Раздел 3.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Дисциплина:

Элементы высшей математики

Преподаватель: Трушакова Е.А.

Матрицы, определители

Требования к знаниям и умениям.

Матрица. Операции над матрицами: умножение матрицы на число, сложение, вычитание, умножение матриц. Определитель матрицы. Вычисление определителя матрицы. Свойства определителя матрицы. Обратная матрица. Нахождение обратной матрицы.

Основные сведения о матрицах

Определение 1. Прямоугольная таблица чисел $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется **матрицей** с m – строками и n – столбцами (типа $m \times n$).

Если $m = n$ т.е. число строк совпадает с числом столбцов, то матрица называется **квадратной матрицей** порядка n, диагональ этой матрицы идущая от левого верхнего угла к правому нижнему углу называется **главной диагональю** (т.е. $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$).

Основные сведения о матрицах

Обозначение. *Матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита, например: A, B, C, ..., а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца.*

Примеры.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица типа 3×2;

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица типа 2×3;

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -6 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица типа 3×3.

Основные сведения о матрицах

Определение 2. Две матрицы называются **равными**, если они имеют одинаковый размер и все их соответствующие элементы совпадают.

Определение 3. Матрица, все элементы которой на главной диагонали равны 1, а остальные нули называется **единичной** и обозначается **E**.

Примеры.

1. $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **2.** $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение 4. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается $0_{m\times n}$.

Основные сведения о матрицах

Определение 5. Матрица, все элементы которой не стоящие на главной диагонали равны нулю, называется **диагональной**.

Примеры.

1. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **2.** $K = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; **3.** $C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Операции над матрицами

Умножение матрицы на число

Определение 1. Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ **на число** λ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{n\times m}$ того же размера, у которой $c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$.

Замечание 1. *Каждый элемент матрицы умножается на число* λ.

Примеры.

1. $2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 6 & 1\\ 9 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -6\\ 0 & 12 & 2\\ 18 & 4 & 6\end{pmatrix}$; **2.** $-1\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & -4\\ -5 & -6\end{pmatrix}$

Операции над матрицами

Сложение матриц

Определение 2. **Суммой** двух матриц $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{n\times m}$ одного и того же размера называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{n\times m}$ того же размера, у которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Замечание 2. *Матрицы складываются поэлементно.*

Примеры.

1. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & 7 & 4\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$ – не имеет смысла;

2. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 6 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 6 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 9 & 5\\ 11 & 10\end{pmatrix}$

Операции над матрицами

Умножение матриц

Определение 3. Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ размера $n\times m$ и матрицы $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times k}$ размера $m\times k$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{n\times k}$ у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов $i-$ой строки матрицы A на соответствующие элементы $j-$го столбца матрицы B.

Замечание. *Произведением размера $n\times m$ и матрицы размера $m\times k$ является матрица размера $n\times k$, т.е.*

$$n\times\boxed{\begin{array}{c} m \\ m \end{array}}\times k = n\times k$$

Умножение матрицами

Примеры.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot1 & 1\cdot4+2\cdot0 \\ 3\cdot1+4\cdot1 & 3\cdot4+4\cdot0 \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}_{2\times2}$;

2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 11 & -9 & 14 \\ -10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{1\times3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times1} = 20$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{2\times1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Умножение матрицами

Свойства умножения матриц

1. Умножение не перестановочно т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 11 & -9 & 14 \\ -10 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

а

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 12 \\ 16 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из примера видно, что результаты умножения в первом и втором случае не совпадают.

2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

4. $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B$

Определители квадратных матриц

Определители матриц второго и третьего порядка

Определение 1. Определителем квадратной матрицы второго порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

называется число $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$. (1)

Пример. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 1-6\cdot 5=2-30=-28.$

Определители квадратных матриц

Определение 2. Определителем квадратной матрицы третьего порядка

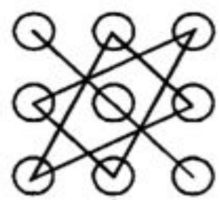
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \quad (2)$$

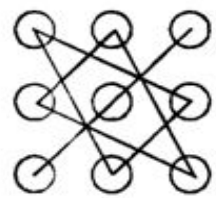
Определители квадратных матриц

Замечание 1. *Правая часть формулы (2) представляет собой алгебраическую сумму шести слагаемых, каждое из которых является произведением трех элементов, расположенных в разных строках и разных столбцах матрицы. Соединбив линией элементы каждого произведения, получим две легко запоминающиеся схемы, которые позволяют определить знаки слагаемых и элементы, входящие в них сомножителями:*



+

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$



−

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 4\cdot8\cdot3 + 2\cdot6\cdot7 - 3\cdot5\cdot7 - 2\cdot4\cdot9 - 6\cdot8\cdot1 = 0.$$