

ДУ с разделяющимися переменными

1. ДУ с разделенными переменными.

$$y' = f(x) \Rightarrow$$

$$y = \int f(x) dx + C$$

или $f(x) dx + \phi(y) dy = 0 \Rightarrow$

$$\int \phi(y) dy + \int f(x) dx = C$$

2. ДУ с разделяющимися переменными.

$$M_1(x) N_1(y) dx + M_2(x) N_2(y) dy = 0 \Rightarrow \text{Разделить на } N_1(y) M_2(x) \neq 0 \Rightarrow$$

Общий интеграл:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C$$

2'. ДУ приводящееся к ДУ с разделяющимися переменными.

$$y' = f(ax + by + c) \quad \text{Замена : } z = ax + by + c \Rightarrow z' = bf(z) + a$$

Общий интеграл:

$$\int \frac{dz}{bf(z) + a} = x + C$$

Однородные ДУ

Определение. Функция $M(x, y)$ называется **однородной** измерения (степени) m , если при любом t справедливо равенство

$$M(tx, ty) = t^m \cdot M(x, y).$$

Определение. Уравнение I-го порядка $y' = f(x, y)$ называется **однородным** относительно x и y , если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения.

Определение. ДУ

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

является однородным относительно x и y , если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ - однородные функции одного и того же измерения.

Таблица

3. Однородные ДУ.

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \Rightarrow \text{Замена : } y = tx, \quad y' = t'x + t$$

$$\text{или } y' = f(y/x) \Rightarrow \text{Замена : } t = y/x$$

4. ДУ приводящееся к однородным.

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \quad \text{если} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{Замена : } \begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases} \quad ((x_0, y_0) - \text{const}) : \begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

5. ДУ приводящееся к ДУ с разделяющимися переменными.

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \quad \text{если} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Замена : } z = a_1x + b_1y \quad z' = a_1 + b_1y'$$

Линейные ДУ первого порядка

Определение. ДУ первого порядка, линейное относительно неизвестной функции и ее производной называется **линейным ДУ первого порядка**.

В общем случае м.б. записано в виде:

$$y' + p(x)y = f(x).$$

Если $f(x) = 0$, то линейное ДУ называется **однородным линейным ДУ**.

Если $f(x) \neq 0$, то линейное ДУ называется **неоднородным линейным ДУ**.

6. Линейные ДУ.

1) Метод Лагранжа (метод вариации постоянной)

а) Ищем решение ЛОДУ.

б) Полагаем $C = C(x)$.

2) Метод Бернулли (подстановки)

Замена : $y = u(x)v(x)$ Решаем систему

$$\begin{cases} y' = u'v + uv' \\ \begin{cases} v' + p(x)v = 0 & - a) \\ u'v = f(x) & - б) \end{cases} \end{cases}$$

ДУ с разделяющимися переменными

7. Уравнения Бернулли.

1 способ \Rightarrow Замена : $t = y^{1-n}$, $t' = (1 - n) y^{-n} y'$

$$y' + p(x)y = f(x)y^n$$

2 способ \Rightarrow Метод Бернулли

Замена : $y = u(x)v(x)$, Решаем систему
 $y' = u'v + uv'$

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 & - a) \\ u'v = f(x)u^n v^n & - б) \end{cases}$$

8. ДУ в полных дифференциалах

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

ДУ в полных дифференциалах

Теорема. (о существовании и единственности решения ДУ в полных дифференциалах) Пусть функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в области D плоскости Oxy и имеют в ней непрерывные частные производные $\partial M / \partial y$ и $\partial N / \partial x$. Для того, чтобы выражение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$ необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

При этом функция $u(x, y)$ может быть найдена по одной из следующих формул, (x_0, y_0) – любая точка области D

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy$$

Таблица 1

Бер Л.М.

Дифференциальные уравнения первого порядка

№	Название ДУ	Вид ДУ	Определяющий признак	Замена	Способ решения
1	С разделенными переменными	$y' = f(x)$ [или $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$]	Функция при dx зависит только от x , при dy зависит только от y	-	Проинтегрировать каждое слагаемое в уравнении
2	С разделяющимися переменными	$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ [или $y' = f_1(x)f_2(y)$]	Функции при dx и dy распадаются на произведения функций, зависящих от одной из переменных	-	Разделить уравнение на произведение $N_1(y)M_2(x) \neq 0$.
2'	Уравнения, приводящиеся к ДУ с разделяющимися переменными	$y' = f(ax + by + c)$		$z = ax + by + c$ $z' = x + by'$	\Rightarrow ДУ с разделяющимися переменными относительно $z(x)$: $z' = bf(z) + a$
3	Однородные уравнения	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ [или $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$]	Функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ однородные функции одного и того же измерения	$t = \frac{y}{x}$ $\left(\begin{array}{l} y = tx, \\ y' = t'x + t \end{array} \right)$	\Rightarrow ДУ с разделяющимися переменными относительно $t(x)$
4	Уравнения, приводящиеся к однородным ДУ	$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$	$\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}$ $((x_0, y_0) - const)$ $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$	\Rightarrow однородное ДУ: $\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$

Таблица 1

Бер Л.М.

№	Название ДУ	Вид ДУ	Определяющий признак	Замена	Способ решения
5	Уравнения, приводящиеся к ДУ с разделяющимися переменными	$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$	$z = a_1x + b_1y$ $z' = a_1 + b_1y'$	\Rightarrow ДУ с разделяющимися переменными
6	Линейные уравнения	$y' + p(x)y = f(x)$ [или $x' + p(y)x = f(y)$]	Искомая функция и ее производная входят в уравнение в 1-ой степени и между собой не перемножаются	1) Метод Лагранжа - 2) Метод Бернулли $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$	1) Метод Лагранжа а) Ищем решение ЛОДУ $y' + p(x)y = 0$ б) полагаем $\underline{C} = C(x)$ 2) Метод Бернулли $\begin{cases} v' + p(x)v = 0 & - a) \\ u'v = f(x) & - б) \end{cases}$
7	Уравнения Бернулли	$y' + p(x)y = f(x)y^n$ ($n \neq 1, n \neq 0$) [или $x' + p(y)x = f(y)x^n$]		1) $t = y^{1-n}$, $t' = (1-n)y^{-n}y'$ 2) Метод Бернулли $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$	1) \Rightarrow ЛНДУ относительно t и t' $t' + (1-n) \cdot p(x) \cdot t = (1-n) \cdot f(x)$ 2) Метод Бернулли $\begin{cases} v' + p(x)v = 0 & - a) \\ u'v = f(x)u^n v^n & - б) \end{cases}$
8	Уравнения в полных дифференциалах	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$	$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$	-	$du(x, y) = 0 \Rightarrow u(x, y) = C$ $u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy$ $\left(\begin{array}{c} \text{или} \\ u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy \end{array} \right)$ (x_0, y_0) произвольная точка области D

Частные случаи ДУ $F(x, y, y')=0$

1. ДУ вида

$$(y')^n + p_1(y')^{n-1} + \dots + p_{n-1}(y') + p_n y = 0,$$

где $p_i = p_i(x, y)$, $n \in \mathbf{N}$ называется **ДУ первого порядка степени n** .

Если удастся разрешить относительно y' (полагая $y' = t$), то

$$y' = f_1(x, y, C), \quad y' = f_2(x, y, C), \dots, \quad y' = f_k(x, y, C) \quad (k \leq n).$$

Для каждого из уравнений найдем общий интеграл:

$$\Phi_1(x, y, C) = 0, \quad \Phi_2(x, y, C) = 0, \quad \dots, \quad \Phi_k(x, y, C) = 0$$

Общий интеграл ДУ записывается в виде:

$$\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) \cdot \dots \cdot \Phi_k(x, y, C) = 0$$

2. ДУ не содержит явно x и y

$$F(y') = 0.$$

Общий интеграл ДУ записывается в виде:

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0$$

Частные случаи ДУ $F(x, y, y')=0$

3. ДУ не содержит явно искомой функции y

$$F(x, y') = 0.$$

Замена :
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

Общее решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \end{cases}$$

4. ДУ не содержит x

$$F(y, y') = 0.$$

Замена :
$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

Общее решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

Частные случаи ДУ первого порядка $F(x, y, y')$

№	Вид ДУ	Замена	Решение
1	$(y')^n + p_1(y')^{n-1} + \dots + p_{n-1}(y') + p_n y = 0,$ где $p_i = p_i(x, y), n \in \mathbb{N}$	-	Если удастся разрешить относительно y' , то $y' = f_1(x, y), y' = f_2(x, y), \dots, y' = f_k(x, y), k \leq n \Rightarrow$ для каждого из уравнений найден общий интеграл $\Phi_1(x, y, C) = 0, \Phi_2(x, y, C) = 0, \dots, \Phi_k(x, y, C) = 0.$ Общий интеграл ДУ записывается в виде $\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) \cdot \Phi_k(x, y, C) = 0.$
2	$F(y') = 0,$ - отсутствует x, y	-	$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$
3	$F(x, y') = 0,$ - отсутствует y	$x = \varphi(t),$ $y' = \psi(t)$	$dy = y' dx, dx = \varphi'(t) dt,$ $\Rightarrow dy = \psi(t) \varphi'(t) dt, y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C.$ Общее решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C. \end{cases}$
4	$F(y, y') = 0,$ - отсутствует x	$y = \varphi(t),$ $y' = \psi(t)$	$dy = \varphi' dt, y = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt, x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C.$ Общее решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$



Спасибо за внимание