

Диференціальні рівняння

- рівняння з відокремлюваними змінними
- однорідні рівняння
- лінійні рівняння
- рівняння в повних диференціалах
- лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами
- лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами
- лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною

ЗВИЧАЙНІ диференціальні рівняння

Звичайним диференціальним рівнянням називають рівняння, що зв'язує між собою значення незалежної змінної x , невідомої функції $y = f(x)$ і її похідних (або диференціалів):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Порядком рівняння називається максимальний порядок n , що входить до її похідної (або диференціала).

Функція $y(x)$ називається **розв'язком (або інтегралом)** диференціального рівняння якщо при його підстановці рівняння перетворюється в **тотожність**.

Приклад: $y^{(4)} - y + x = 0$ - рівняння четвертого порядку.

ЗДР першого порядку

Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називаються рівняння виду:

$$F(x, y, y') = 0$$

де x - незалежна змінна, $y(x)$ - невідома функція

Загальний розв'язок: $y = \varphi(x, C)$

Приклад: $y'(x) - 3 \cdot x = 0$ загальний розв'язок: $y(x) = \frac{3}{2}x^2 + c$

Рівняння з відокремлюваними змінними

Так називаються рівняння виду

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

Інтегруємо, отримаємо

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$$

- загальний інтеграл (загальний розв'язок) цього рівняння.

Приклад:

$$e^y dy - (x^3 + 7x) dx = 0; \quad \int e^y dy - \int (x^3 + 7x) dx = 0;$$

$$e^y - \frac{x^4}{4} + \frac{7}{2}x^2 + c = 0 \quad - \text{загальний розв'язок}$$

Однорідні рівняння

так називаються рівняння виду

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Ці рівняння легко зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними:

Записуємо рівняння у формі:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

потім ділимо на $g(y)$ і множимо на dx :

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

Це рівняння - з відокремлюваними змінними. Інтегруємо, отримаємо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

Приклад: $y' = x \cdot (y - 1);$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y - 1); \quad \frac{dy}{(y - 1)} = x \cdot dx;$$

$$\int \frac{dy}{(y - 1)} = \int x \cdot dx; \quad \ln |y - 1| = \frac{x^2}{2} + C$$

Виразимо y з останнього виразу як функцію x , отримуємо загальний розв'язок:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

Рівняння з **однорідною** правою частиною. Так називаються рівняння зі спеціальним видом залежності функції $f(x, y)$ від своїх аргументів:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Це рівняння зводяться до рівняння з відокремленими змінними відносно нової незалежної функції $u(x)$ **заміною**:

$$\frac{y(x)}{x} = u(x)$$

Підставляємо в рівняння $y = x \cdot u$, $y' = u + x \cdot u'$, отримаємо

$$u + xu' = f(u), \quad x \frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

(це - рівняння з відокремленими змінними),

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

- це загальний інтеграл рівняння відносно змінних x, u

Приклад:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \quad u = \frac{y}{x}, \quad y = ux, \quad y' = u + u'x,$$

$$u + u'x = u + \frac{1}{u}, \quad x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}, \quad u du = \frac{dx}{x},$$

$$\int u du = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{u^2}{2} = \ln |x| + \frac{C}{2}, \quad u^2 = 2 \ln |x| + C, \quad \frac{y^2}{x^2} = \ln x^2 + C,$$

$$y^2 = x^2 (C + \ln x^2)$$

- загальний розв'язок рівняння

Приклад:

$$xy' = y \cos(\ln y - \ln x)$$

$$y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x}$$

$$u = \frac{y}{x}, y = ux,$$

$$y' = u + u'x, u + u'x = u \cos \ln u, x \frac{du}{dx} = u \cos \ln u - u, \frac{du}{u(\cos \ln u - 1)} = \frac{dx}{x}, \int \frac{du}{u(\cos \ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u(\cos \ln u - 1)} = |s = \ln u| = \int \frac{ds}{\cos s - 1} = \left| p = \operatorname{tg} \frac{s}{2} \right| = \int \frac{2dp/(1+p^2)}{\frac{1-p^2}{1+p^2} - 1} = \int \frac{2dp}{-2p^2} = \frac{1}{p} = \operatorname{ctg} \frac{s}{2} + C = \operatorname{ctg} \frac{\ln u}{2} + C,$$

$$C \neq 0$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\ln u}{2} = \ln |x| + \ln |C|$$

$$Cx = e^{\operatorname{ctg} \frac{\ln u}{2}}$$

$$Cx = e^{\operatorname{ctg} \frac{\ln(y/x)}{2}}$$

Остаточно, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = x \cdot e^{2 \operatorname{arcctg}(\ln x + C)}$$

Лінійні рівняння

ДР першого порядку називається лінійним, якщо невідома функція $y(x)$ і її похідна входять до рівняння першої степені:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

де $p(x)$, $q(x)$ - неперервні функції.

Приклад:

$$\frac{dy}{dx} - \sin(x)y = \operatorname{ctg}(x);$$

$$y' + (1 + x^2)y = 37 \cdot x + 5.$$

Для розв'язання рівняння представимо $y(x)$ в вигляді добутку двох нових невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$:

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Тоді

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

і рівняння зведеться до виду:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

або

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

Це рівняння розв'язуємо у два етапи: спочатку знаходимо функцію $v(x)$ як частинний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними:

$$v' + p(x)v = 0$$

потім знаходимо $u(x)$ з рівняння :

$$u'v = q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln |v| = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx}$$

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot u'(x) = q(x) \Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$$

Відмітимо, що розв'язуючи рівняння на $v(x)$ ми **не вводимо** в цей розв'язок довільну сталу C , нам достатньо знайти одну функцію $v(x)$, яка обнуляє доданок за дужками. Запам'ятовувати цю формулу не потрібно, краще **засвоїти порядок дій** і відтворювати його при розв'язанні кожної задачі.

Приклад:

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1$$

Розв'язання:

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' - \operatorname{tg} x \cdot uv = \frac{1}{\cos x},$$

$$u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot v, \quad v' - v \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}, \quad \ln |v| = -\ln |\cos x|,$$

$$v = \frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{u'}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}, \quad u(x) = x + C$$

і загальний розв'язок рівняння

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x}$$

Для знаходження частинного розв'язку, що відповідає початковим умовам (задача Коші), підставимо в загальний розв'язок

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x}$$

$$x = 0, y = 1: 1 = \frac{0 + C}{\cos 0} \Rightarrow C = 1$$

Розв'язок задачі:

$$y(x) = \frac{x + 1}{\cos x}$$

Рівняння в повних диференціалах

так називається рівняння виду

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

$(P(x, y), Q(x, y))$ - неперервно диференційовані) у випадку, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто якщо існує така функція $u(x, y)$, що

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Необхідною і достатньою умовою існування такої функції є умова:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Якщо – рівняння в повних диференціалах, то його перша частина дорівнює 0, тобто приймає вигляд $du(x, y) = 0$. При розв'язанні $y(x)$ одержимо $du(x, y(x)) = 0$, отже $u(x, y(x)) = C$, де C – довільна стала.

Співвідношення $u(x, y) = C$ – загальний розв'язок **рівняння в повних диференціалах.**

Для знаходження функції $u(x, y)$ розв'язується **система рівнянь**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

з першого рівняння цієї системи знаходимо:

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y)$$

з точністю до довільної диференційованої по y функції $\varphi(y)$ (ця функція відіграє роль сталої інтегрування; оскільки інтегрування відбувається по змінній x).

Диференціюємо цю функцію по y і прирівнюємо до виразу, що стоїть у другому **рівнянні системи** (тобто $Q(x, y)$), отримаємо диференціальне рівняння з якого можна знайти $\varphi(y)$.

Приклад: знайти загальний розв'язок рівняння $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$

Впевнимся, що це - **рівняння в повних диференціалах.**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin 2x}{y} + x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}. \end{cases}$$

$$P(x, y) = \frac{\sin 2x}{y} + x; Q(x, y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\sin 2x}{y^2}; \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2 \sin x \cos x}{y^2} = -\frac{\sin 2x}{y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$u(x, y) = \int \left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \varphi(y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos 2x}{2y^2} + \varphi'(y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = y - \frac{1}{2y^2} \Rightarrow$$

$$\varphi(y) = \int \left(y - \frac{1}{2y^2}\right) dy = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}$$

$$u(x, y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}$$

$$-\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} = C$$

ЗДР вищих порядків

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, що зв'язує між собою значення незалежної змінної x , невідомої функції $y = f(x)$ і її похідних (або диференціалів):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Загальним розв'язком (загальним інтегралом) рівняння називається співвідношення виду:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Деякі типи рівнянь, що допускають пониження порядку.

Рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x)$$

розв'язується послідовним ***n*-кратним інтегруванням**.

Приклад:

$$\begin{aligned} y^{(4)} = \sin x &\Rightarrow y''' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1 \Rightarrow y'' = -\int (\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \Rightarrow y = \cos x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4. \end{aligned}$$

Перепозначивши сталі, загальний розв'язок запишемо у вигляді :

$$y = \cos x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Рівняння, **не містить в явному вигляді невідому функцію** та похідні нижчого порядку.

Порядок рівняння виду $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, що не містить функції $y(x)$ і $(k - 1)$ нижчу похідну цієї функції в явному вигляді, може бути **знижено рівно на k одиниць** введенням нової невідомої функції $z(x) = y^{(k)}(x)$. Тоді рівняння прийме вигляд

$$F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

тобто буде рівнянням $(n - k)$ -го порядку.

Після знаходження $z(x)$ послідовним інтегруванням розв'язується рівняння $y^{(k)}(x) = z(x)$.

Приклад: Понизити порядок рівняння:

$$x^6 y''' - 2x^5 y'' = \frac{(y'')^3}{2}$$

Найменша похідна, що входить в явній формі до рівняння, - друга, тому робимо заміну шуканої функції:

$$z(x) = y''(x)$$

Тоді

$$y''' = z'$$

і рівняння прийме вигляд

$$x^6 z' - 2x^5 z = \frac{z^3}{2}$$

Рівняння, що **не містить в явному вигляді незалежну змінну x** .

Порядок рівняння

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

що не містять явно x , може бути знижений на 1 за допомогою прийому, який полягає в тому, що вводиться нова функціональна залежність y' від y :

$$y' = p(y)$$

Приклад: Понизити порядок рівняння:

$$yy'' = y'^2 - y';$$

Змінна x явно до рівняння не входить, тому вважаємо, $y' = p(y)$ $y'' = p'p$

тоді $yp'p' = p^2 - p$.

Просто скоротить на p це рівняння **неможливо**, оскільки можна втратити розв'язки $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$

тому розглядають **два випадки:**

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$$

$$p \neq 0 \Rightarrow yp' = p - 1.$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p \text{ і } q - \text{ сталі}, \quad (18)$$

називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок рівняння (16) має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (19)$$

де y_1 і y_2 – два лінійно незалежних частинних розв'язки рівняння (18), C_1 та C_2 – довільні сталі.

Ці розв'язки знаходять у вигляді $y = e^{kx}$, де k – невизначена стала (дійсна або уявна). Для знаходження k складають характеристичне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (20)$$

Розв'язуючи рівняння (20), знаходимо його корені k_1 і k_2 . Можливі такі три випадки.

1. Якщо $D > 0$, то $k_1 \neq k_2$ – дійсні числа, тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$, а загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (21)$$

2. Якщо $D = 0$, то $k_1 = k_2 = k$ – дійсне число, тоді $y_1 = e^{kx}$ та $y_2 = x e^{kx}$, а загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \quad (22)$$

3. Якщо $D < 0$, то k_1 та k_2 – комплексні числа ($k_1 = \alpha + \beta i$ і $k_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$), тоді $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$, а загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (23)$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$1) y'' - 5y' + 6y = 0;$$

$$2) y'' + 4y' + 13y = 0;$$

$$3) y'' + 6y' + 9y = 0.$$

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 6 = 0$.

Знайдемо його розв'язки: $D = 25 - 24 = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{5+1}{2} = 3, k_2 = \frac{5-1}{2} = 2$. Тоді,

використовуючи формулу (21) маємо, що загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

2) $y'' + 4y' + 13y = 0$. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 4k + 13 = 0$.

Знайдемо його розв'язки:

$$D = 16 - 52 = -36 \Rightarrow k_1 = \frac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i, k_2 = \frac{-4 - 6i}{2} = -2 - 3i.$$

Тоді, використовуючи формулу (23) маємо, що загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x$.

3) $y'' + 6y' + 9y = 0$. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його

розв'язки : $k^2 + 6k + 9 = 0 \Rightarrow (k + 3)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = -3, k_2 = -3$. Тоді,

використовуючи формулу (22) маємо, що загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (24)$$

де p і q – сталі, а $f(x)$ – деяка неперервна функція на відрізку $[a; b]$, називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння $y'' + py' + qy = 0$ у цьому випадку називається відповідним лінійним однорідним диференціальним рівнянням.

Загальний розв'язок рівняння (24) знаходять у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння та деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння, тобто

$$y = \bar{y} + y^*, \quad (25)$$

де $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння, а y^* – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння знаходяться за формулами (21-23). Щоб знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння використовують метод варіації довільних сталих, який дає змогу визначити частинний розв'язок неоднорідного рівняння за загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

Нехай $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння. Замінімо C_1 і C_2 невідомими функціями $C_1(x)$ і $C_2(x)$ та підберемо їх такими, щоб функція

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \quad (26)$$

була частинним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння. Для визначення невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

Теорема: Якщо функції y_1 і y_2 лінійно незалежні розв'язки однорідного диференціального рівняння на проміжку $(a;b)$, то визначник $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ в кожній точці даного проміжку.

Визначник системи $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$, тому що y_1 і y_2 - лінійно незалежні частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння. Отже, дана система має єдиний розв'язок: $C_1'(x) = \varphi(x)$, $C_2'(x) = \psi(x)$. Проінтегрувавши дані функції знайдемо $C_1(x) = \int \varphi(x) dx$ і $C_2(x) = \int \psi(x) dx$, а потім підставивши їх у формулу (26) отримаємо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \int \varphi(x) dx \cdot y_1 + \int \psi(x) dx \cdot y_2.$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд: $y = \bar{y} + y^*$.

Знайдемо \bar{y} . Для цього запишемо відповідне однорідне рівняння та розв'яжемо його.

$$y'' + 4y = 0; k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow \bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Запишемо частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння у вигляді

$$y^* = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x.$$

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складемо систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + C_2'(x)\cos 2x = \frac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему отримаємо: $C_1'(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$ і $C_2'(x) = \frac{1}{2}$. Тоді

$$C_1(x) = -\int \frac{1}{2}\operatorname{tg}x dx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|, \quad \text{а} \quad C_2(x) = \int \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2}. \quad \text{Запишемо частинний}$$

розв'язок неоднорідного рівняння: $y^* = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| \cdot \cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$.

Загальний розв'язок заданого неоднорідного диференціального рівняння буде таким:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| \cdot \cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною

Якщо права частина рівняння (24) має спеціальний вигляд, то частинний розв'язок y^* можна знаходити, не вдаючись до інтегрування. Розглянемо деякі з таких випадків.

1) Нехай права частина рівняння (24) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \quad (27)$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n .

Тоді частинний розв'язок цього рівняння шукають у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x), \quad (28)$$

де $Q_n(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що і многочлен $P_n(x)$;

r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α , якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймають $r = 0$.

2) Нехай права частина рівняння (24) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x). \quad (29)$$

Функція (27) є частинним випадком функції (29) при $\beta = 0$.

Тоді частинний розв'язок цього рівняння шукають у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} (Q_s(x) \cos \beta x + L_s(x) \sin \beta x), \quad (30)$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

s – найвищий степінь многочленів $P_n(x)$ та $R_m(x)$;

r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + \beta i$.

Шукані многочлени $Q_n(x)$ з формули (26) та $Q_s(x)$ і $L_s(x)$ з формули (29) мають бути повними, тобто містити всі степені x відповідно від 0 до n та від 0 до s .

Приклад 8. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$1) y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$2) y'' - 8y' + 16y = e^{4x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$3) y'' + 2y' + 2y = x^2 e^{-x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$1) y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами. Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

$$k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow k_1 = -1, \quad k_2 = 4.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тоді за формулою (21) загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок y^* даного неоднорідного рівняння. Функція у правій частині даного рівняння $f(x) = 17 \sin x$ – подана у вигляді (28), тобто $f(x) = e^{0x} (0 \cdot \cos x + 17 \sin x)$. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді (29)

$$y^* = x^r e^{\alpha x} (Q_s(x) \cos \beta x + L_s(x) \sin \beta x),$$

де $\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow \alpha + \beta i = i$;

$r = 0$, так як $\alpha + \beta i \neq k_1 i$ і $\alpha + \beta i \neq k_2 i$;

$s = 0$, так як $P_n(x) = 0, R_m(x) = 17 \Rightarrow n = m = 0$, тому $Q_0(x) = A, L_0(x) = B$.

Звідси:

$$y^* = x^0 e^0 (A \cos x + B \sin x) = A \cos x + B \sin x,$$

$$(y^*)' = -A \sin x + B \cos x,$$

$$(y^*)'' = -A \cos x - B \sin x.$$

Підставляємо y в задане рівняння:

$$y'' = (y^*)'', \quad y' = (y^*)', \quad y = y^*.$$

$$-A \cos x - B \sin x - 3(-A \sin x + B \cos x) - 4(A \cos x + B \sin x) = 17 \sin x.$$

Розкриємо дужки та згрупуємо доданки у лівій частині відносно $\cos x$ та $\sin x$:

$$(-5A - 3B) \cos x + (3A - 5B) \sin x = 17 \sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля $\cos x$ та $\sin x$, одержимо

$$\begin{cases} -5A - 3B = 0, \\ 3A - 5B = 17; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{5}B, \\ -\frac{9}{5}B - 5B = 17; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2}, \\ B = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } y^* = \frac{3}{2} \cos x - \frac{5}{2} \sin x.$$

Таким чином, знайшовши загальний розв'язок \bar{y} відповідного однорідного та частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв'язок даного рівняння

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + \frac{3}{2} \cos x - \frac{5}{2} \sin x.$$

Розв'яжемо задачу Коші при $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Для цього знайдемо y'

$$y' = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x} - \frac{3}{2} \sin x - \frac{5}{2} \cos x.$$

Підставивши початкові умови, одержимо

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = -\frac{3}{2},$$

$$y'(0) = -C_1 + 4C_2 - \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow C_1 = 4C_2 - \frac{7}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{3}{2}, \\ C_1 = 4C_2 - \frac{7}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{2}{5}, \\ C_1 = -\frac{19}{10}. \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо відповідь:

$$y = \bar{y} + y^* = -\frac{19}{10} e^{-x} + \frac{2}{5} e^{4x} + \frac{3}{2} \cos x - \frac{5}{2} \sin x.$$

$$2) y'' - 8y' + 16y = e^{4x}; y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

$$k^2 - 8k + 16 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 4 \Rightarrow k = 4.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тоді за формулою $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$ загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий

$$\bar{y} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок y^* даного неоднорідного рівняння.

Функція у правій частині даного рівняння $f(x) = e^{4x}$ – подана у вигляді (26), причому $P_n(x) = 1$ – многочлен нульового порядку, тобто $n = 0$. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де $\alpha = 4$;

$r = 2$, так як $\alpha = k_1$ і $\alpha = k_2$;

$n = 0$ (порядок многочлена $P_n(x)$), тому $Q_0(x) = A$.

Звідси

$$y^* = Ax^2 e^{4x},$$

$$(y^*)' = 2Ax e^{4x} + 4Ax^2 e^{4x},$$

$$(y^*)'' = 2Ae^{4x} + 8Ax e^{4x} + 8Ax e^{4x} + 16Ax^2 e^{4x} = 2Ae^{4x} + 16Ax e^{4x} + 16Ax^2 e^{4x}.$$

Підставляємо y задане рівняння:

$$y'' = (y^*)'', \quad y' = (y^*)', \quad y = y^*.$$

$$2Ae^{4x} + 16Axe^{4x} + 16Ax^2e^{4x} - 8(2Axe^{4x} + 4Ax^2e^{4x}) + 16(Ax^2e^{4x}) = e^{4x},$$

$$e^{4x}(2A + 16Ax + 16Ax^2 - 16Ax - 32Ax^2 + 16Ax^2) = e^{4x},$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Звідси $y^* = \frac{1}{2}x^2e^{4x}$. Таким чином, знайшовши загальний розв'язок \bar{y}

відповідного однорідного та частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв'язок даного рівняння

$$y = \bar{y} + y^* = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x} + \frac{1}{2}x^2e^{4x}.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші при початкових умовах $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$$\begin{aligned} y' &= 4C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} + 4C_2 x e^{4x} + x e^{4x} + 2x^2 e^{4x} = \\ &= e^{4x} (4C_1 + C_2 + (4C_2 + 1)x + 2x^2). \end{aligned}$$

Підставивши початкові умови, одержимо

$$y(0) = C_1 = 0,$$

$$y'(0) = 4C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Таким чином, дістанемо відповідь:

$$y = x e^{4x} + \frac{1}{2} x^2 e^{4x} = \left(x + \frac{1}{2} x^2\right) e^{4x}.$$

$$3) y'' + 2y' + 2y = x^2 e^{-x}; y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

$$k^2 + 2k + 2 = 0 \Rightarrow D = 4 - 8 = -4 = (2i)^2 \Rightarrow k_1 = -1 - i, k_2 = -1 + i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексні ($\alpha = -1, \beta = 1$), тоді за формулою $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ (21) загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Знайдемо частинний розв'язок y^* даного неоднорідного рівняння. Функція у правій частині даного рівняння $f(x) = x^2 e^{-x}$ – подана у вигляді (26), причому $P_n(x) = x^2$ – многочлен другого порядку, тобто $n = 2$. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де $\alpha = -1$;

$r = 0$, так як $\alpha \neq k_1$ і $\alpha \neq k_2$;

$n = 2$ (порядок многочлена $P_n(x)$), тому $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ (повний многочлен другого порядку).

Звідси

$$y^* = x^0 e^{-x} (Ax^2 + Bx + C) = e^{-x} (Ax^2 + Bx + C),$$

$$(y^*)' = -e^{-x} (Ax^2 + Bx + C) + e^{-x} (2Ax + B) = e^{-x} (-Ax^2 + (2A - B)x + B - C),$$

$$(y^*)'' = -e^{-x} (-Ax^2 + (2A - B)x + B - C) + e^{-x} (-2Ax + 2A - B) = \\ = e^{-x} (Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B + C).$$

Підставляємо у задане рівняння: $y'' = (y^*)''$, $y' = (y^*)'$, $y = y^*$.

$$e^{-x} (Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B + C) + 2e^{-x} (-Ax^2 + (2A - B)x + B - C) + \\ + 2e^{-x} (Ax^2 + Bx + C) = x^2 e^{-x},$$

$$e^{-x} (Ax^2 + Bx + 2A + C) = x^2 e^{-x},$$

$$Ax^2 + Bx + 2A + C = x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля відповідних степенів x одержуємо:

$$\begin{cases} A=1, \\ B=0, \\ 2A+C=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=0, \\ C=-2. \end{cases}$$

Звідси $y^* = e^{-x}(x^2 - 2)$. Таким чином, знайшовши загальний розв'язок \bar{y} відповідного однорідного та частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв'язок даного рівняння

$$\begin{aligned} y = \bar{y} + y^* &= e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(x^2 - 2) = \\ &= e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2), \end{aligned}$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші. Для цього знайдемо y' :

$$\begin{aligned}y' &= -e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2) + e^{-x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x) = \\ &= e^{-x}(-C_1 \cos x - C_2 \sin x - x^2 + 2 - C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x) = \\ &= e^{-x}((-C_1 + C_2)\cos x + (-C_1 - C_2)\sin x - x^2 + 2x + 2).\end{aligned}$$

Підставивши початкові умови $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, одержимо

$$y(0) = C_1 - 2 = 0 \Rightarrow C_1 = 2,$$

$$y'(0) = -C_1 + C_2 + 2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Таким чином, одержимо відповідь:

$$y = e^{-x}(2 \cos x + \sin x + x^2 - 2).$$