

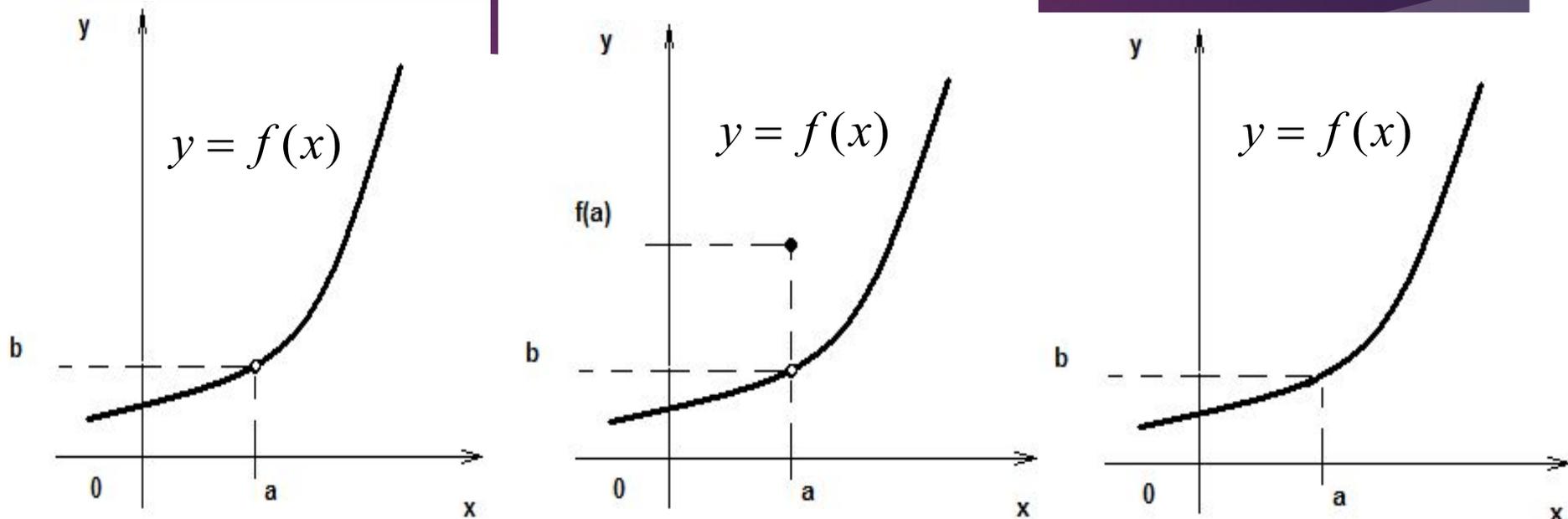
Понятие предела функции в точке

Предел функции

Предел – одно из основных понятий математического анализа. Понятие предела использовалось еще Ньютоном во второй половине XVII века и математиками XVIII века, такими как Эйлер и Лагранж, однако они понимали предел интуитивно. Первые строгие определения предела дали Больцано в 1816 году и Коши в 1821 году.

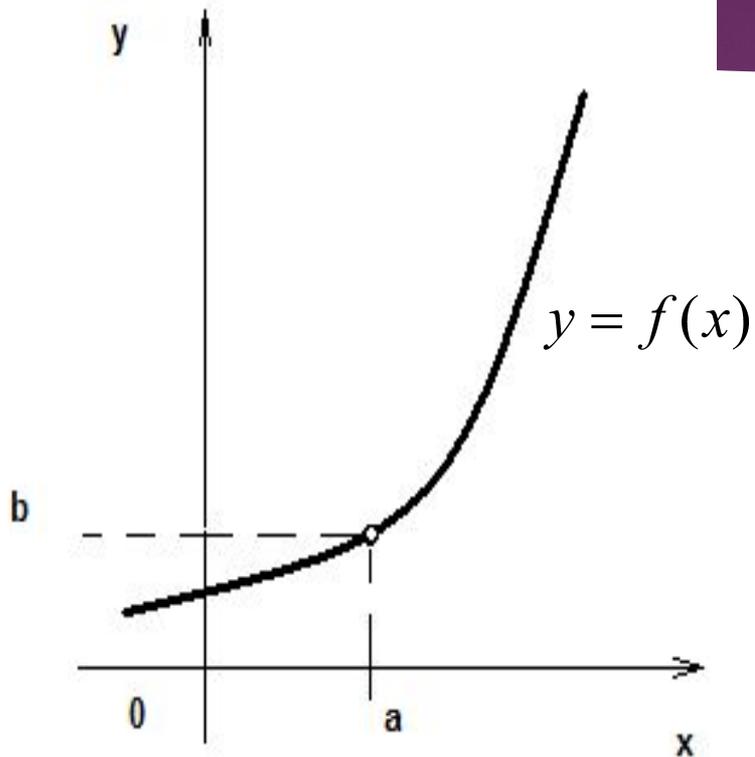
РАЗЛИЧАЮТ – предел функции в точке **И** предел функции на бесконечности.

Рассмотрим функции, графики которых изображены на следующих рисунках:

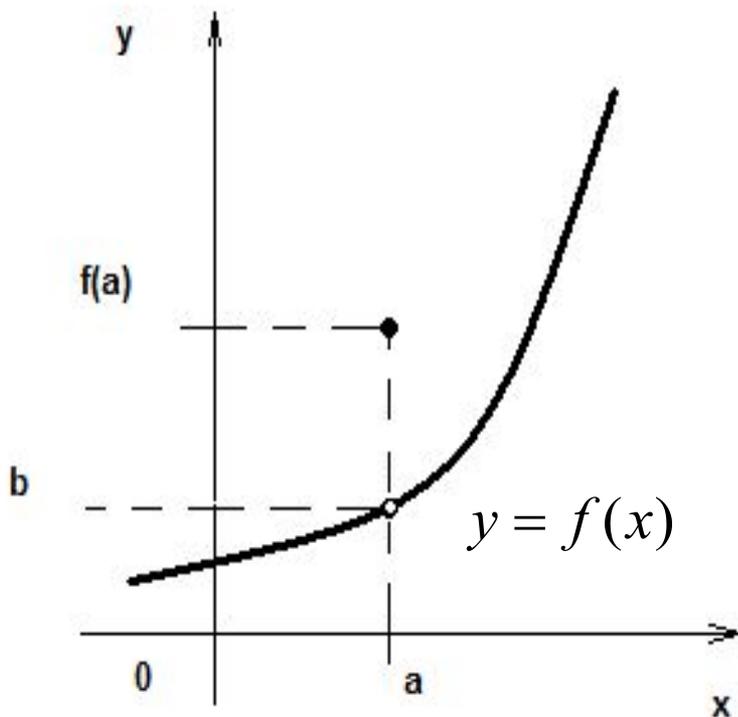


Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, но все же изображают они три разные функции, отличающиеся друг от друга своим поведением в точке $x = a$.

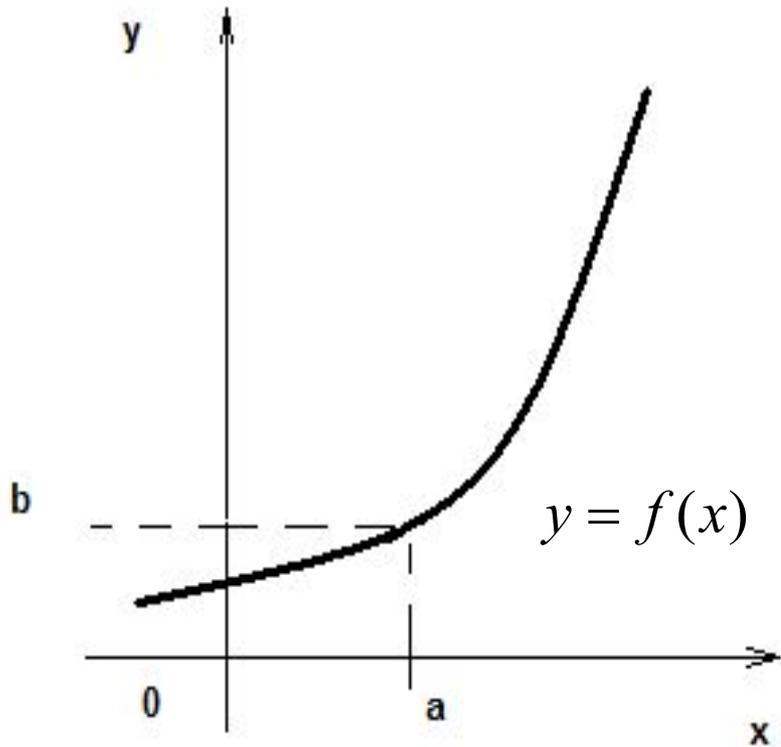
Рассмотрим каждый из этих графиков подробнее:



Для функции $y = f(x)$,
график которой изображен на
этом рисунке, значение $f(a)$
не существует, функция
в указанной точке не
определена.



Для функции $y = f(x)$
график которой изображен на
этом рисунке, значение $f(a)$
существует, но оно
отличное от, казалось бы,
естественного значения b ,
точка (a, b) как бы
выколота.



Для функции $y = f(x)$,
график которой изображен на
этом рисунке, значение $f(a)$
существует и оно вполне
естественное.

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

которую читают: «предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b ».

Содержательный смысл этой фразы следующий: если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению $x = a$, то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения b .

Или можно сказать так: в достаточно малой окрестности точки a справедливо приближенное равенство:

$$f(x) \approx f(a)$$

При этом сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения.

Прежде чем перейти к разбору решений примеров заметим, что если предел функции

$y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$, то в таком случае функцию называют **непрерывной**.

График такой функции представляет собой сплошную линию, **без «проколов» и «скачков»**.

Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной на промежутке** X , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Примерами непрерывных функций на всей числовой прямой являются: $y = C$, $y = kx + b$, $y = ax^2 + by + c$,
 $y = |x|$, $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$,
Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0, +\infty)$, а
функция $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ непрерывна на промежутках
 $(-\infty, 0) \boxtimes (0, +\infty)$.

Предел функции в точке

Число **b** называется пределом функции в точке **a** , если для всех значений **x** , достаточно близких к **a** и отличных от **a** , значение функции **$f(x)$** сколь угодно мало отличается

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

b .

Теорема.

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 , то этот предел **единственный**.

Бесконечно малая функция и бесконечно большая функция.

- ▶ Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$ (здесь a – конечное число или ∞), если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

- ▶ Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (или бесконечно большой величиной) при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Графическая иллюстрация

$$x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow \infty \rightarrow y = \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

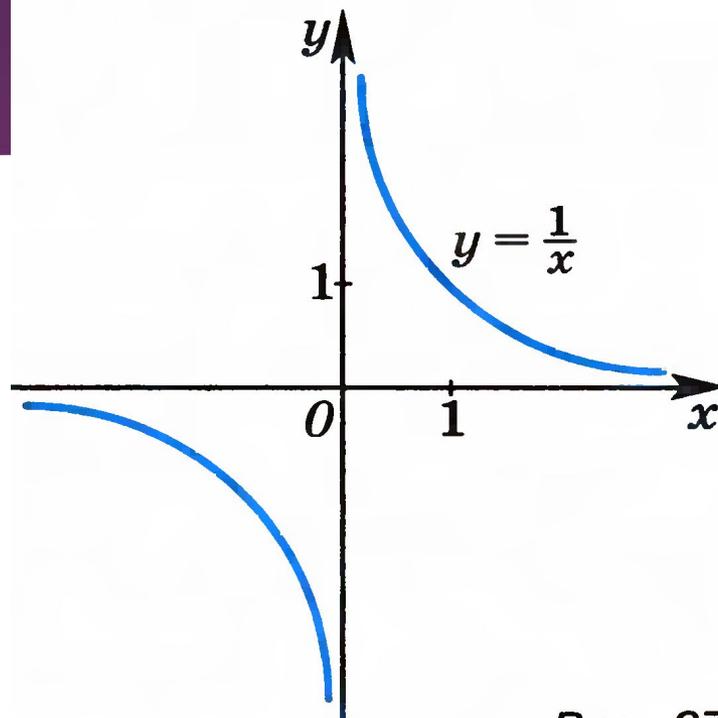


Рис. 37

Таким образом, величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая, и наоборот.

ТЕОРЕМА 1.

Предел **СУММЫ** (разности) 2-х функций равен **СУММЕ** (разности) их пределов, если последние существуют

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

ТЕОРЕМА 2.

Предел константы равен самой этой константе.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$$

ТЕОРЕМА 3.

Предел ПРОИЗВЕДЕНИЯ 2-х функций равен ПРОИЗВЕДЕНИЮ их пределов, если последние существуют

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

ТЕОРЕМА 4.

Предел ОТНОШЕНИЯ 2-х функций равен ОТНОШЕНИЮ их пределов, если последние существуют и ПРЕДЕЛ ЗНАМЕНАТЕЛЯ ОТЛИЧЕН ОТ 0:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

ТЕОРЕМА 5.

Постоянный множитель
можно выносить за знак
предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

ТЕОРЕМА 6.

Предел степени переменного равен той же степени предела основания:

$$\lim_{x \rightarrow a} (z^n) = \left(\lim_{x \rightarrow a} z \right)^n$$



Вычисление
предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

$$\frac{C}{0} = \infty \quad \frac{C}{\infty} = 0$$

то предел будет равен:

Вычислить

пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 4) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 4 = -8;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x} = 2;$$

Примеры

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1,5.$$

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty - \infty$$

Эти выражения называются *неопределенности*, а вычисление пределов в этом случае называется *раскрытие неопределенности*.

Упражнения:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 3x^2}{2x^2 + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{6 - x}{3 - \sqrt{x + 3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{1 + 2x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 5x - 12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(7x + 2)(4x - 3)(5x + 1)]$$

Домашнее задание:

188.1) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 4);$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 + x^2 + 8x + 10);$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 2};$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x^2 + 1);$

4) $\lim_{x \rightarrow 2} ((x^2 - 1)(x - 3)(x - 5));$

6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}.$

189.1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x - 6};$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2};$

5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3x^2 + 2x};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{x};$

6) $\lim_{x \rightarrow (-3/2)} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3};$