

Раздел 3.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С
ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ
ГЕОМЕТРИИ

Дисциплина:

Элементы высшей математики

Преподаватель: Трушакова Е.А.

Матрицы, определители

Требования к знаниям и умениям.

Матрица. Операции над матрицами: умножение матрицы на число, сложение, вычитание, умножение матриц. Определитель матрицы. Вычисление определителя матрицы. Свойства определителя матрицы. Обратная матрица. Нахождение обратной матрицы.

Основные сведения о матрицах

Определение 1. Прямоугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей**

с m – строками и n – столбцами (типа $m \times n$).

Если $m = n$ т.е. число строк совпадает с числом столбцов, то матрица называется **квадратной матрицей** порядка n , диагональ этой матрицы идущая от левого верхнего угла к правому нижнему углу называется **главной диагональю** (т.е. $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$).

Основные сведения о матрицах

Обозначение. Матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита, например: A, B, C, \dots , а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij} , где i – номер строки, j – номер столбца.

Примеры.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица типа 3×2 ;

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица типа 2×3 ;

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -6 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица типа 3×3 .

Основные сведения о матрицах

Определение 2. Две матрицы называются **равными**, если они имеют одинаковый размер и все их соответствующие элементы совпадают.

Определение 3. Матрица, все элементы которой на главной диагонали равны 1, а остальные нули называется **единичной** и обозначается **E**.

Примеры.

$$1. E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2. E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 4. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается $0_{m \times n}$.

Основные сведения о матрицах

Определение 5. Матрица, все элементы которой не стоящие на главной диагонали равны нулю, называется **диагональной**.

Примеры.

$$1. D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2. K = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad 3. C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Операции над матрицами

Умножение матрицы на число

Определение 1. Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{n \times m}$ на число λ называется матрица $C = (c_{ij})_{n \times m}$ того же размера, у которой $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

Замечание 1. Каждый элемент матрицы умножается на число λ .

Примеры.

$$1. \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & 2 \\ 18 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad 2. \quad -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами

Сложение матриц

Определение 2. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{n \times m}$ и $B = (b_{ij})_{n \times m}$ одного и того же размера называется матрица $C = (c_{ij})_{n \times m}$ того же размера, у которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Замечание 2. Матрицы складываются поэлементно.

Примеры.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ — не имеет смысла;

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 5 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$

Операции над матрицами

Умножение матриц

Определение 3. Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{n \times m}$ размера $n \times m$ и матрицы $B = (b_{ij})_{m \times k}$ размера $m \times k$ называется матрица $C = (c_{ij})_{n \times k}$ у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

Замечание. Произведением размера $n \times m$ и матрицы размера $m \times k$ является матрица размера $n \times k$, т.е.

$$\begin{array}{|c|} \hline n \times \boxed{m} \\ \hline \end{array} \times k = n \times k$$

Умножение матрицами

Примеры.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}_{2 \times 2};$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 11 & -9 & 14 \\ -10 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

$$3. (1 \ 2 \ 3)_{1 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = 20;$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицами

Свойства умножения матриц

1. Умножение не перестановочно т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 11 & -9 & 14 \\ -10 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

а

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 12 \\ 16 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из примера видно, что результаты умножения в первом и втором случае не совпадают.

2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

4. $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B$

Определители квадратных матриц

Определители матриц второго и третьего порядка

Определение 1. Определителем квадратной матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

называется число $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$. (1)

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 6 \cdot 5 = 2 - 30 = -28.$$

Определители квадратных матриц

Определение 2. Определителем квадратной матрицы третьего порядка

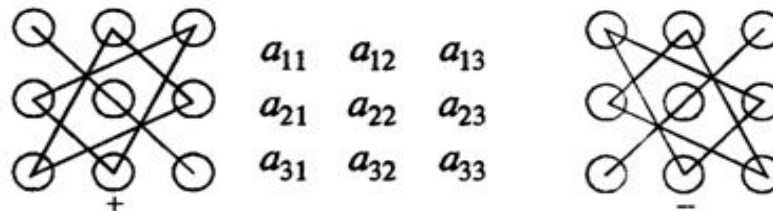
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \quad (2)$$

Определители квадратных матриц

Замечание 1. Правая часть формулы (2) представляет собой алгебраическую сумму шести слагаемых, каждое из которых является произведением трех элементов, расположенных в разных строках и разных столбцах матрицы. Соединив линией элементы каждого произведения, получим две легко запоминающиеся схемы, которые позволяют определить знаки слагаемых и элементы, входящие в них сомножителями:



Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 1 = 0.$$