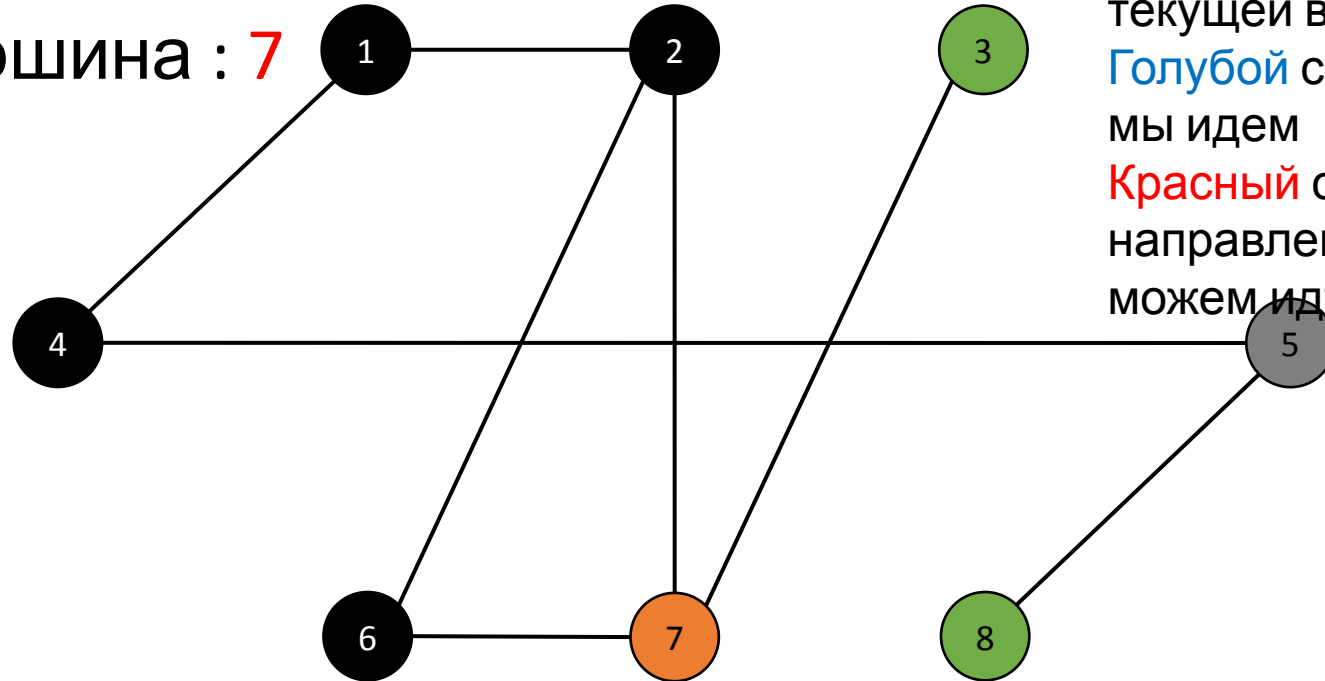
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7}

Очередь : {5}

Текущая вершина : 7



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

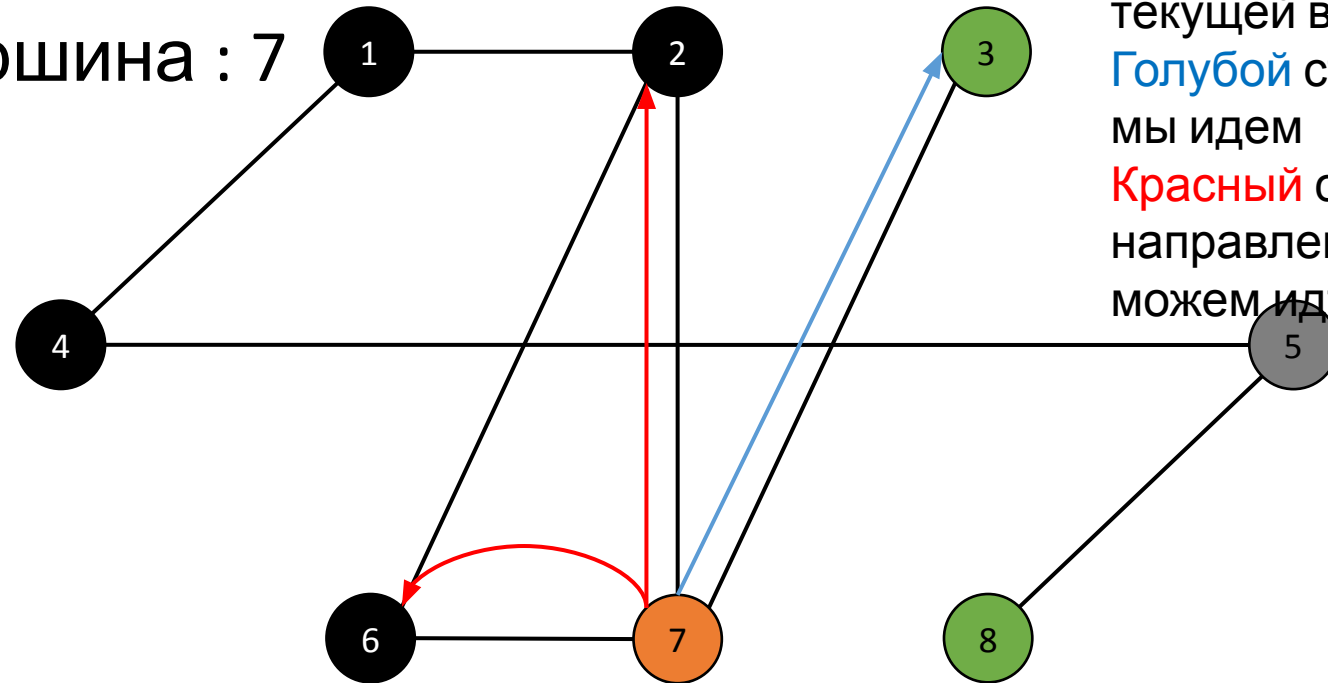
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7}

Очередь : {5}

Текущая вершина : 7



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

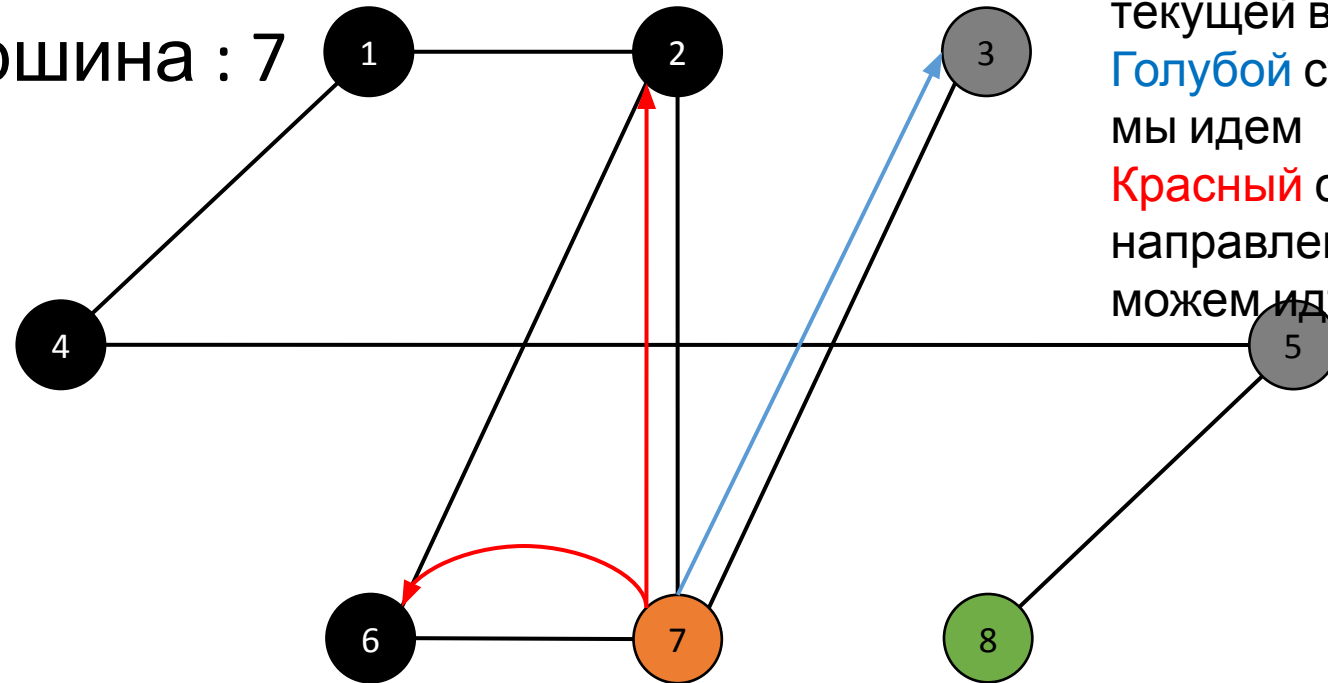


# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7}

Очередь : {5, 3}

Текущая вершина : 7



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

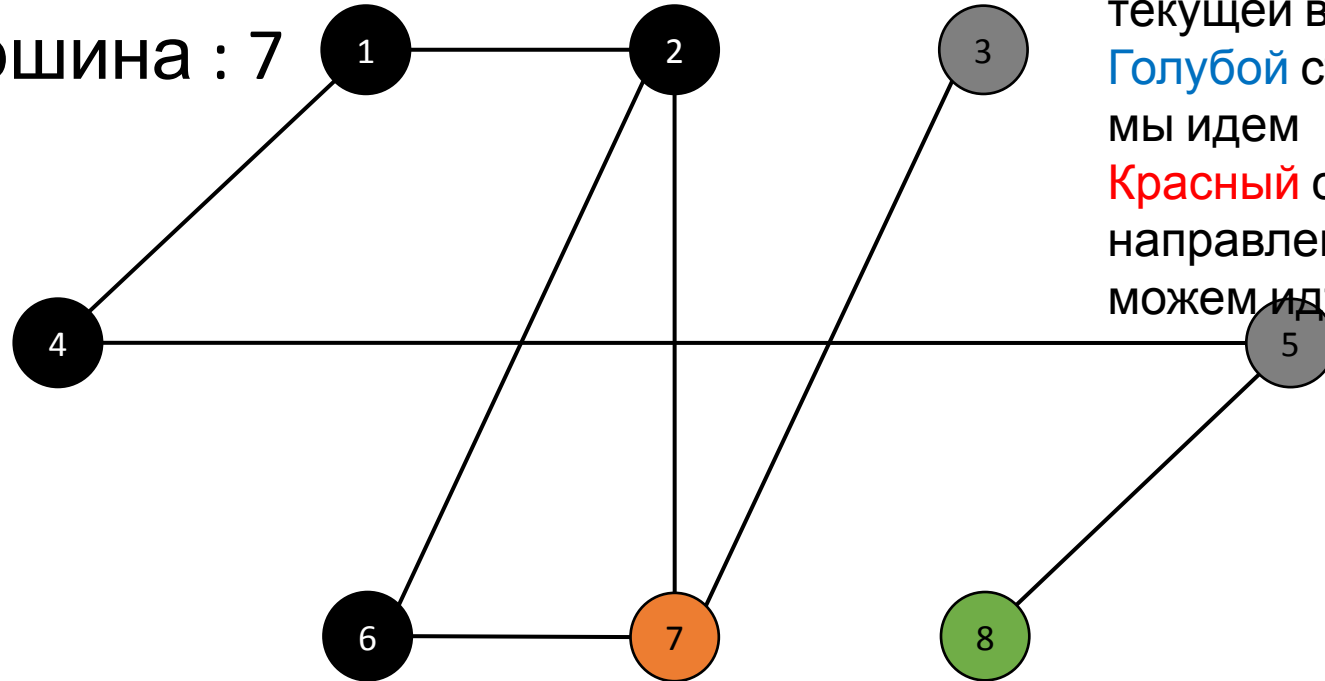
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7}

Очередь : {5, 3}

Текущая вершина : 7



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

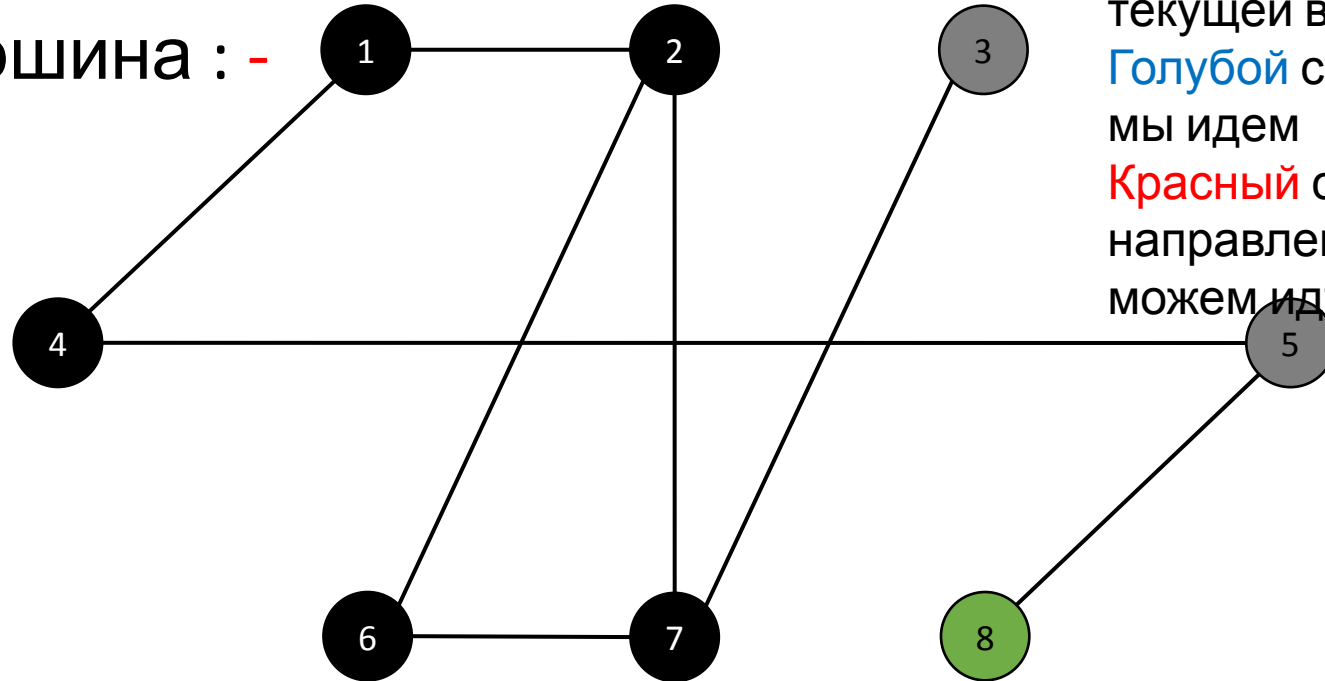
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7}

Очередь : {5, 3}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

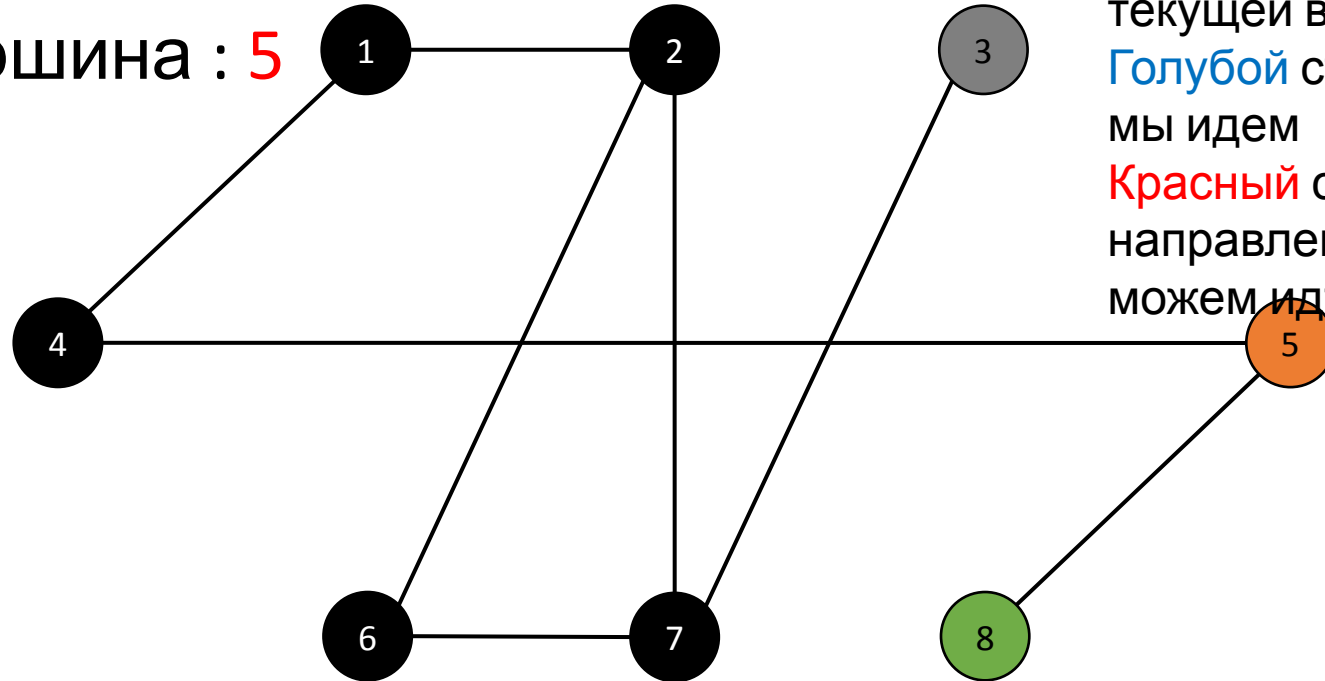
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5}

Очередь : {3}

Текущая вершина : 5



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

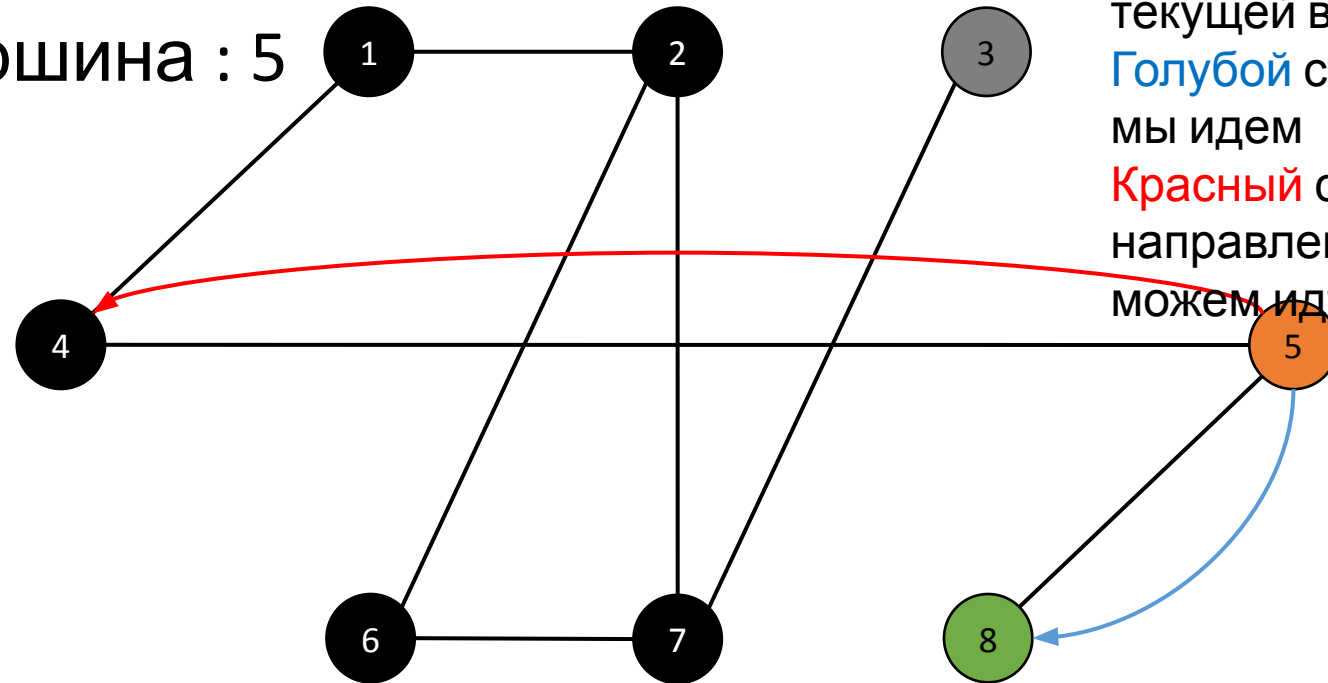
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5}

Очередь : {3}

Текущая вершина : 5



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

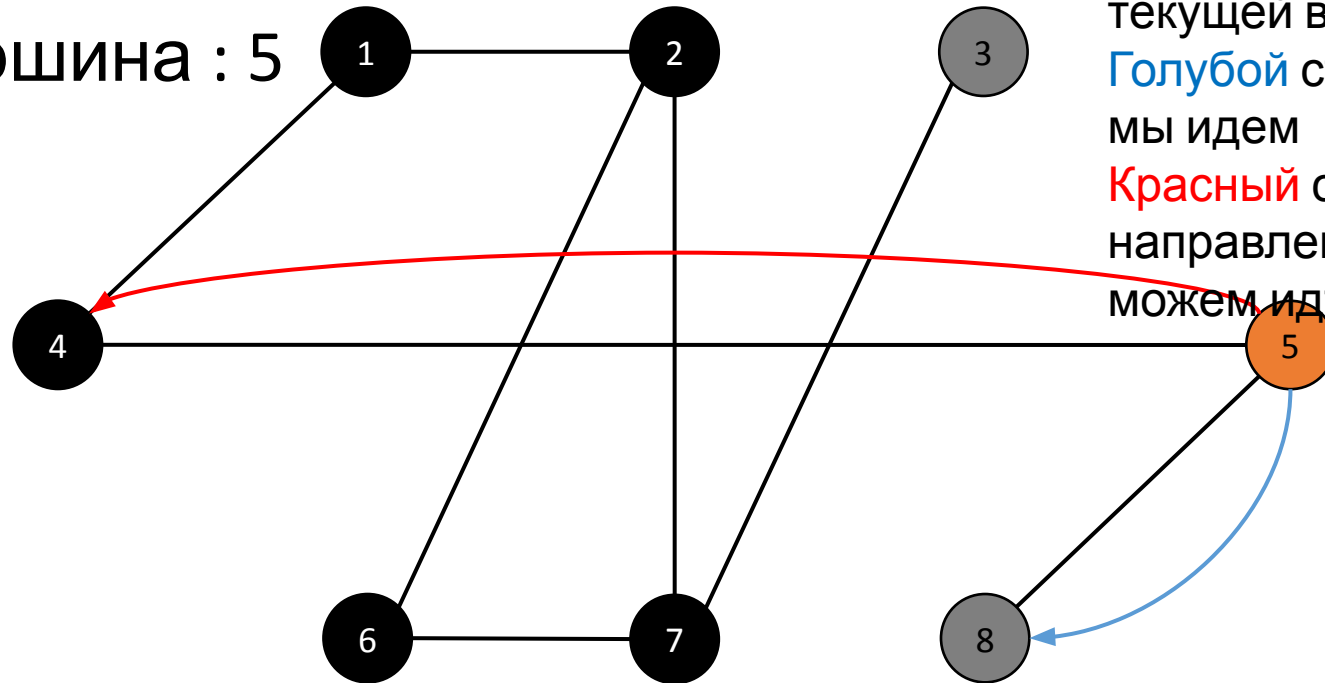
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5}

Очередь : {3, 8}

Текущая вершина : 5



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

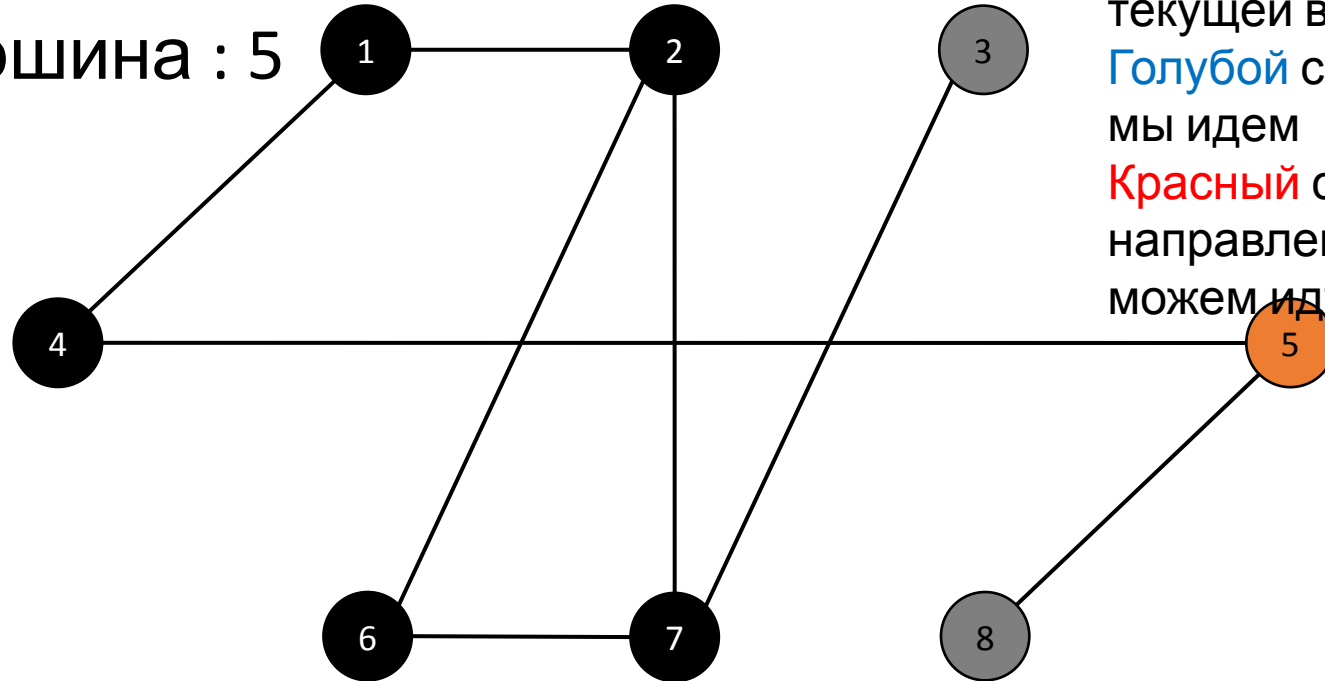
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5}

Очередь : {3, 8}

Текущая вершина : 5



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

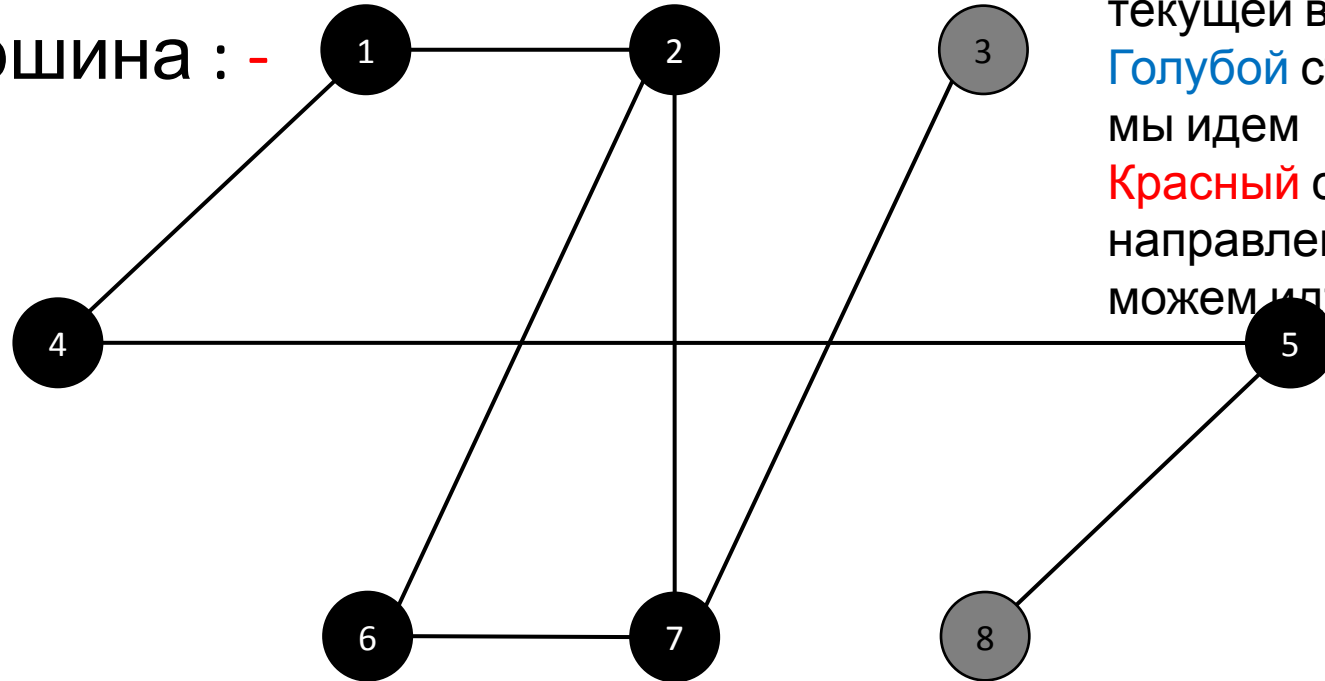
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5}

Очередь : {3, 8}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

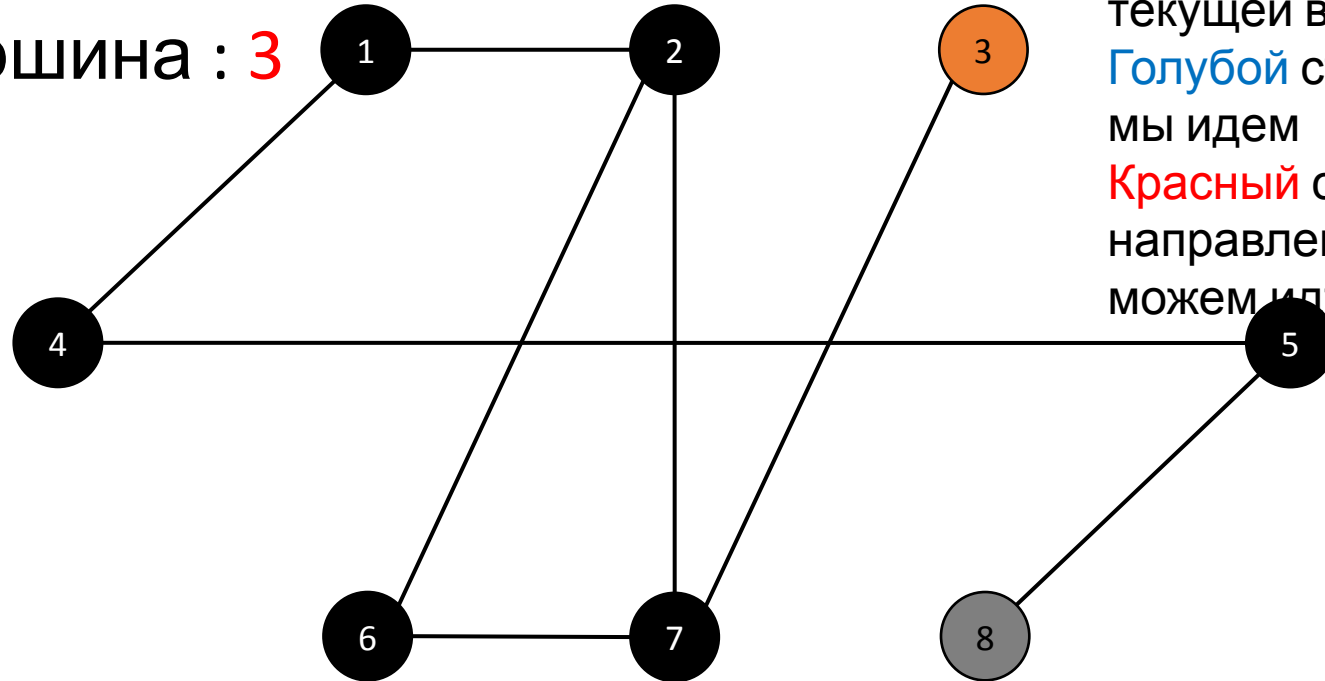


# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3}

Очередь : {8}

Текущая вершина : 3



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

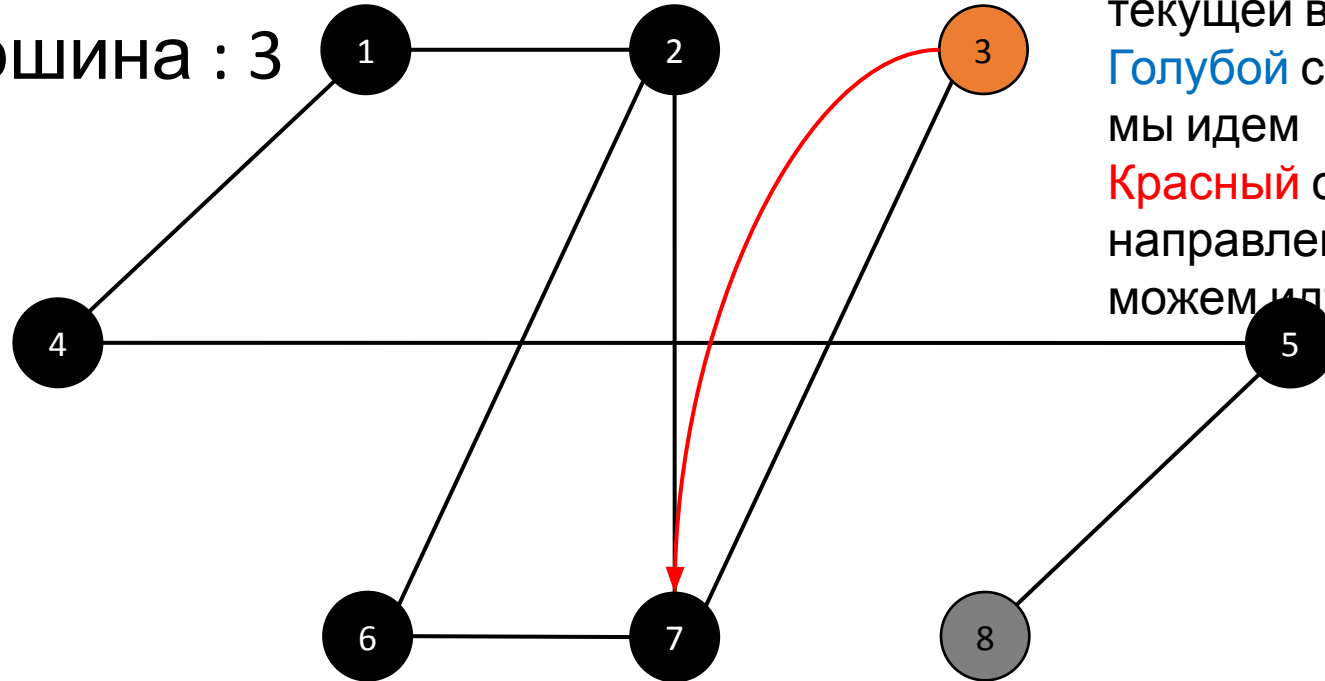
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3}

Очередь : {8}

Текущая вершина : 3



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

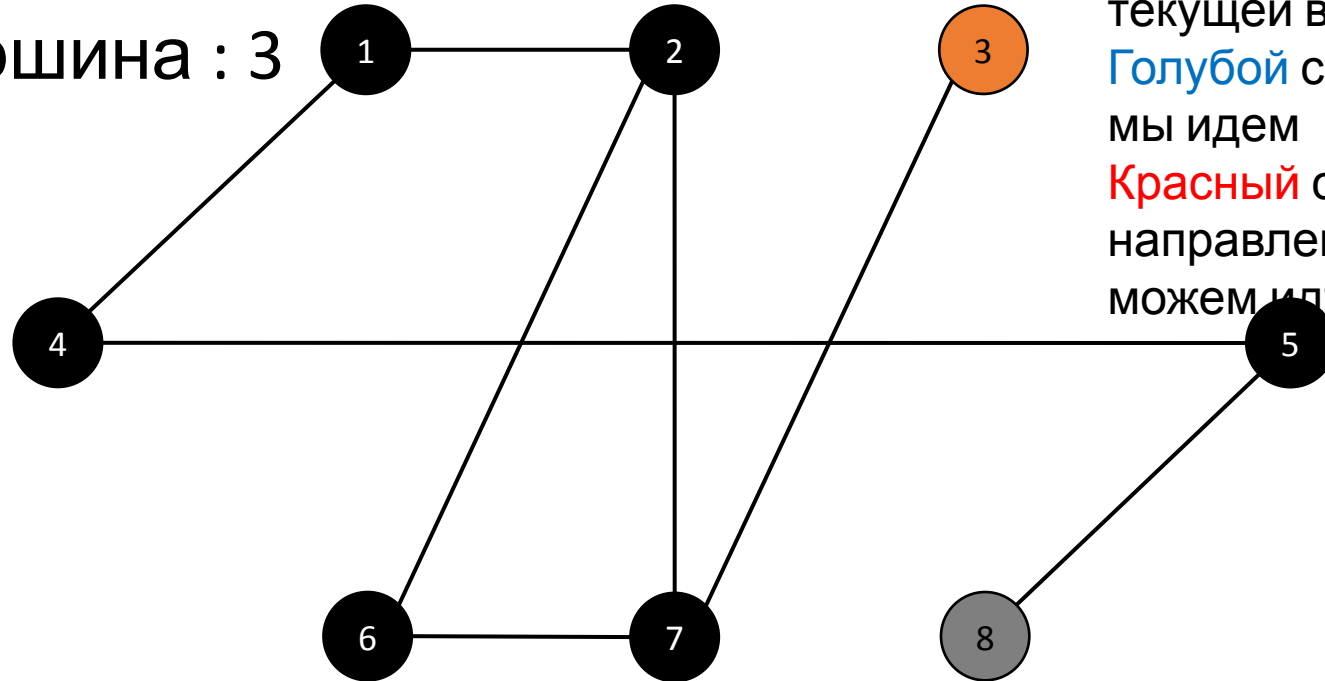
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3}

Очередь : {8}

Текущая вершина : 3



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

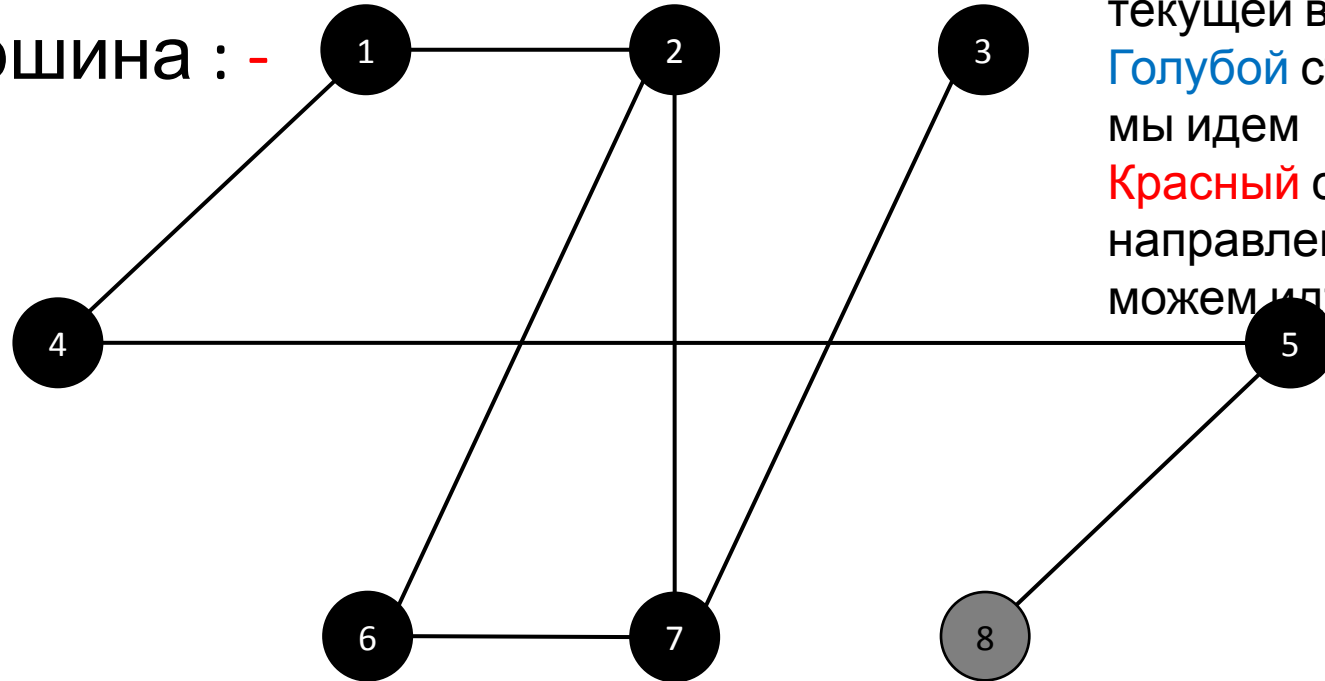
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3}

Очередь : {8}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

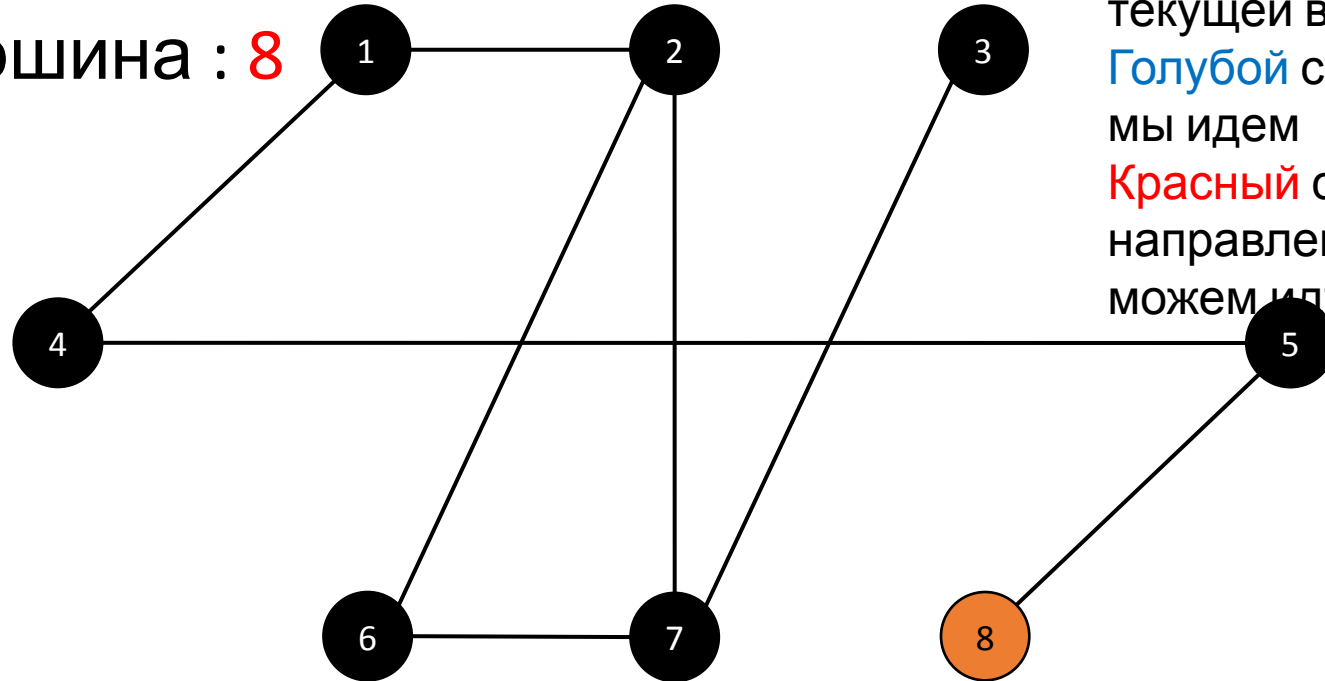
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3, 8}

Очередь : {}

Текущая вершина : 8



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

**Серый** вершины в очереди

**Черный** вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

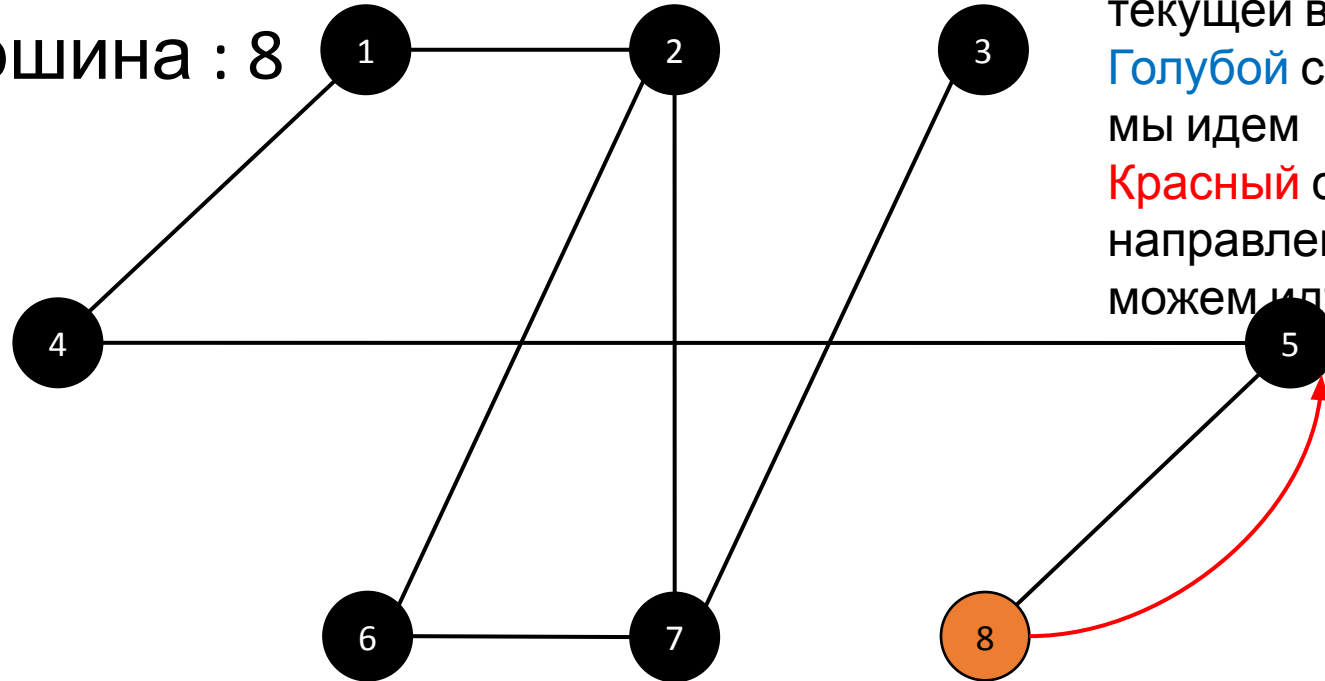
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3, 8}

Очередь : {}

Текущая вершина : 8



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

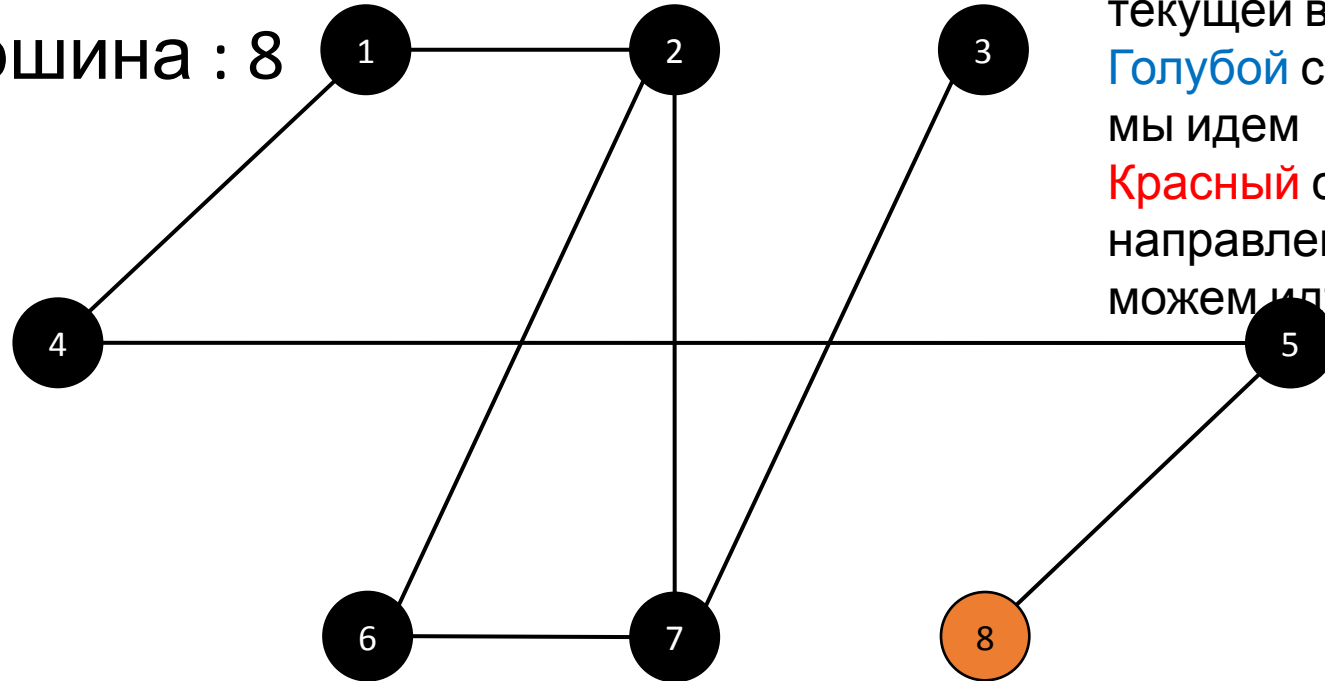
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3, 8}

Очередь : {}

Текущая вершина : 8



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

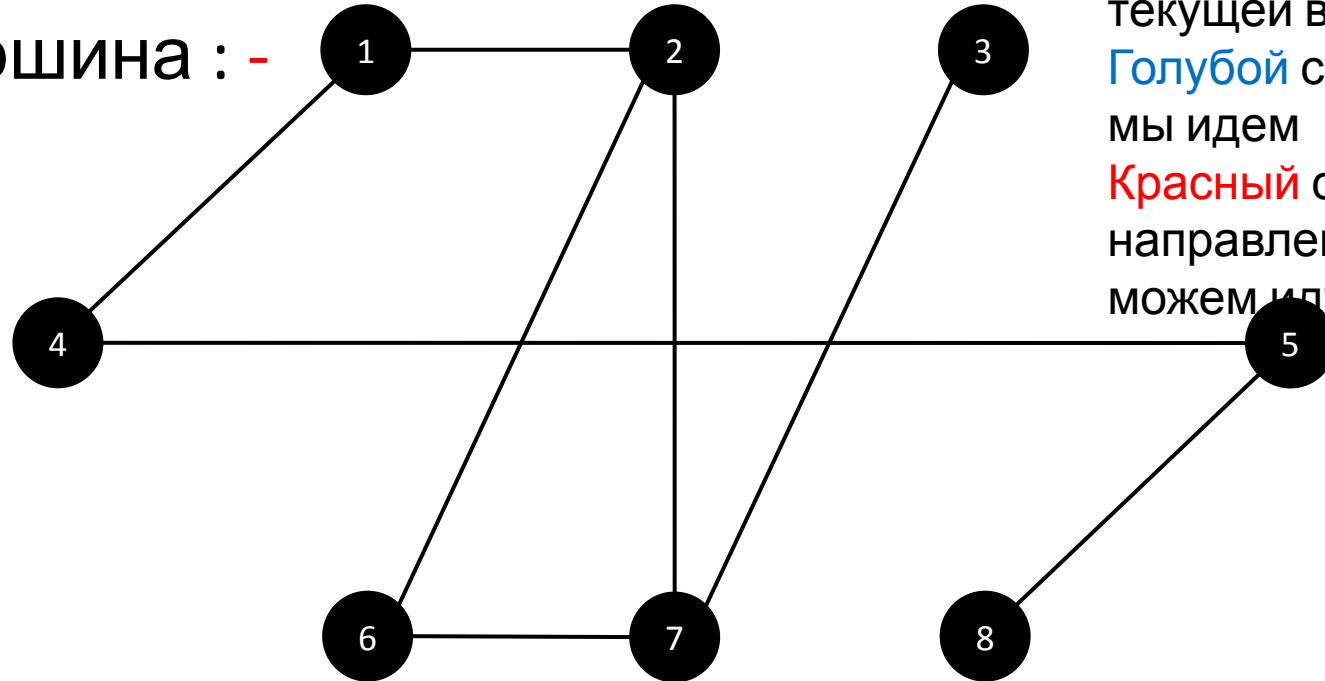
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3, 8}

Очередь : {}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

**Серый** вершины в очереди

**Черный** вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

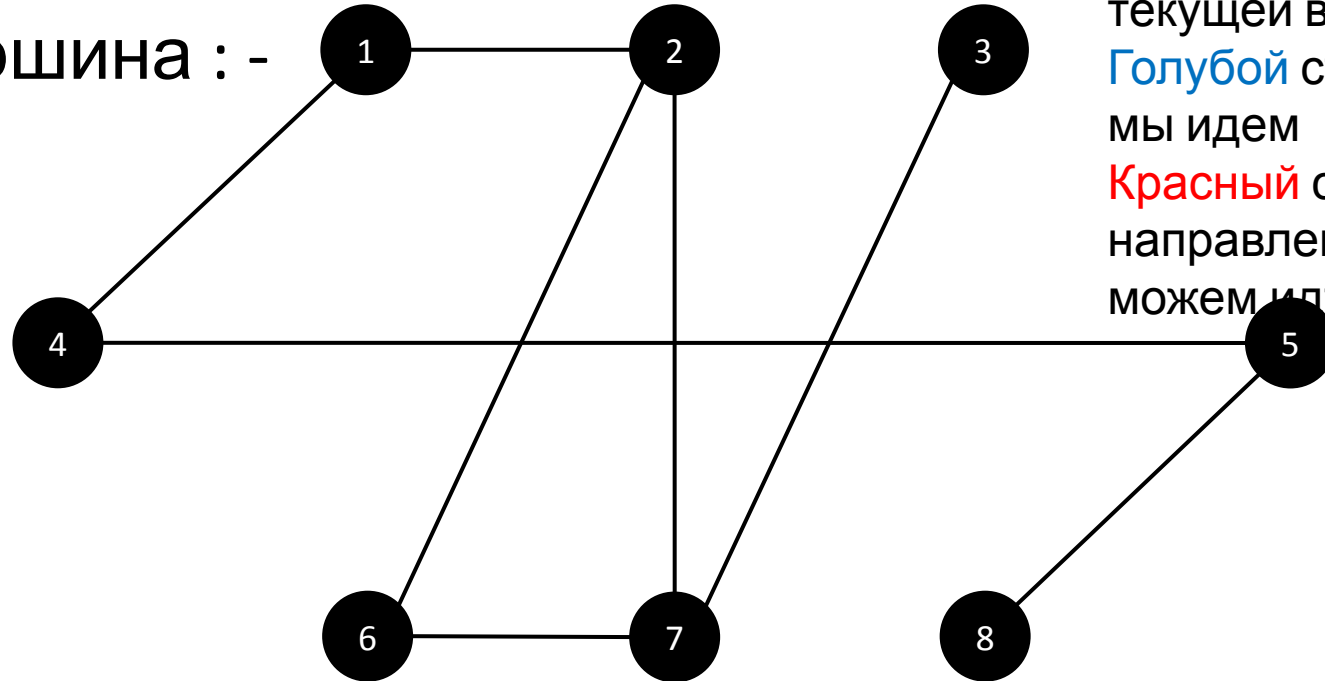


# Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3, 8}

Очередь : {}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

**Серый** вершины в очереди

**Черный** вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Breadth First Search (BFS)

- Сложность :

- BFS отмечает каждый узел, посещенный только один раз
- BFS проверить каждое ребро
- Также  $O(|V| + |E|)$  если мы используем список соединений
- И  $O(|V|^2)$  если мы используем матрицу смежности (потому что нам нужно найти каждое ребро, поэтому нужно перебрать всю матрицу).

Depth First Search (DFS)

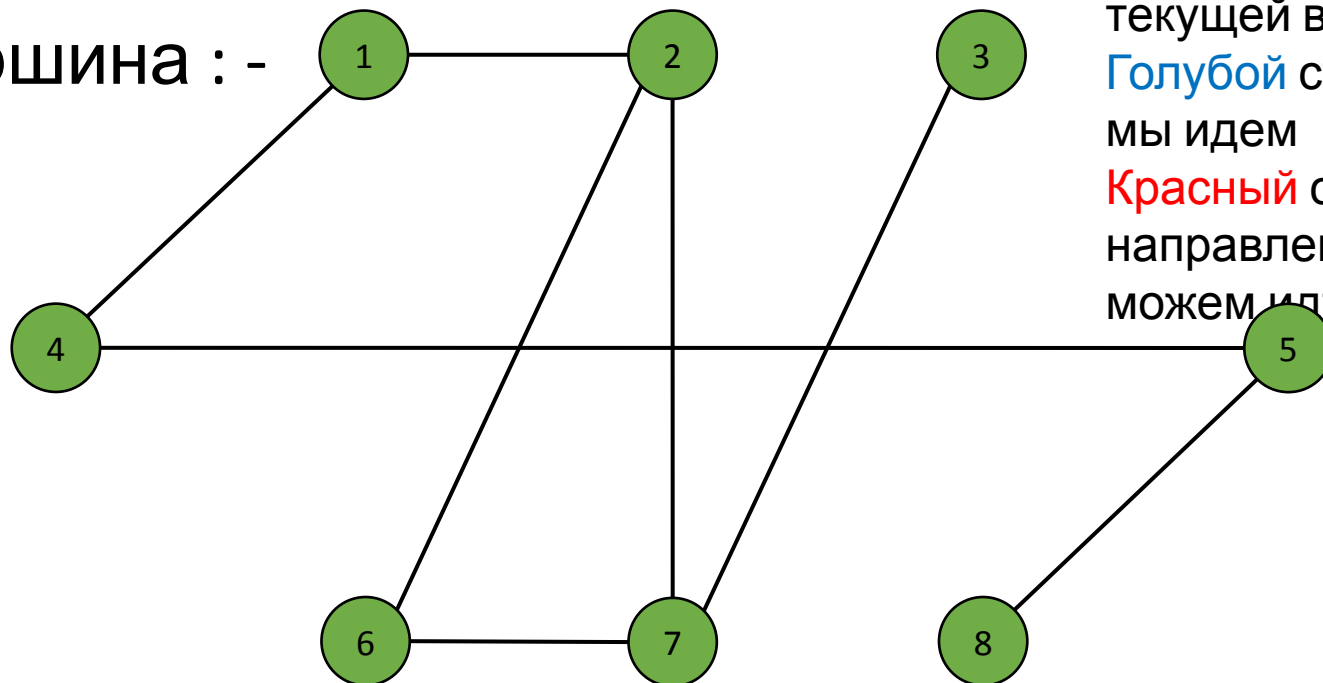
Поиск в глубину

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : { }

Стек: { }

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

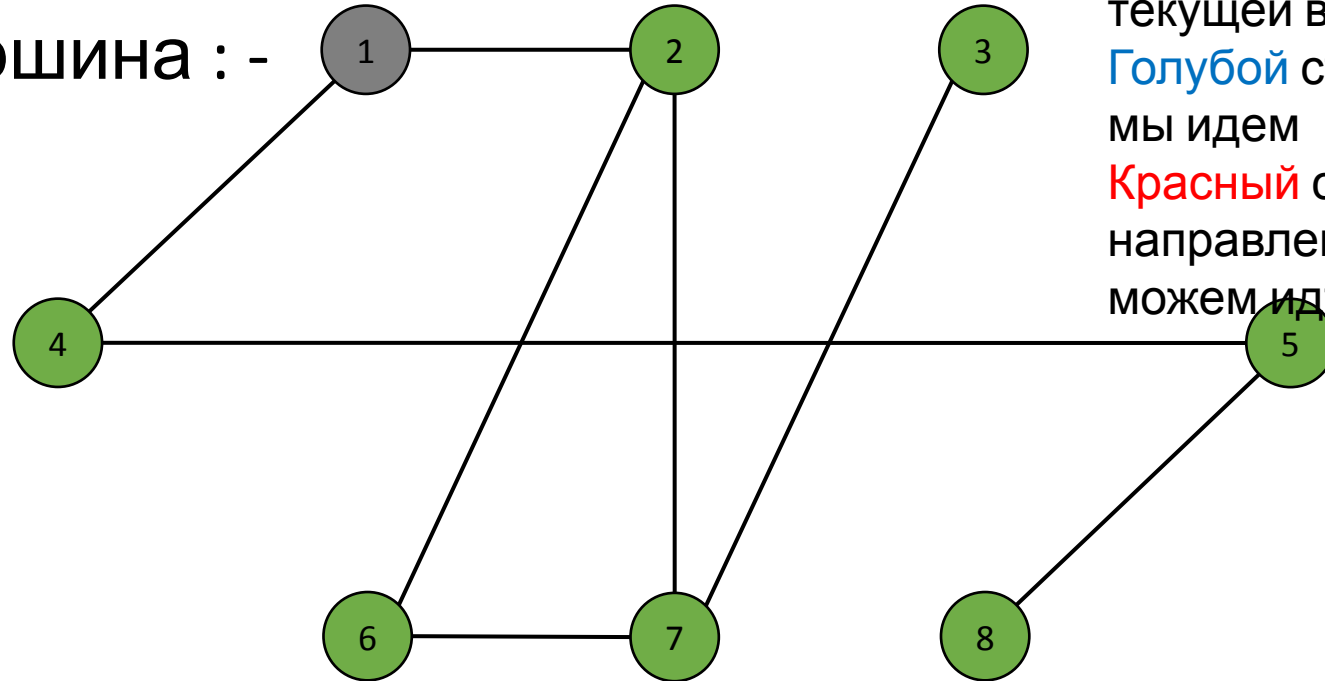
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : { }

Стек : {1}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

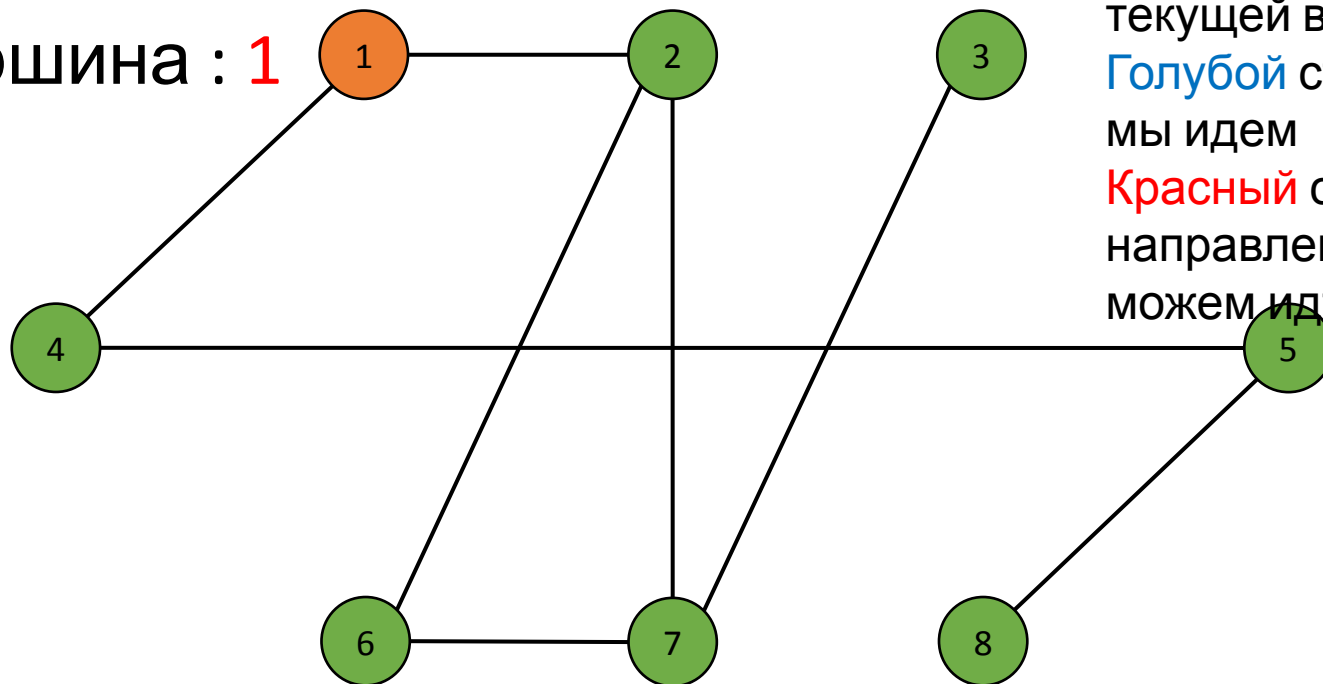
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1}

Стек : {}

Текущая вершина : 1



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

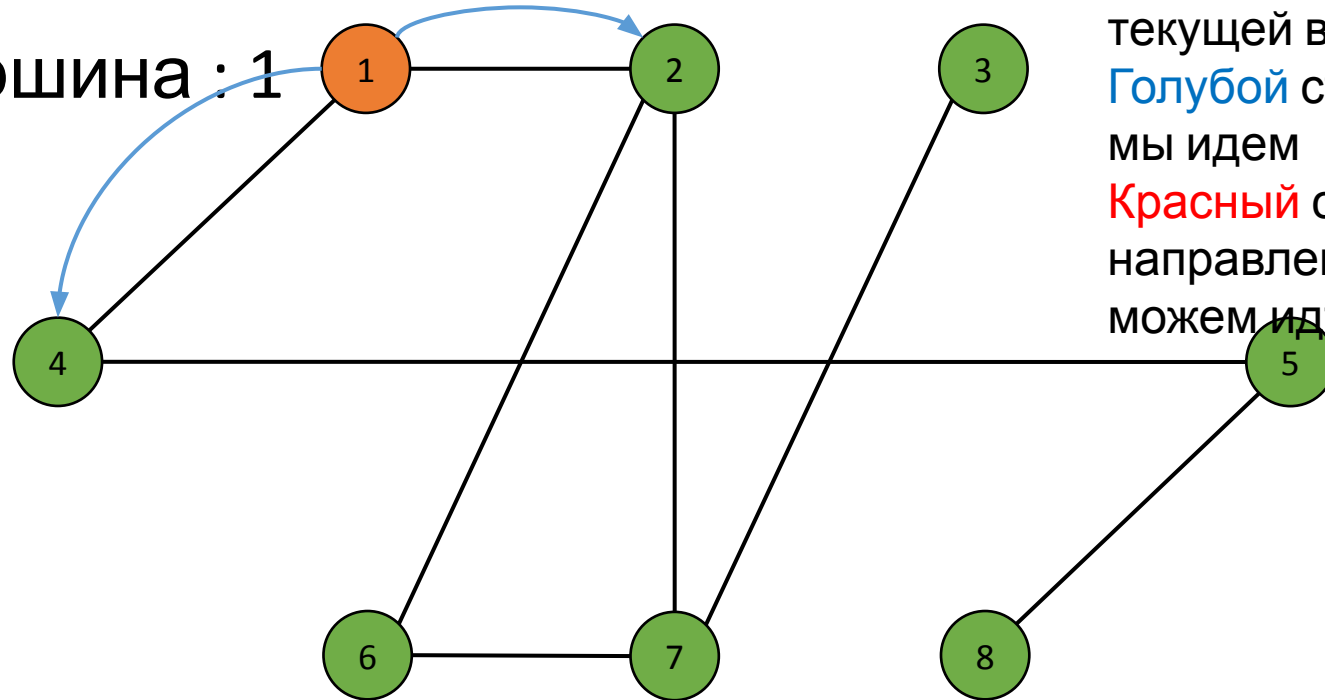
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1}

Стек : {}

Текущая вершина : 1



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти



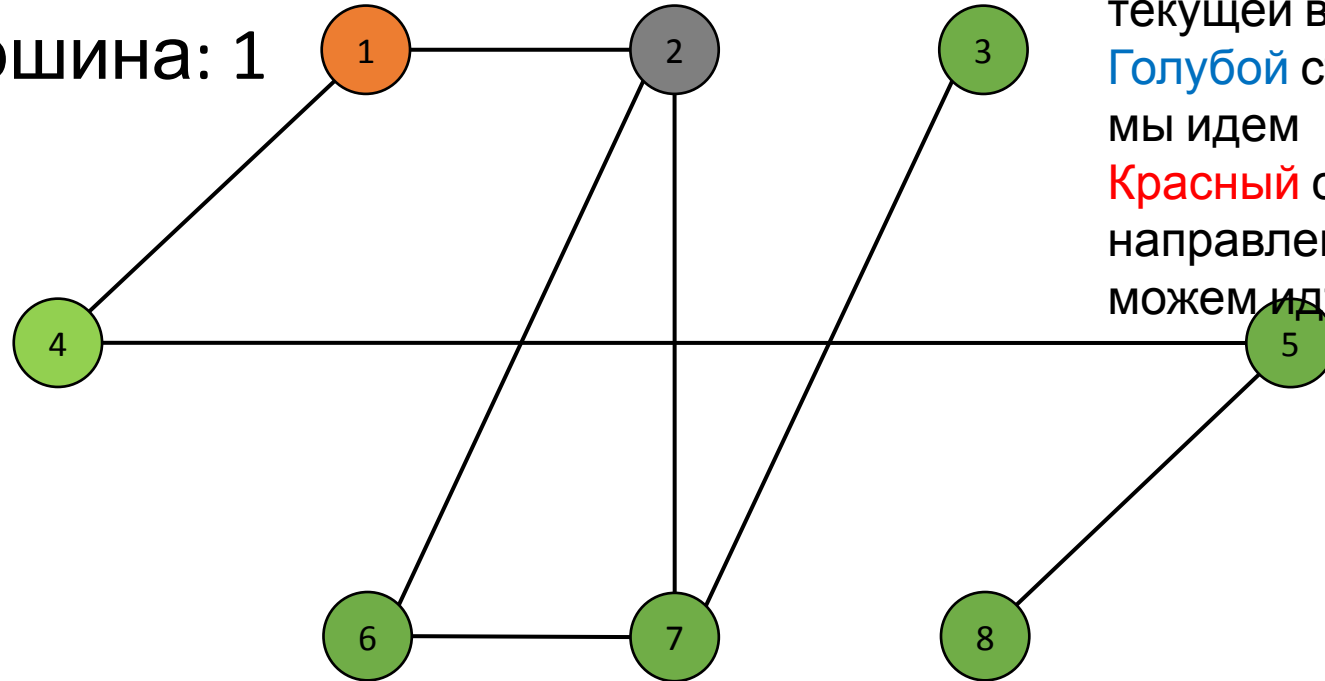


# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1}

Стек : {2, 4}

Текущая вершина: 1



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

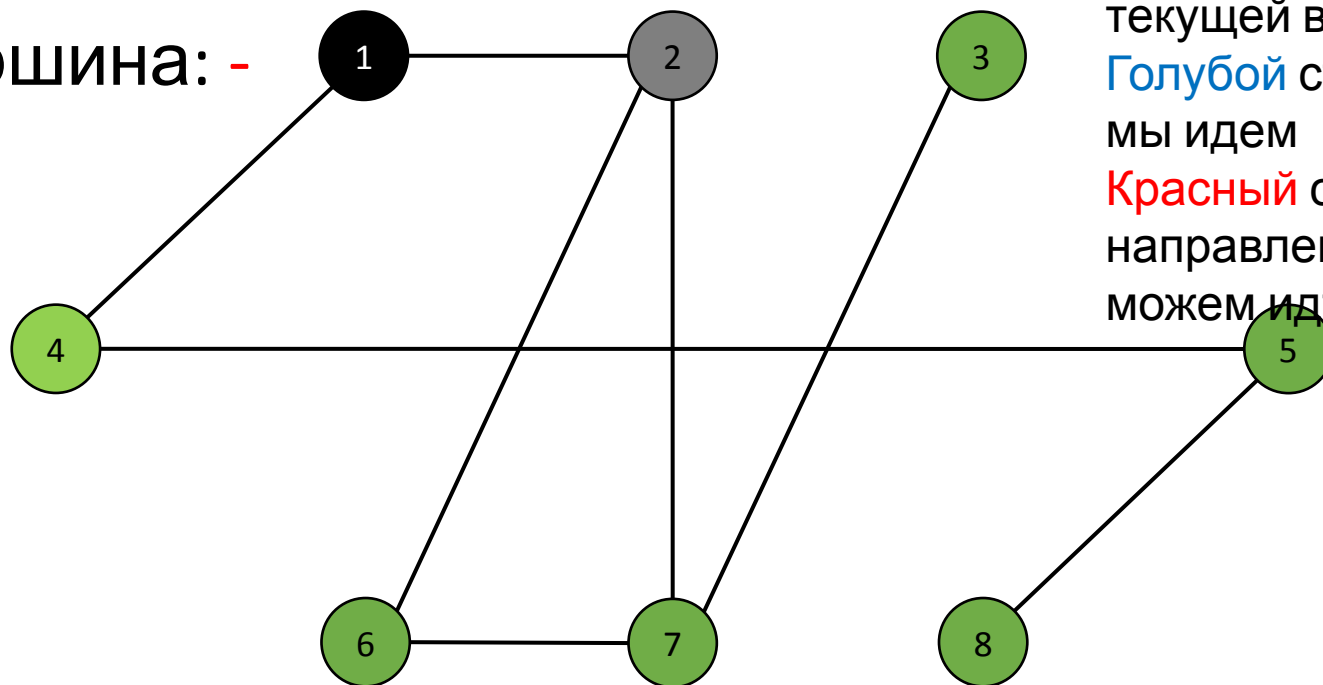
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1}

Стек : {2, 4}

Текущая вершина: -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

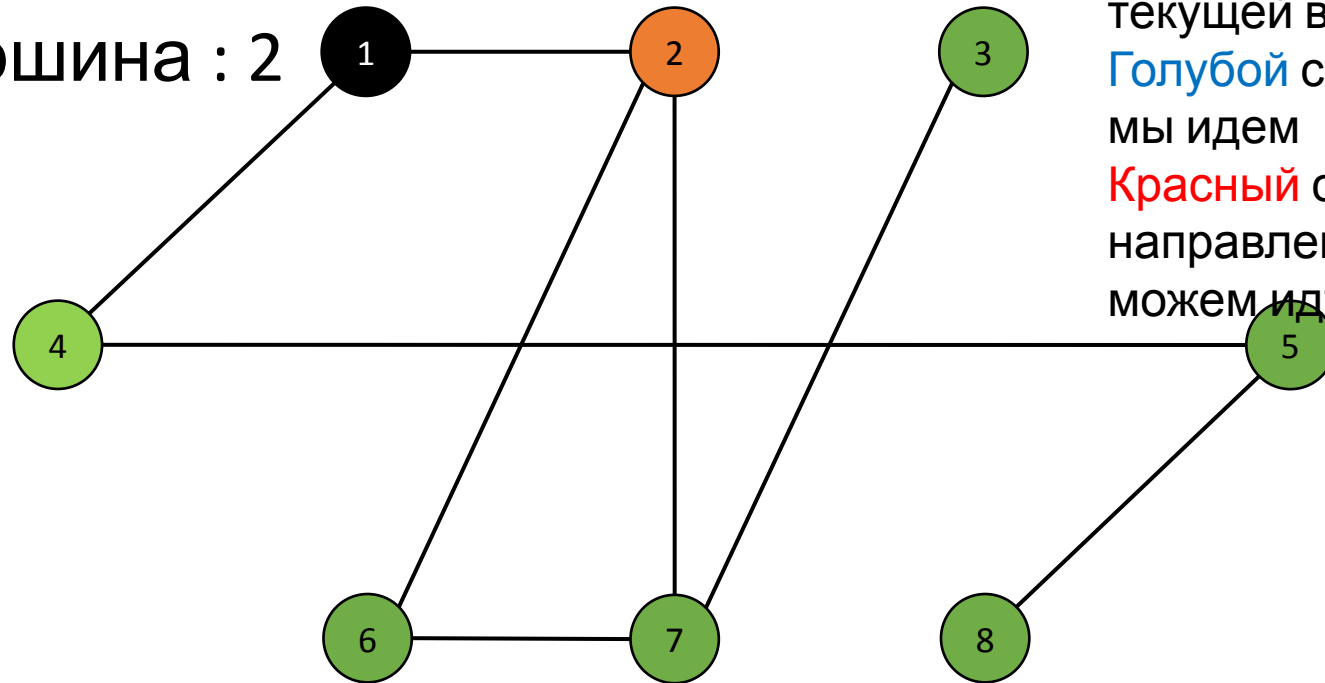
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Стек : {4}

Текущая вершина : 2



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

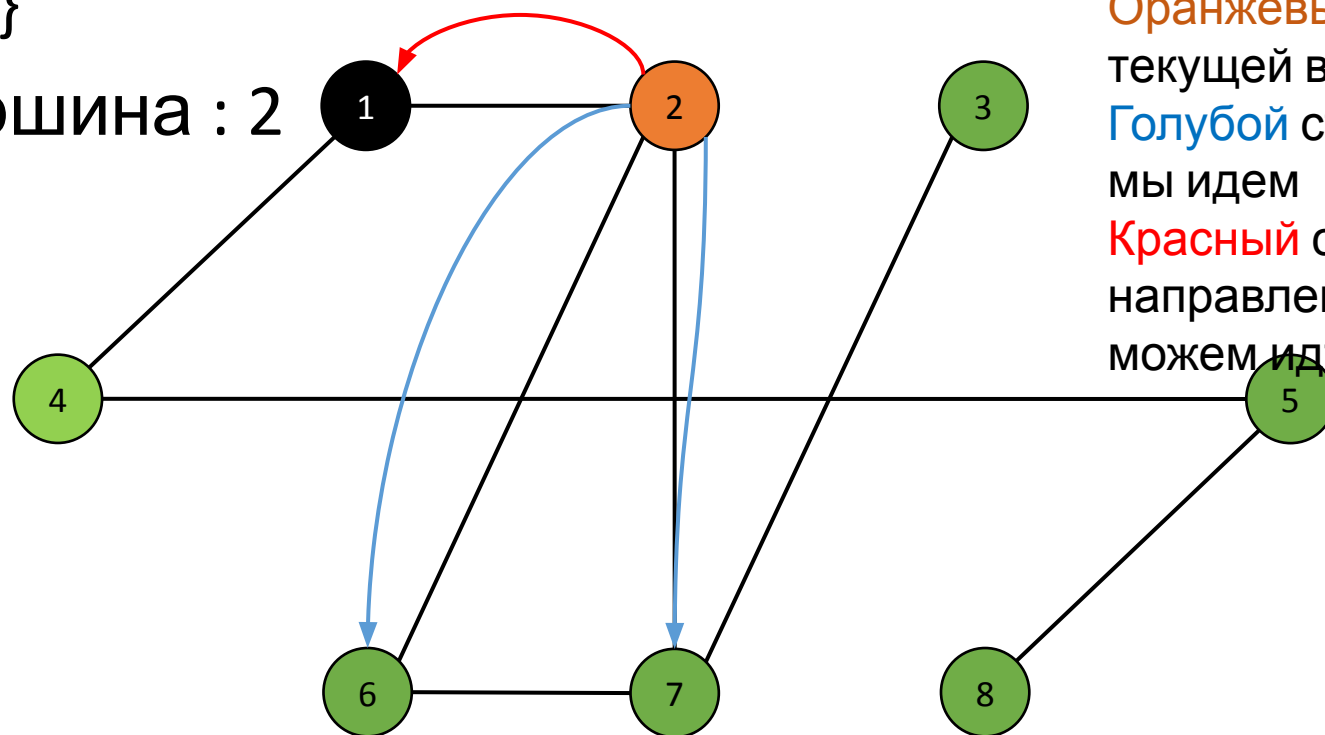
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Стек : {6, 7, 4}

Текущая вершина : 2



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

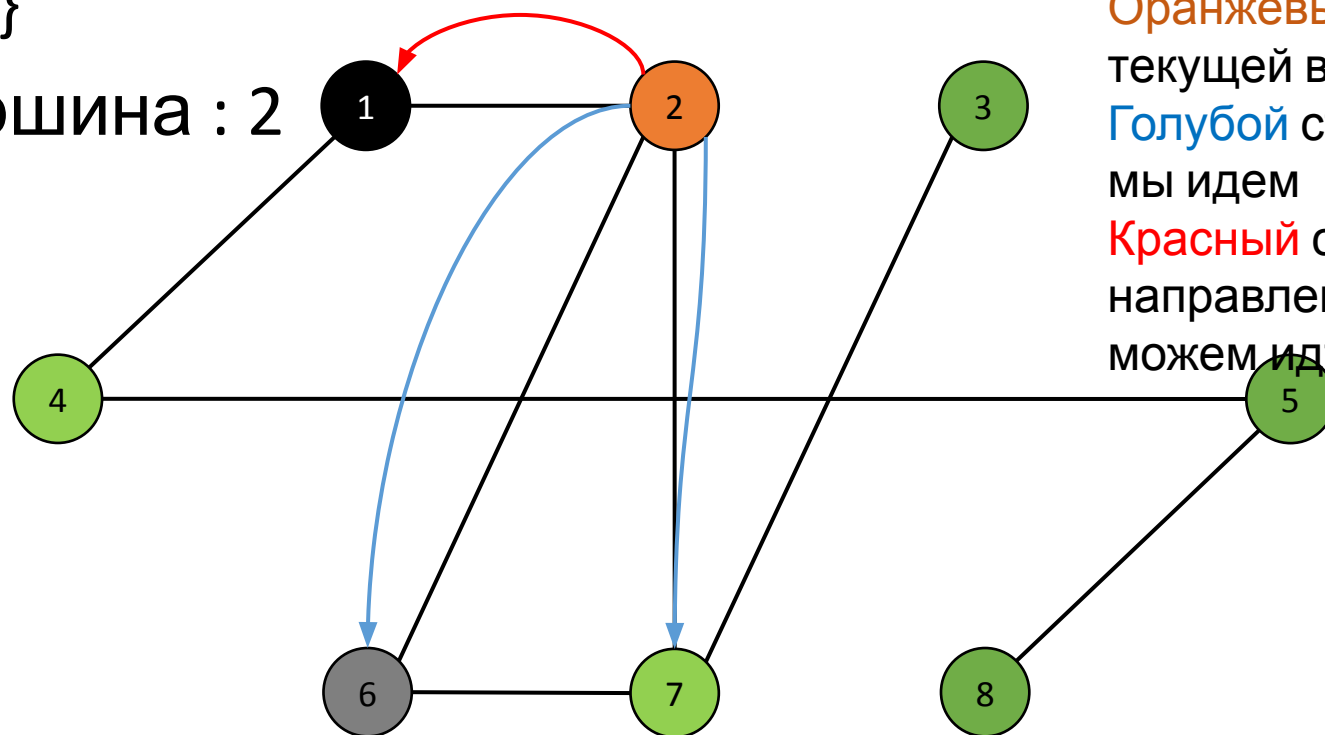
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Стек : {6, 7, 4}

Текущая вершина : 2



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

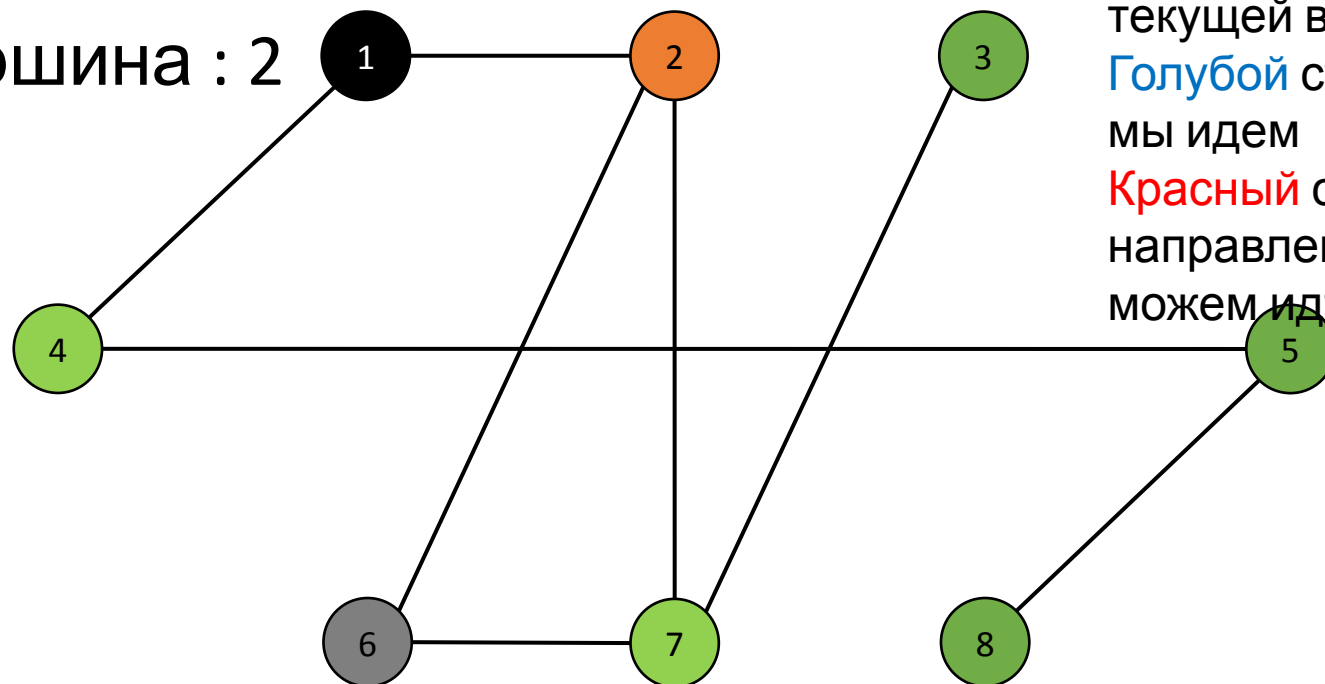
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Стек : {6, 7, 4}

Текущая вершина : 2



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

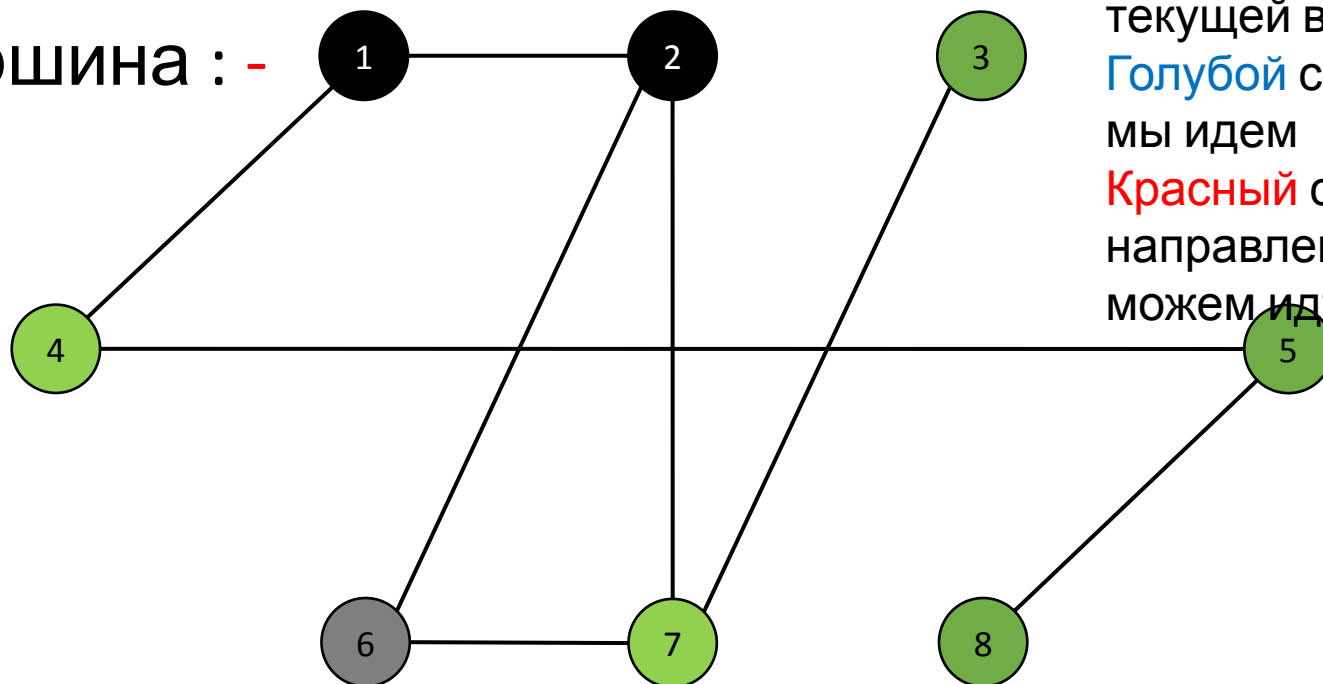
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Стек : {6, 7, 4}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

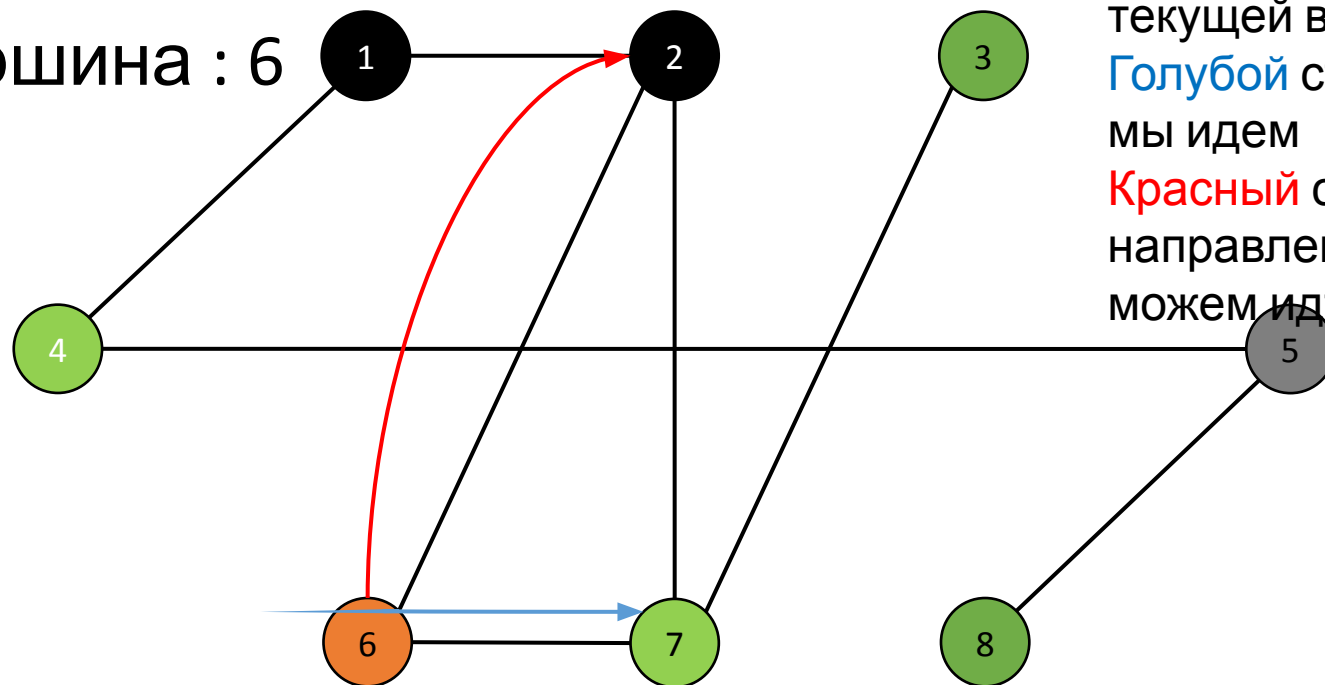
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 6}

Стек : {7, 4}

Текущая вершина : 6



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

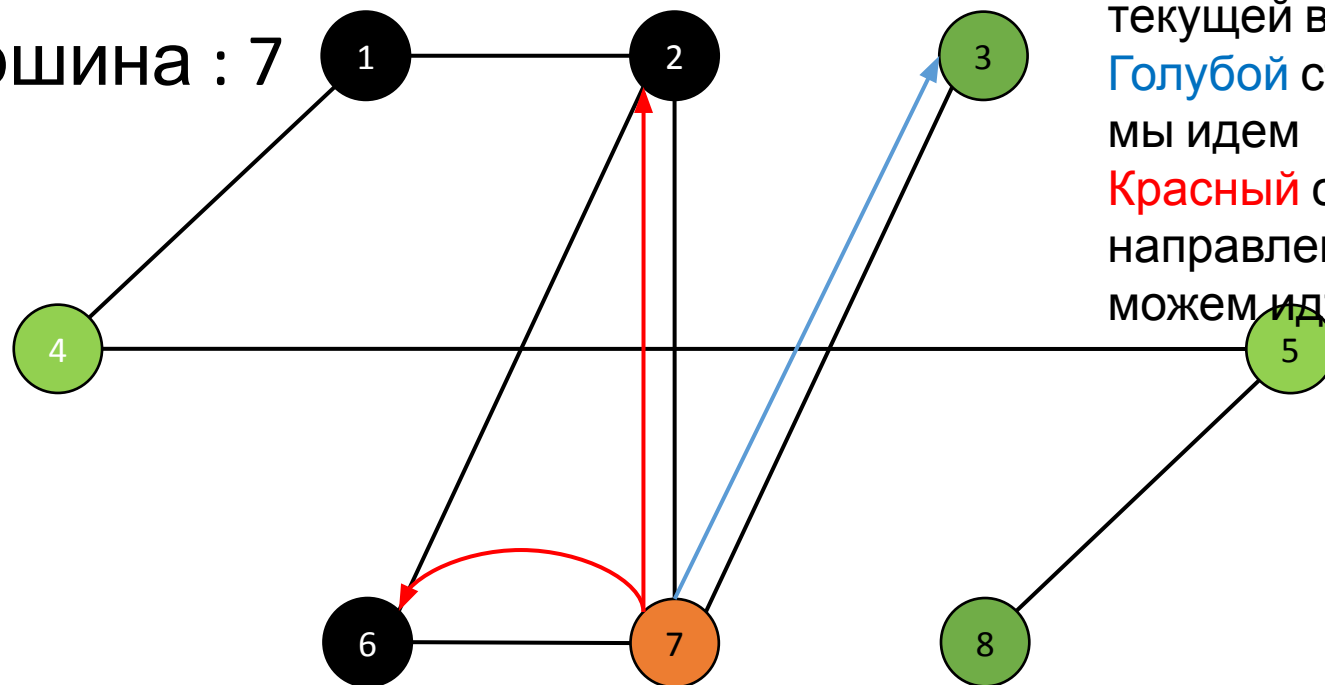


# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 6, 7}

Стек : {3, 4}

Текущая вершина : 7



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

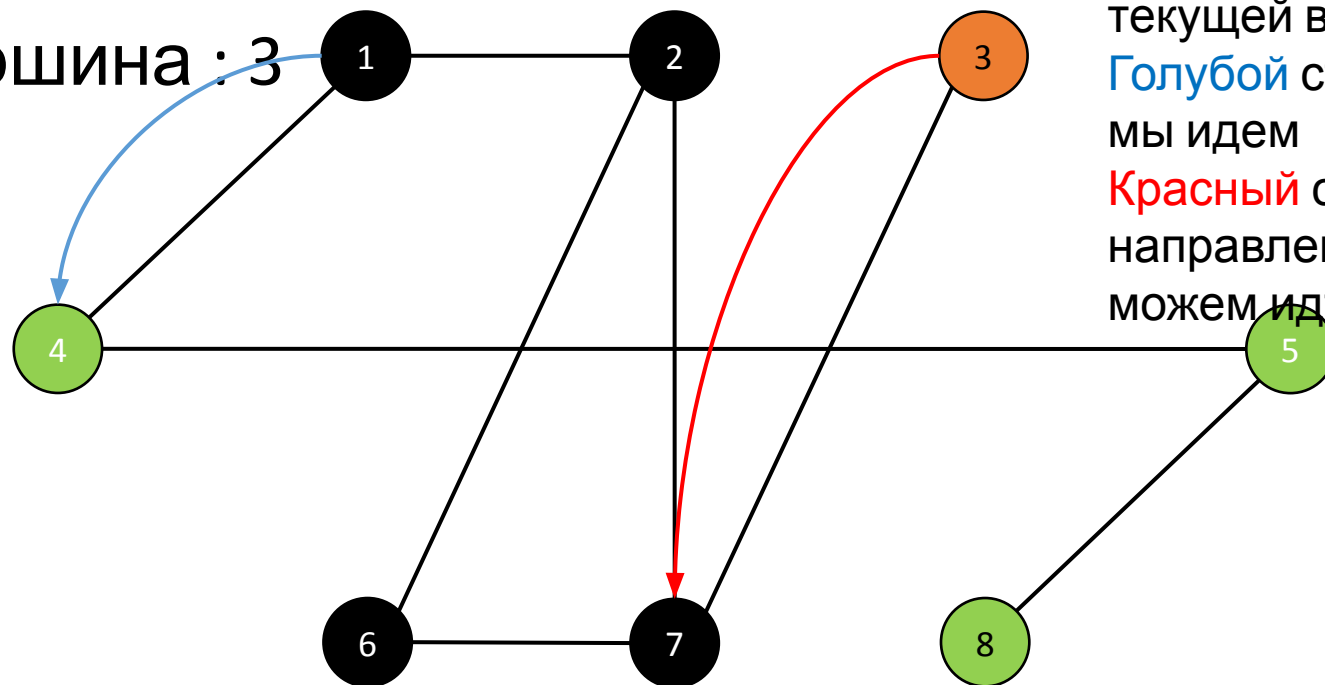
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 6, 7, 3}

Стек : {4}

Текущая вершина : 3



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

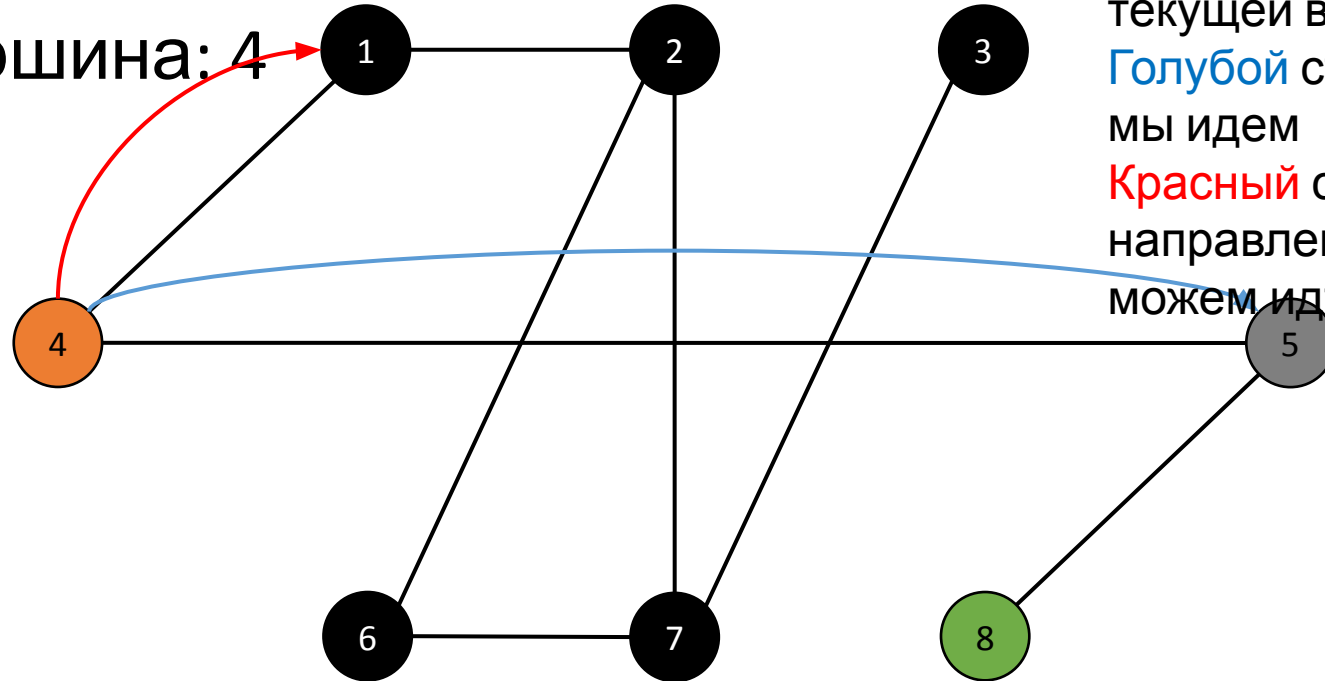
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 6, 7, 3, 4}

Стек : {5}

Текущая вершина: 4



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

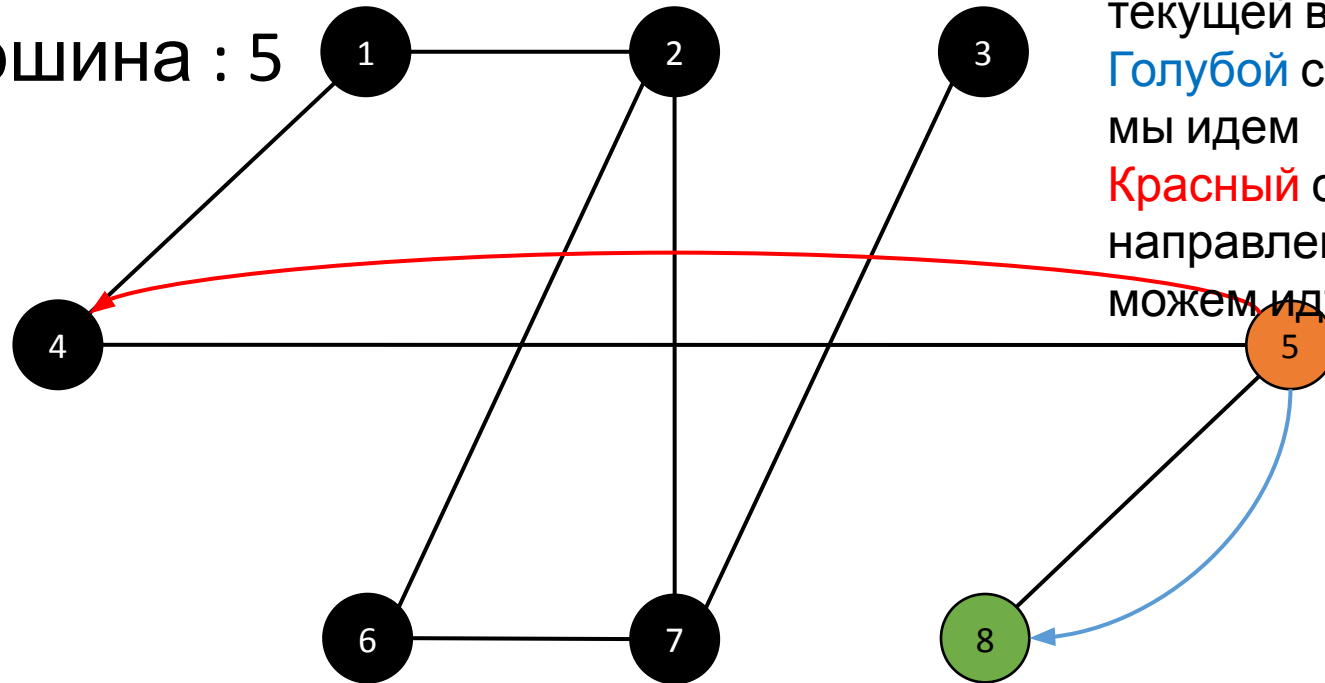
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 6, 7, 3, 4, 5}

Стек : {8}

Текущая вершина : 5



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

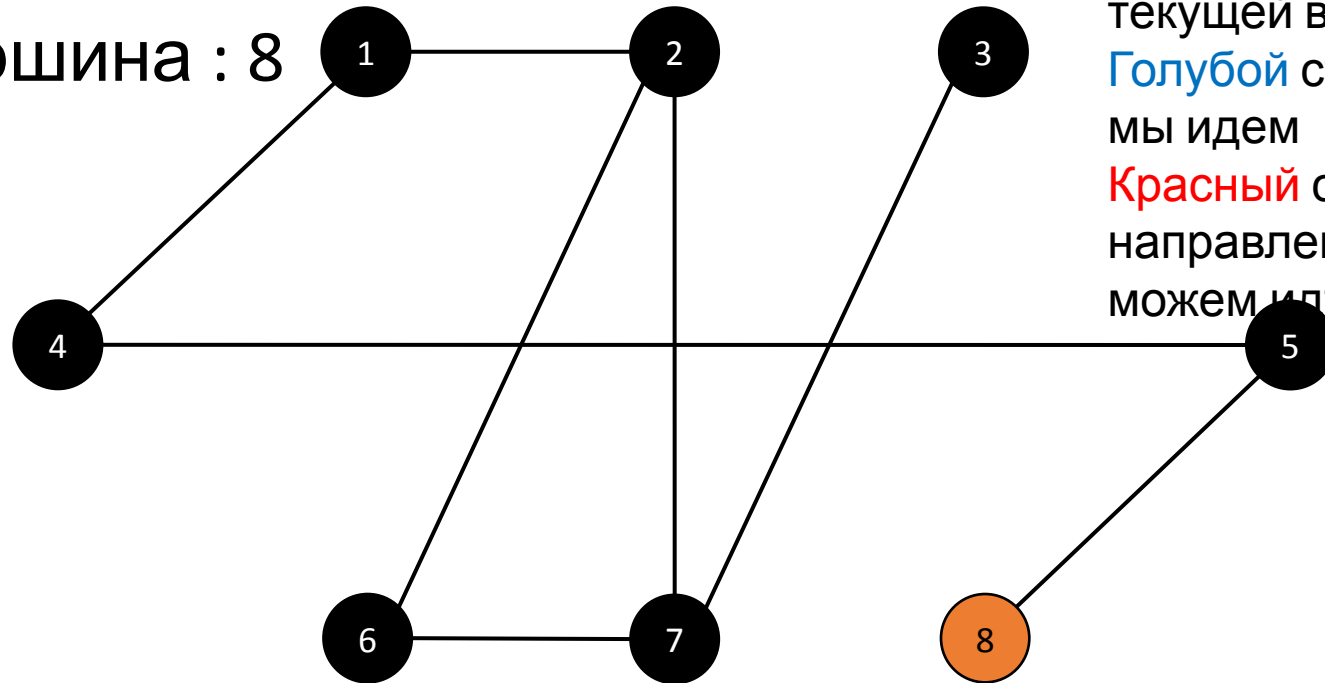
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 6, 7, 3, 4, 5}

Стек : {}

Текущая вершина : 8



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

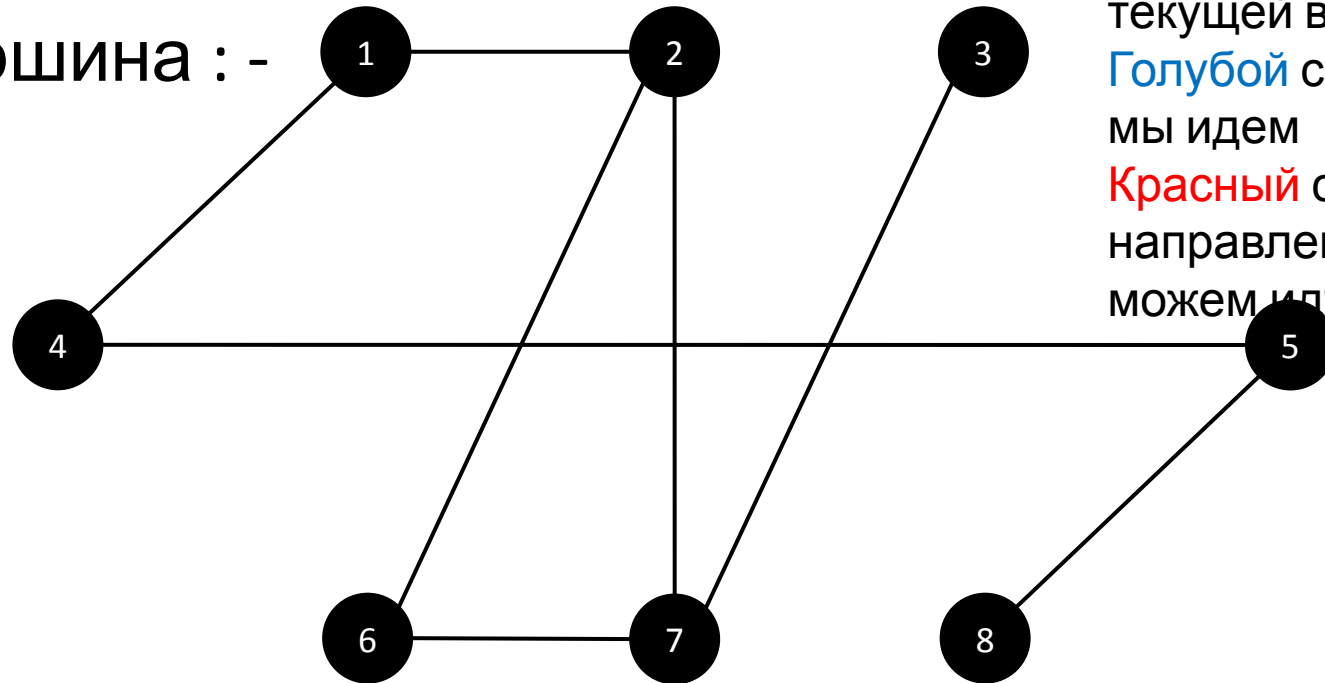
**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 6, 7, 3, 4, 5, 8}

Очередь : {}

Текущая вершина : -



Легенда:

**Зеленый** вершины не посещены

**Серый** вершины в очереди

**Черный** вершины посещаются

**Оранжевый** вершина является текущей вершиной

**Голубой** стрелки пути по которому мы идем

**Красный** стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

# Depth First Search (DFS)

- Сложность :

- BFS отмечает каждый узел, посещенный только один раз
- BFS проверить каждое ребро
- Также  $O(|V| + |E|)$  если мы используем список соединений
- И  $O(|V|^2)$  если мы используем матрицу смежности (потому что нам нужно найти каждое ребро, поэтому нужно перебрать всю матрицу).

# Алгоритм Дейкстры



# Алгоритм Дейкстры

**Эдсгер Вйбе Дёйкстра** (11.05.1930— 6.08.2002) — нидерландский учёный, труды которого оказали влияние на развитие информатики и информационных технологий, является одним из разработчиков концепции структурного программирования и других идей, лауреат премии Тьюринга 1972г.

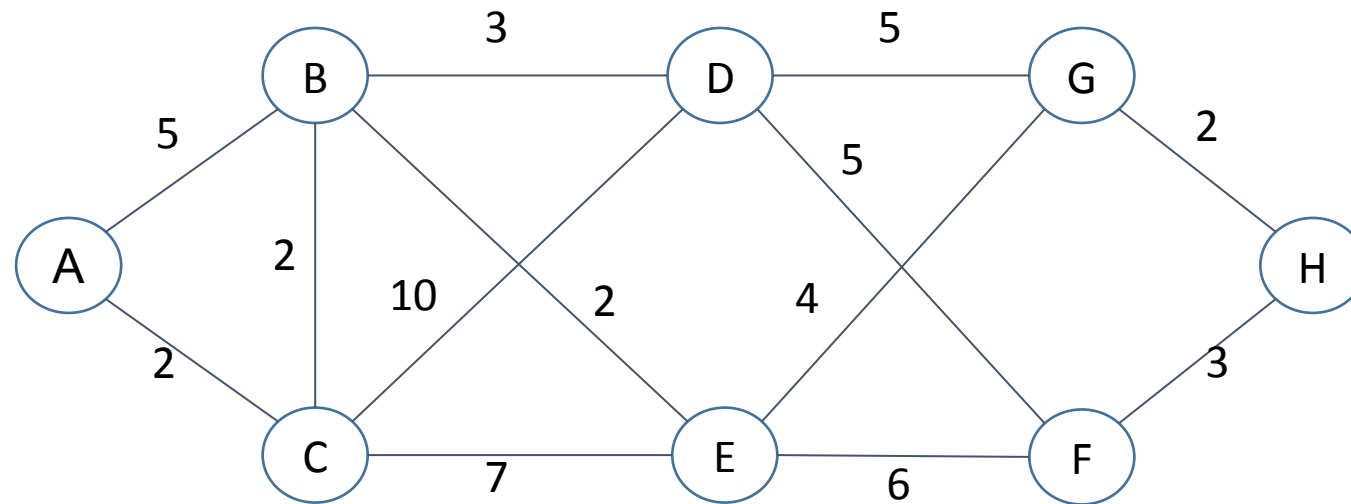
Известность Дейкстре принесли его работы в области применения математической логики при разработке компьютерных программ, идея применения «семафоров» для синхронизации процессов в многозадачных системах, а так же разработка алгоритма нахождения кратчайшего пути на взвешенном графе без ребер отрицательного веса.

# Последовательность шагов

1. Выбрать начальную вершину, присвоить стоимость пути до нее – 0, остальным вершинам  $\infty$ ;
2. Все вершины являются не выделенными;
3. Объявить первую вершину текущей;
4. Стоимости путей до всех невыделенных вершин находятся след. образом: стоимость пути до невыделенной вершины есть минимальное число из стоимости старого пути до данной вершины, равное сумме стоимости пути до текущей вершины и веса ребра соединяющего текущую и невыделенную вершины.
5. Среди невыделенных вершин выбирается вершина с минимальной стоимостью пути до нее. Если такой вершины нет (стоимость путей до всех вершин равна  $\infty$ ), то путь не существует и алгоритм завершается, иначе текущей вершиной становится найденная, и она же выделяется.
6. Если все вершины являются выделенными (до всех них найден кратчайший путь), то алгоритм завершается, иначе переход на шаг 4.

# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Дан неориентированный граф без ребер отрицательного веса. Необходимо найти в нем кратчайшие пути из вершины А до всех остальных вершин.

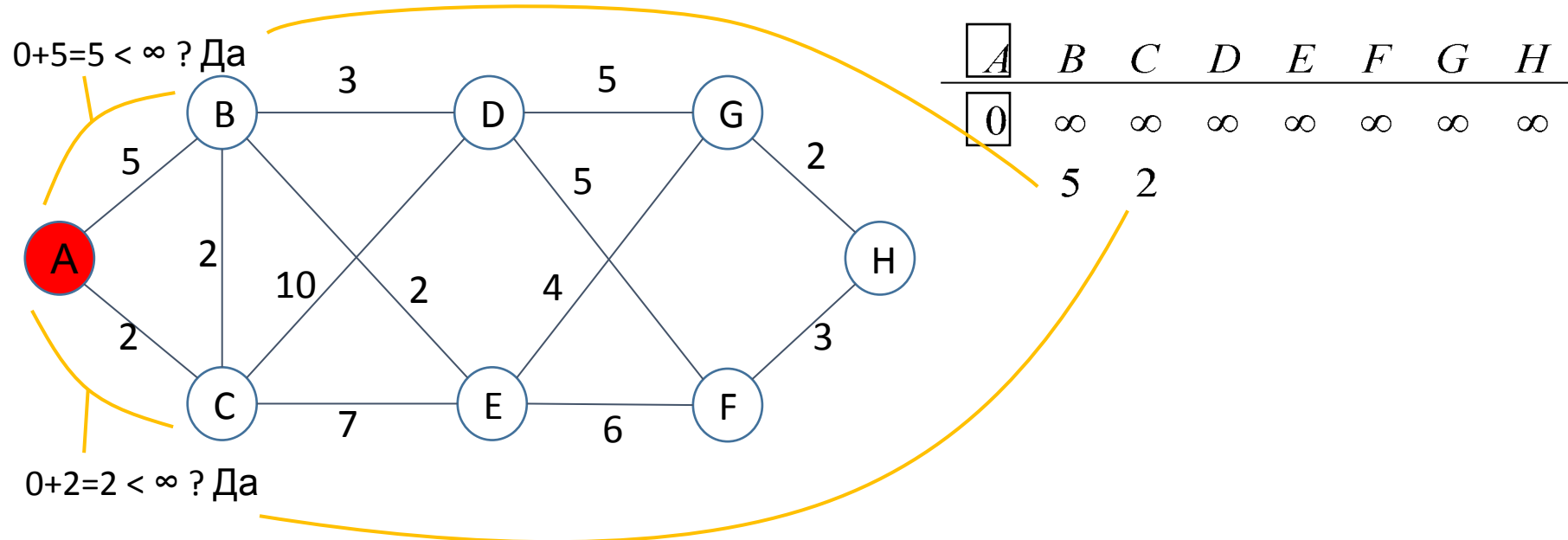






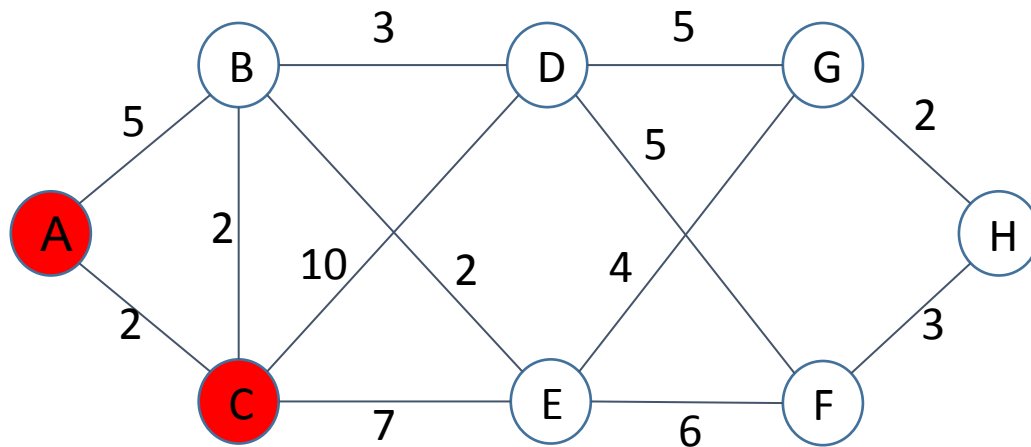
# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Шаг 4. Для каждой невыделенной вершины выполним вычисление: суммируем стоимость пути до текущей вершины и вес ребра соединяющего ее с невыделенной вершиной. Если эта сумма меньше стоимости пути до невыделенной вершины, то присваиваем найденную стоимость невыделенной вершине, иначе, продолжаем считать прежнюю стоимость пути до невыделенной вершины минимальной.



# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

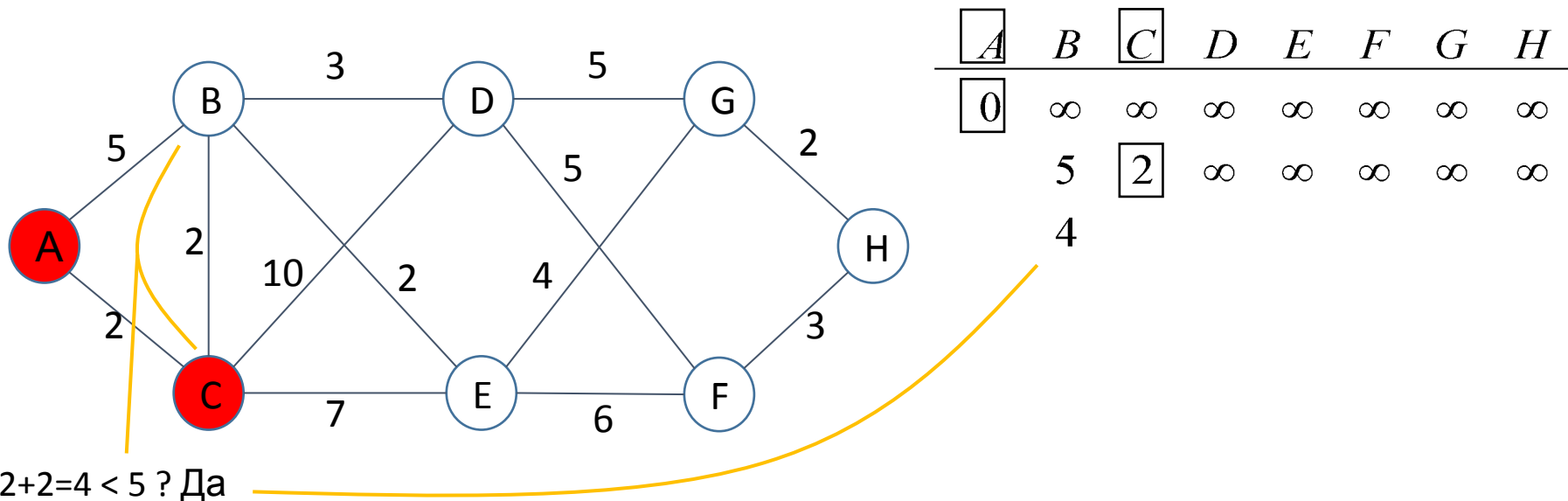
Шаг 5. Среди невыделенных вершин выбирается вершина с минимальной стоимостью пути до нее. Если такой вершины нет (стоимость путей до всех вершин равна  $\infty$ ), то путь не существует и алгоритм завершается, иначе текущей вершиной становится найденная, и она же выделяется



$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	5	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

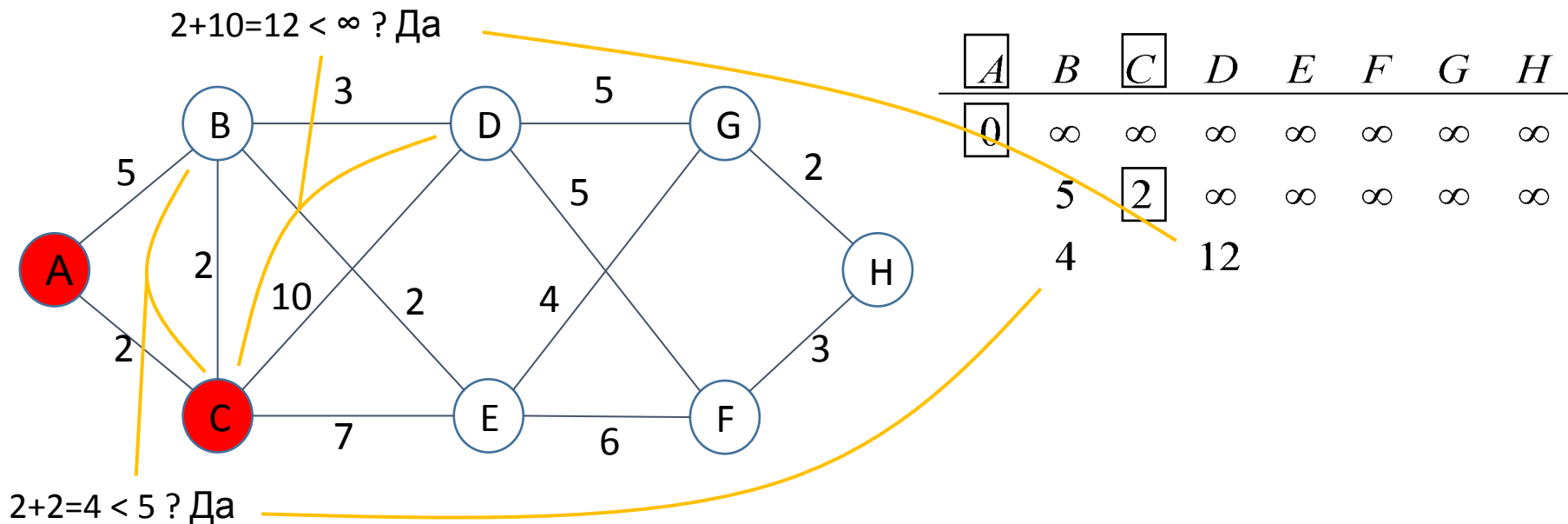
Шаг 4. Для каждой невыделенной вершины выполним вычисление: суммируем стоимость пути до текущей вершины и вес ребра соединяющего ее с невыделенной вершиной. Если эта сумма меньше стоимости пути до невыделенной вершины, то присваиваем найденную стоимость невыделенной вершине, иначе, продолжаем считать прежнюю стоимость пути до невыделенной вершины минимальной.





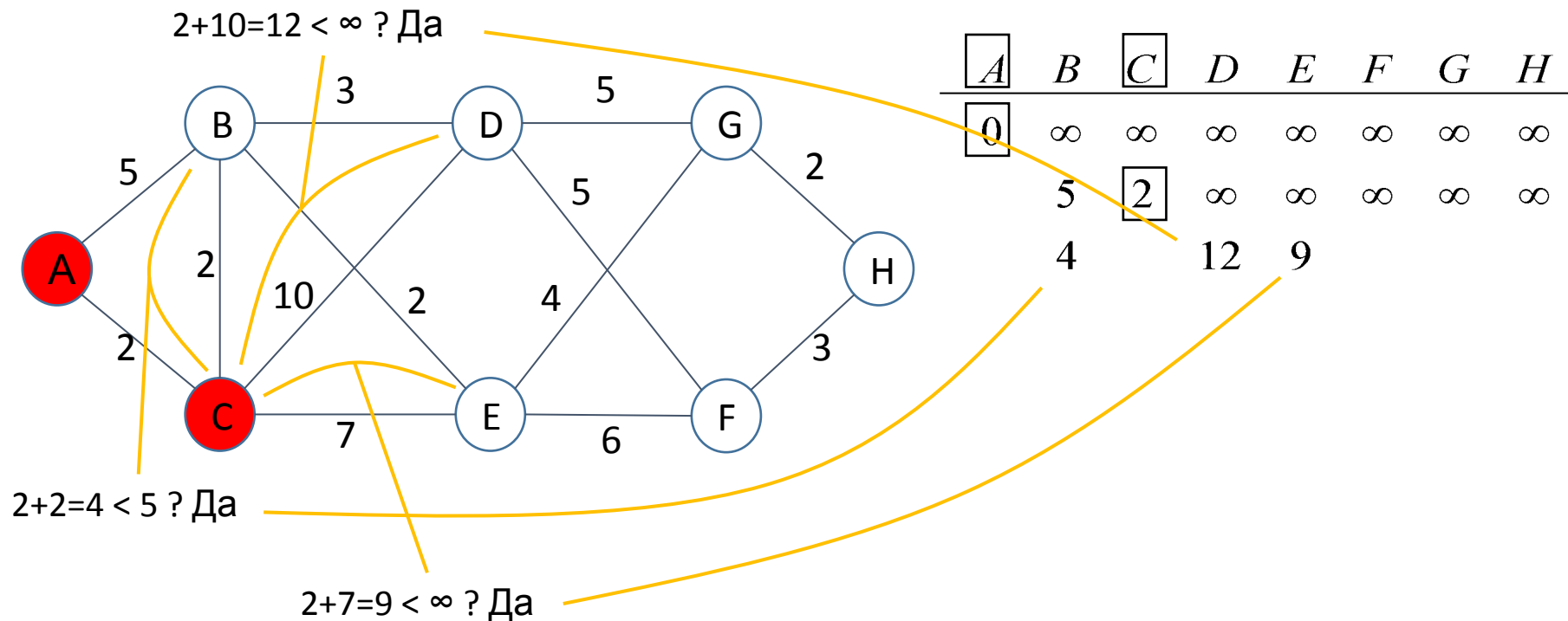
# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 4 для новой вершины



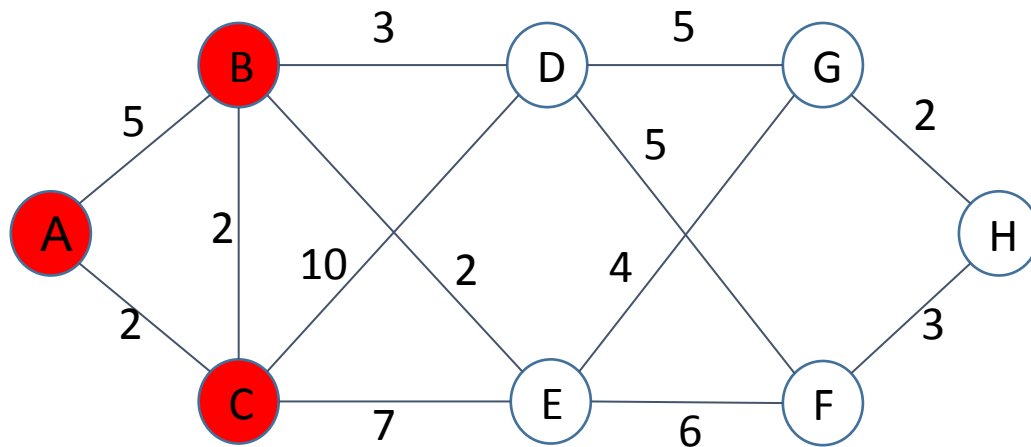
# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 4 для новой вершины



# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 5 для выделения новой вершины с минимальной стоимостью пути

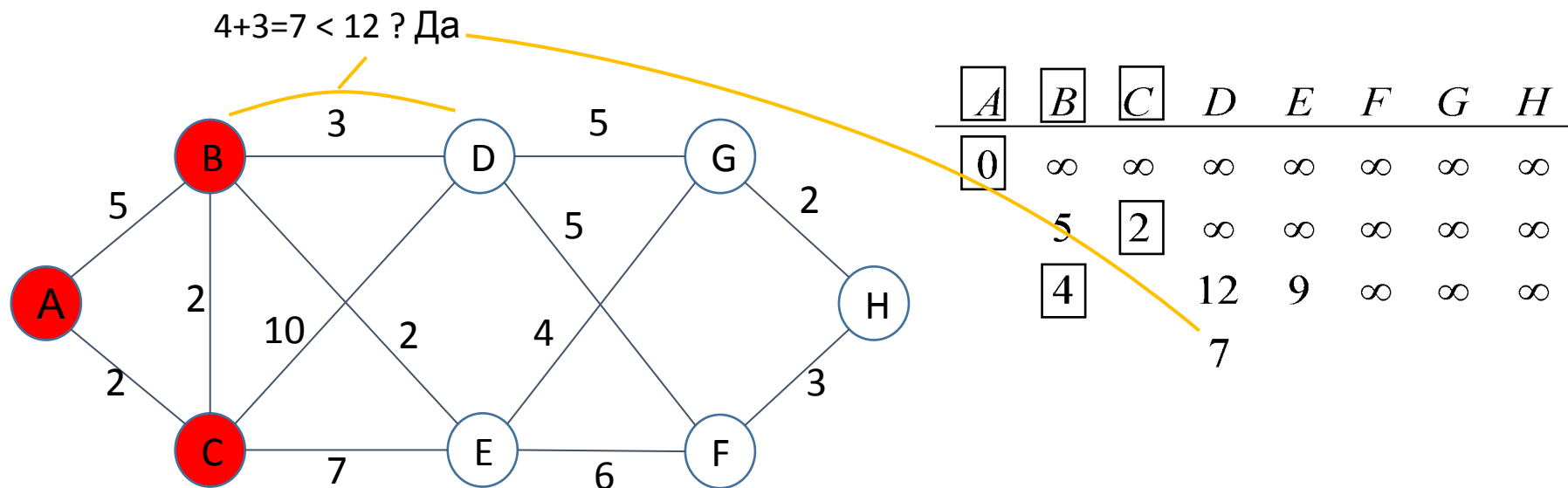


$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	5	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	4		12	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$



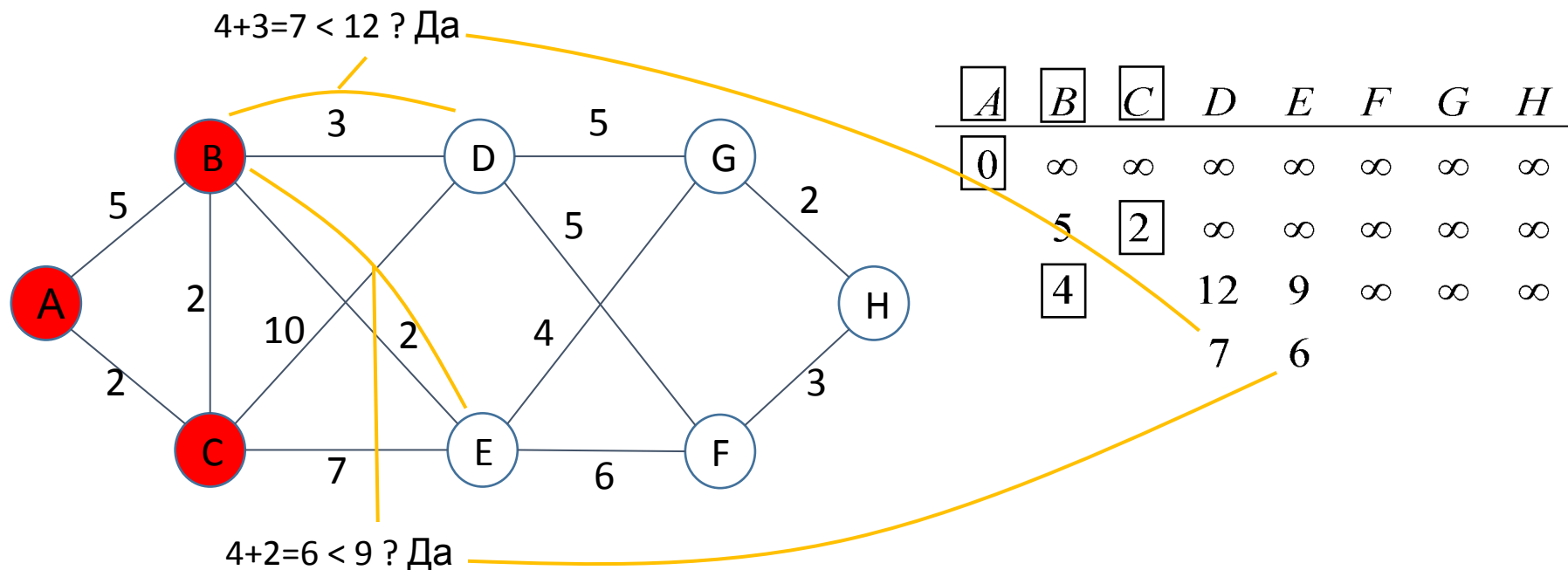
# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 4 для новой вершины



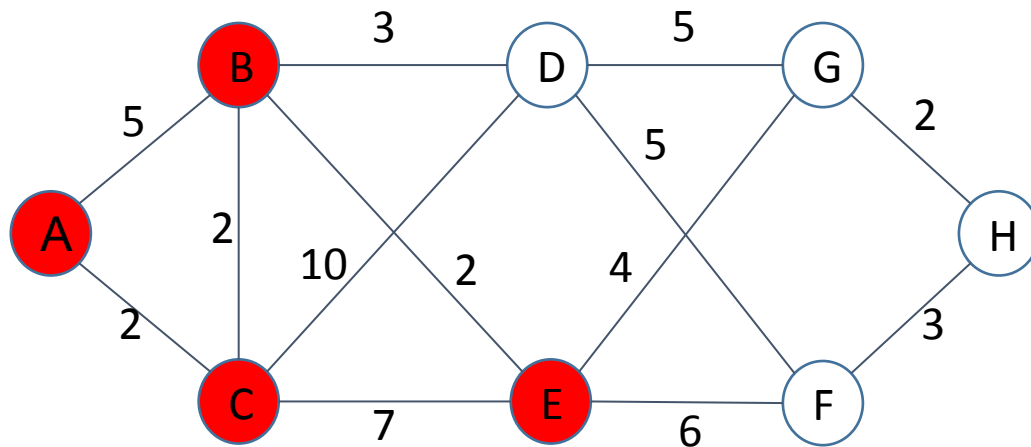
# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 4 для новой вершины



# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 5 для выделения новой вершины с минимальной стоимостью пути

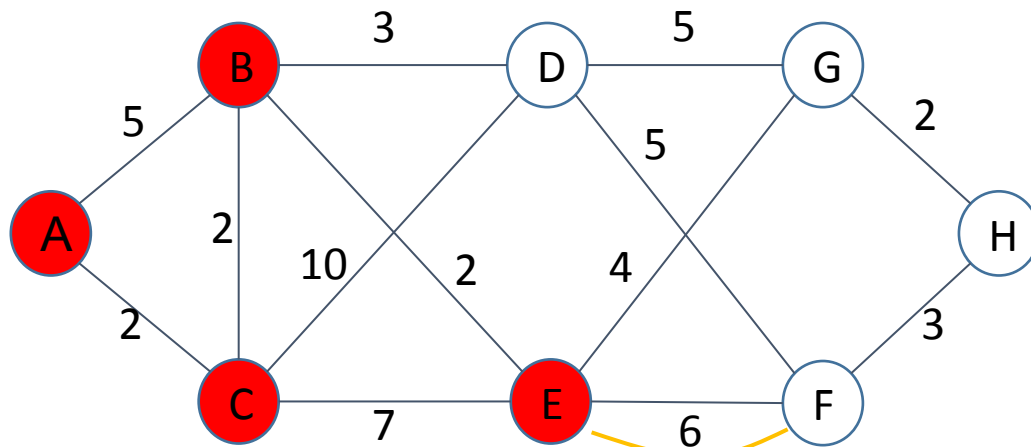


$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
$0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$5$	$2$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$4$		$12$	$9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
			$7$	$6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$



# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 4 для новой вершины

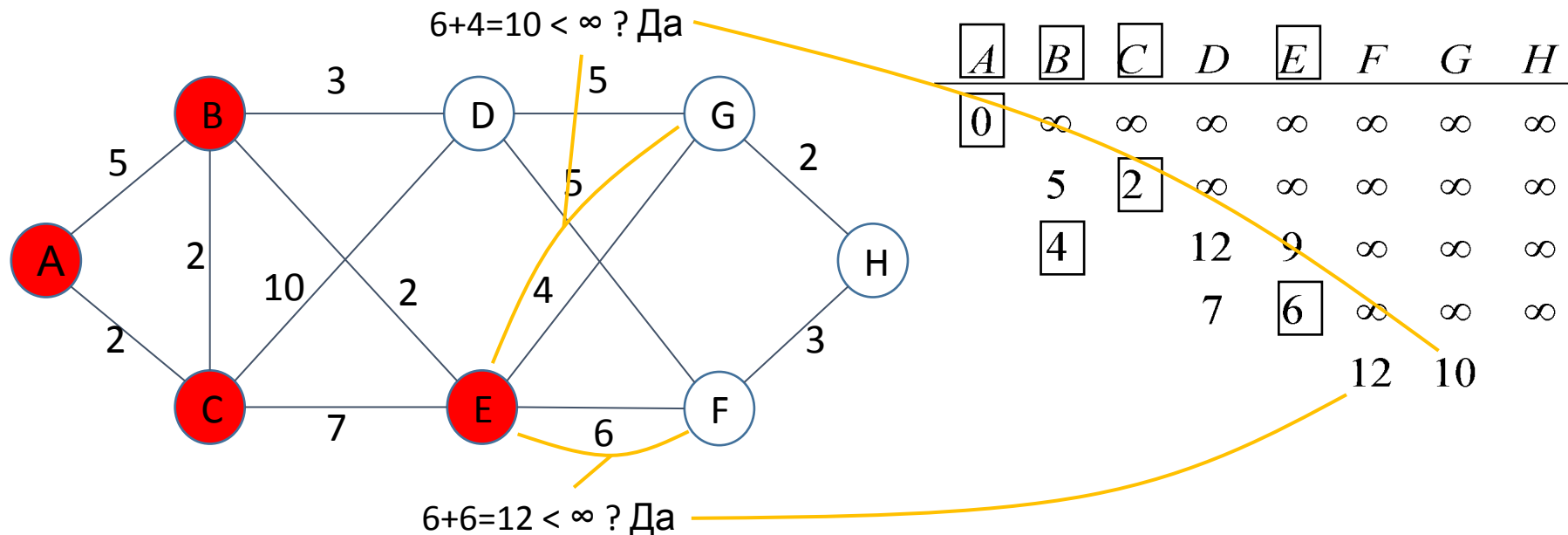


$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
$0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$5$	$2$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$4$		$12$	$9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
			$7$	$6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
					$12$		

$6+6=12 < \infty$  ? Да

# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

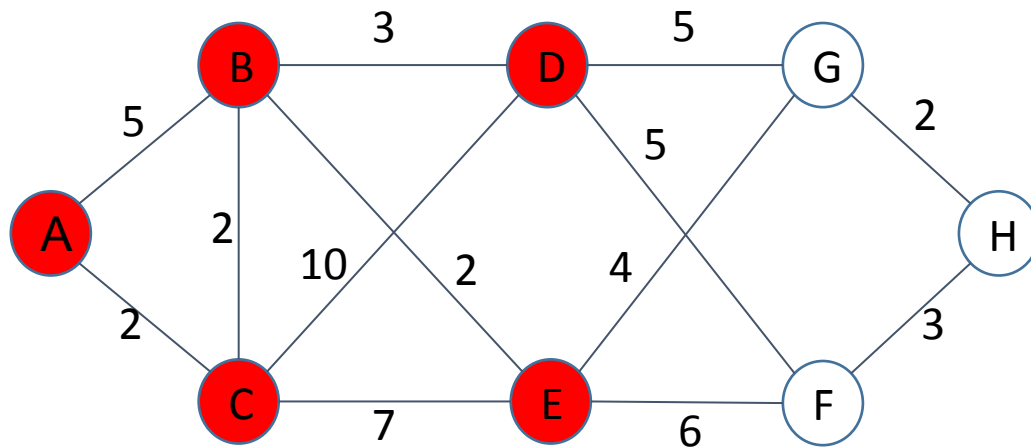
Повторяем шаг 4 для новой вершины





# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 5 для выделения новой вершины с минимальной стоимостью пути

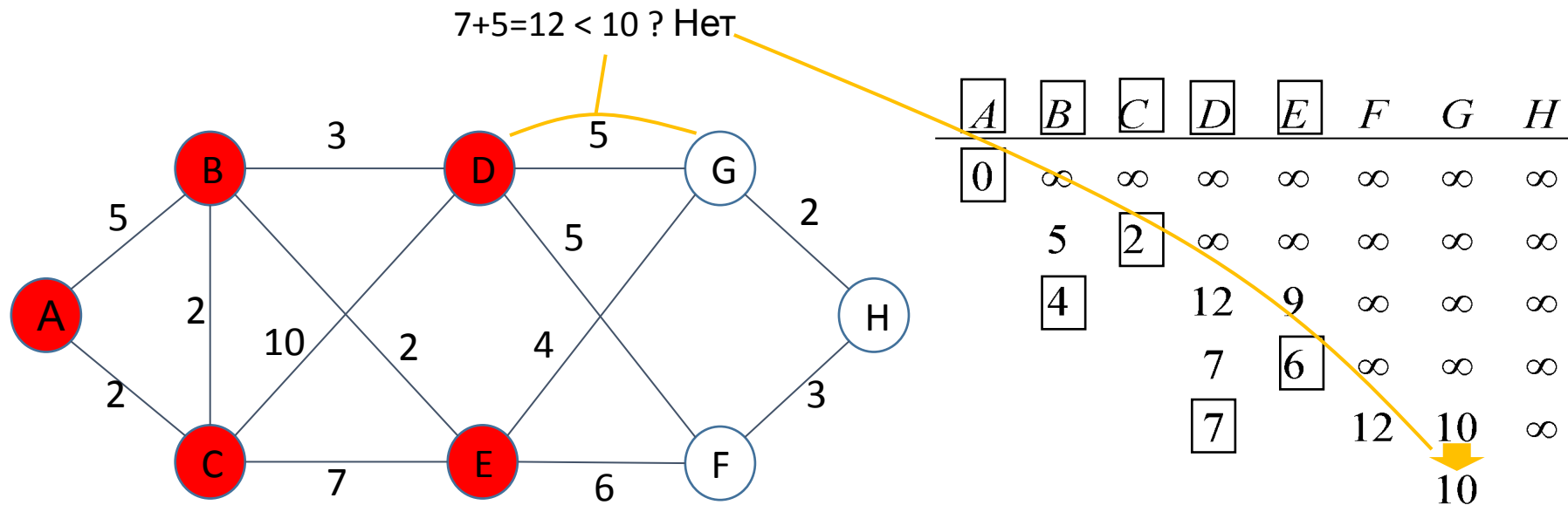


$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
$0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$5$	$2$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$4$		$12$	$9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
			$7$	$6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
			$7$		$12$	$10$	$\infty$



# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

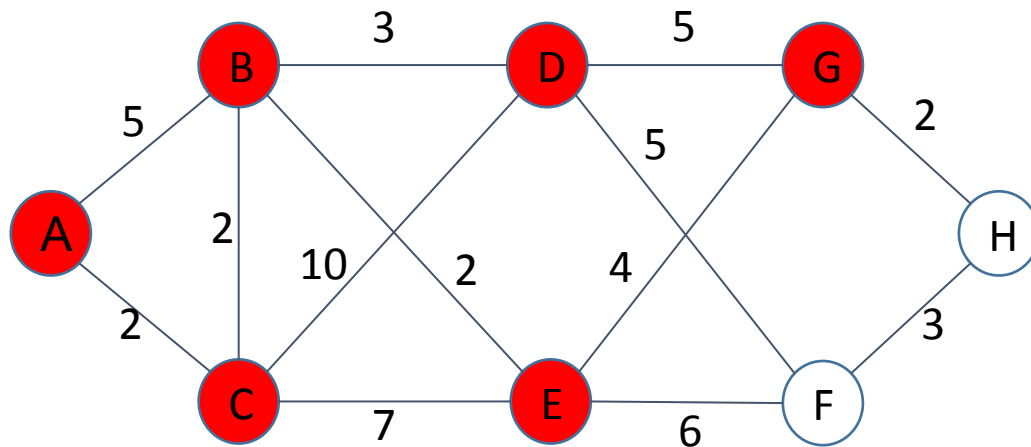
Повторяем шаг 4 для новой вершины





# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 5 для выделения новой вершины с минимальной стоимостью пути

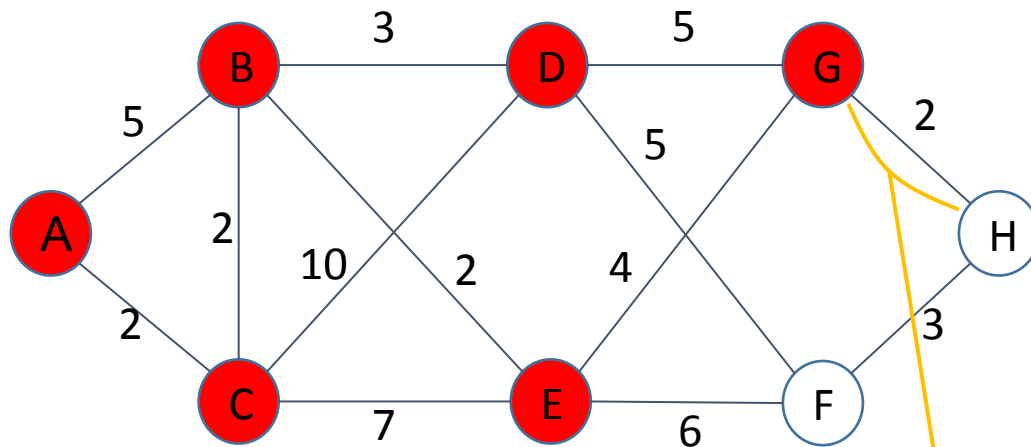


A	B	C	D	E	F	G	H
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	5	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	4		12	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$
			7	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
			7		12	10	$\infty$
					12	10	$\infty$



# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 4 для новой вершины



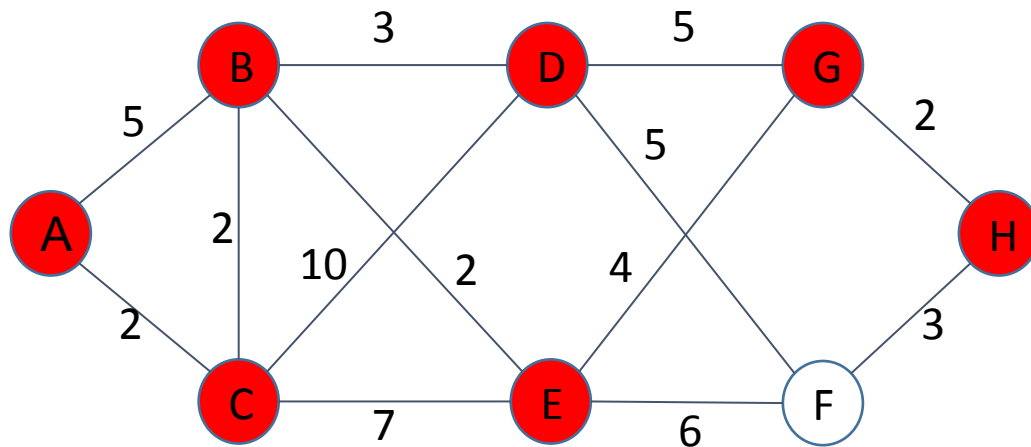
$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
$0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$5$	$2$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$4$		$12$	$9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
			$7$	$6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
			$7$		$12$	$10$	$\infty$
					$12$	$10$	$\infty$

$10+2=12 < \infty$  ? Да

12

# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 5 для выделения новой вершины с минимальной стоимостью пути

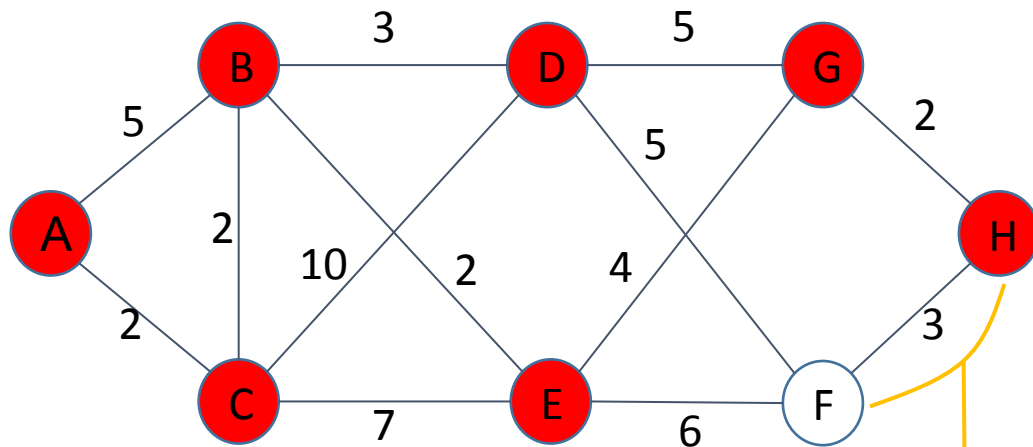


A	B	C	D	E	F	G	H
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
5	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4		12	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
		7	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
		7		12	10	$\infty$	$\infty$
				12	10	10	$\infty$
				12		12	12



# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Повторяем шаг 4 для новой вершины

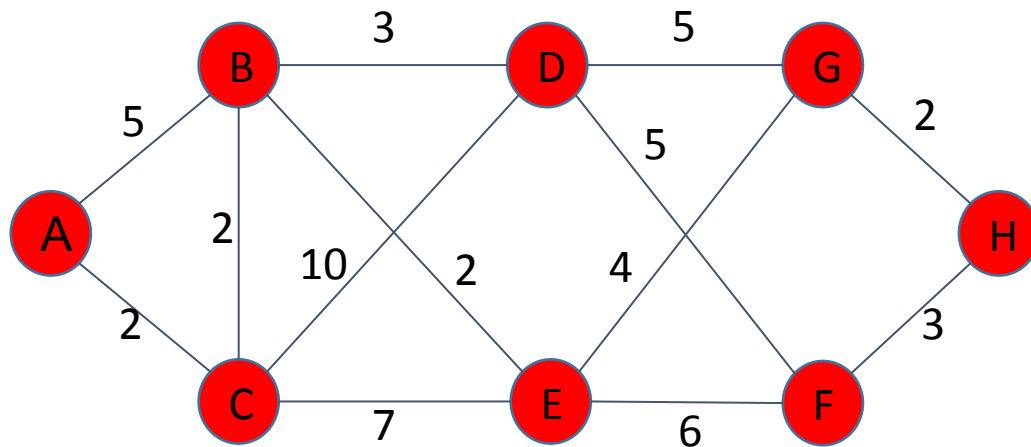


<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>
<b>0</b>	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	<b>2</b>	∞	∞	∞	∞	∞	∞
<b>4</b>			12	9	∞	∞	∞
			7	<b>6</b>	∞	∞	∞
			<b>7</b>		12	10	∞
					12	<b>10</b>	∞
					12		<b>12</b>
					12		<b>12</b>

$12+3=15 < 12$  ? Нет

# Нахождение кратчайшего пути в неориентированном графе

Шаг 6. Все вершины выделены, до них найдены кратчайшие пути, алгоритм завершается.



<u>A</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>D</u>	<u>E</u>	<u>F</u>	<u>G</u>	<u>H</u>
<u>0</u>	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	5	<u>2</u>	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	<u>4</u>		12	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$
			7	<u>6</u>	$\infty$	$\infty$	$\infty$
			<u>7</u>		12	10	$\infty$
					12	<u>10</u>	$\infty$
					12		<u>12</u>
					<u>12</u>		



# Результаты работы алгоритма

Были найдены следующие кратчайшие пути:

1.  $A \rightarrow A = 0;$
2.  $A \rightarrow B = 4;$
3.  $A \rightarrow C = 2;$
4.  $A \rightarrow D = 7;$
5.  $A \rightarrow E = 6;$
6.  $A \rightarrow F = 12;$
7.  $A \rightarrow G = 10;$
8.  $A \rightarrow H = 12;$

# Алгоритм Дейкстры

Основной цикл выполняется максимум  $n$  раз, в каждом из них на нахождение минимума тратится порядка  $n$  операций.

На циклы поиска по соседям тратится количество операций, пропорциональное количеству рёбер  $m$  (поскольку каждое ребро встречается в этих циклах ровно дважды и требует константное число операций). Таким образом, общее время работы алгоритма:

$$O(n^2 + m)$$

$$m \leq n(n - 1)$$