ДУ с разделяющимися переменными

1. ДУ с разделенными переменными.

$y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \int f(x)dx + C}$

или $f(x)\,dx + \phi(y)\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int \varphi(y)dy + \int f(x)dx = C}$

2. ДУ с разделяющимися переменными.

$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \quad \Rightarrow$ Разделить на $N_1(y)\,M_2(x) \neq 0 \Rightarrow$

Общий интеграл: $\boxed{\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C}$

2 ′. ДУ приводящееся к ДУ с разделяющимися переменными.

$y' = f(ax + by + c)$ **Замена :** $z = ax + by + c \quad \Rightarrow \quad z' = b\,f(z) + a$

Общий интеграл: $\boxed{\int \frac{dz}{bf(z) + a} = x + C}$

Бер Л.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения ГОУ ВПО НИ ТПУ Рег. №189 от

Однородные ДУ

Определение. Функция $M\,(x, y)$ называется однородной измерения (степени) m, если при любом t справедливо равенство

$$\boldsymbol{M\,(t\,x, t\,y) = t^{\,m} \cdot M\,(x, y)}.$$

Определение. Уравнение I-го порядка $\boldsymbol{y' = f\,(x, y)}$ называется однородным относительно $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, если функция $\boldsymbol{f\,(x, y)}$ есть однородная функция нулевого измерения.

Определение. ДУ

$$\boldsymbol{M\,(x, y)\,d\,x + N\,(x, y)\,d\,y = 0}$$

является однородным относительно x и y, если функции $M\,(x, y)$ и $N\,(x, y)$ - однородные функции одного и того же измерения.

Таблица

3. Однородные ДУ.

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \Rightarrow$ **Замена :** $y = tx, \quad y' = t'x + t$

или $y' = f(y/x) \Rightarrow$ **Замена :** $t = y/x$

4. ДУ приводящееся к однородным.

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2},\ \text{если} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Замена : $\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases} \quad ((x_0, y_0) - const): \quad \begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$

5. ДУ приводящееся к ДУ с разделяющимися переменными.

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2},\ \text{если} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Замена : $z = a_1x + b_1y \qquad z' = a_1 + b_1y'$

Линейные ДУ первого порядка

Определение. ДУ первого порядка, линейное относительно неизвестной функции и ее производной называется **линейным ДУ первого порядка.**

В общем случае м.б. записано в виде:

$$y' + p(x)\,y = f(x).$$

Если $f(x) = 0$, то линейное ДУ называется **однородным линейным ДУ**.

Если $f(x) \neq 0$, то линейное ДУ называется **неоднородным линейным ДУ**.

6. Линейные ДУ.

1) **Метод Лагранжа** (метод вариации постоянной)

а) Ищем решение ЛОДУ.

б) Полагаем $C = C(x)$.

2) **Метод Бернулли** (подстановки)

Замена : $y = u(x)v(x),$ **Решаем систему**

$$y' = u'v + uv'$$

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 & -a) \\ u'v = f(x) & -б) \end{cases}$$

ДУ с разделяющимися переменными

7. Уравнения Бернулли.

1 способ $\Rightarrow$ **Замена :** $t = y^{1-n}$, $t' = (1 - n)\, y^{-n}\, y'$

$$y' + p(x)\, y = f(x)\, y^{n}$$

2 способ $\Rightarrow$ **Метод Бернулли**

Замена : $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$ **Решаем систему** $\begin{cases} v' + p(x)v = 0 & -a) \\ u'v = f(x)u^{n}v^{n} & -б) \end{cases}$

8. ДУ в полных дифференциалах

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

ДУ в полных дифференциалах

Теорема. (*о существовании и единственности решения ДУ в полных дифференциалах*) Пусть функции $\boldsymbol{M(x, y)}$ и $\boldsymbol{N(x, y)}$ определены и непрерывны в области D плоскости Oxy и имеют в ней непрерывные частные производные $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$. Для того, чтобы выражение

$$\boldsymbol{M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy}$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u\ (x, y)$ необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

При этом функция $u\ (x, y)$ может быть найдена по одной из следующих формул, (x_0, y_0) – любая точка области D

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$$

или

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy$$

Таблица 1 Бер Л.М.

Дифференциальные уравнения первого порядка

№	Название ДУ	Вид ДУ	Определяющий признак	Замена	Способ решения
1	С разделенными переменными	$y' = f(x)$ $\left[или\ \ M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \right]$	Функция при dx зависит только от x, при dy зависит только от y	-	Проинтегрировать каждое слагаемое в уравнении
2	С разделяющимися переменными	$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy =$ $\left[или\ \ y' = f_1(x) f_2(y) \right]$	Функции при dx и dy распадаются на произведения функций, зависящих от одной из переменных	-	Разделить уравнение на произведение $N_1(y)M_2(x) \neq 0$.
2'	Уравнения, приводящиеся к ДУ с разделяющимися переменными	$y' = f(ax + by + c)$		$z = ax + by + c$ $z' = x + by'$	$\Rightarrow$ДУ с разделяющимися переменными относительно $z(x)$: $z' = b\,f(z) + a$
3	Однородные уравнения	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ $\left[или\ \ y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \right]$	Функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ однородные функции одного и того же измерения	$t = \frac{y}{x}$ $\begin{pmatrix} y = tx, \\ y' = t'x + t \end{pmatrix}$	$\Rightarrow$ДУ с разделяющимися переменными относительно $t(x)$
4	Уравнения, приводящиеся к однородным ДУ	$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$	$\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}$ $((x_0, y_0) - const)$ $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$	$\Rightarrow$ однородное ДУ: $\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$

Таблица 1 Бер Л.М.

№	Название ДУ	Вид ДУ	Определяющий признак	Замена	Способ решения
5	**Уравнения, приводящиеся к ДУ с разделяющимися переменными**	$y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$	$z = a_1x + b_1y$ $z' = a_1 + b_1y'$	$\Rightarrow$ДУ с разделяющимися переменными
6	**Линейные уравнения**	$y' + p(x)y = f(x)$ $\left[или\ \ x' + p(y)x = f(y)\right]$	Искомая функция и ее производная входят в уравнение в 1-ой степени и между собой не перемножаются	1) Метод Лагранжа - 2) Метод Бернулли $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$ -	1) Метод Лагранжа а) Ищем решение ЛОДУ $y' + p(x)y = 0$ б) полагаем $C = C(x)$ 2) Метод Бернулли $\begin{cases} v' + p(x)v = 0 & -а) \\ u'v = f(x) & -б) \end{cases}$
7	**Уравнения Бернулли**	$y' + p(x)y = f(x)y^n$ $(n \neq 1,\ \ n \neq 0)$ $\left[или\ \ x' + p(y)x = f(y)x^n\right]$		1) $t = y^{1-n}$, $t' = (1-n)\,y^{-n}\,y'$ 2) Метод Бернулли $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$	1)$\Rightarrow$ ЛНДУ относительно t и t' $t' + (1-n)\cdot p(x)\cdot t = (1-n)\cdot f(x)$ 2) Метод Бернулли $\begin{cases} v' + p(x)v = 0 & -а) \\ u'v = f(x)u^n v^n & -б) \end{cases}$
8	**Уравнения в полных дифференциалах**	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$	-	$du(x,y) = 0 \ \Rightarrow\ \ u(x,y) = C$ $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$ $\left(\begin{array}{c} или \\ u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy \end{array}\right)$ (x_0, y_0) произвольная точка области D

Частные случаи ДУ $F\,(x, y, y')=0$

1. ДУ вида

$$(y')^n + p_1(y')^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(y') + p_n y = 0,$$

где $p_i = p_i\,(x, y)$, $n \in \boldsymbol{N}$ называется ***ДУ первого порядка степени n***.

Если удается разрешить относительно y' (полагая $y' = t$), то

$$y' = f_1(x, y, C), \quad y' = f_2(x, y, C), \ldots, \quad y' = f_k(x, y, C) \quad (k \le n).$$

Для каждого из уравнений найдем общий интеграл:

$$\Phi_1\,(x, y, C) = 0, \quad \Phi_2\,(x, y, C) = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_k\,(x, y, C) = 0$$

Общий интеграл ДУ записывается в виде:

$$\Phi_1\,(x, y, C) \cdot \Phi_2\,(x, y, C) \cdot \ldots \cdot \Phi_k\,(x, y, C) = 0$$

2. ДУ не содержит явно x и y

$$F\,(y') = 0.$$

Общий интеграл ДУ записывается в виде: $\boxed{F\left(\dfrac{y-C}{x}\right) = 0}$

Частные случаи ДУ *F* (*x*, *y*, *y*')=0

3. ДУ не содержит явно искомой функции *y*

$$F(x, y') = 0.$$

Замена : $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \psi(t) \end{cases}$

Общее решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \end{cases}$

4. ДУ не содержит *x*

$$F(y, y') = 0.$$

Замена : $\begin{cases} y = \varphi(t), \\ y' = \psi(t) \end{cases}$

Общее решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$

Таблица 2 Бер Л.М.

Частные случаи ДУ первого порядка $F(x, y, y')$

№	Вид ДУ	Замена	Решение
1	$(y')^n + p_1(y')^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(y') + p_n y = 0$, где $p_i = p_i(x, y), n \in N$	-	*Если удается разрешить относительно* y', *то* $y' = f_1(x,y),\ y' = f_2(x,y),\ldots,\ y' = f_k(x,y),\ k \le n \Rightarrow$ *для каждого из уравнений найден общий интеграл* $\Phi_1(x,y,C) = 0,\ \Phi_2(x,y,C) = 0,\ldots,\ \Phi_k(x,y,C) = 0$. *Общий интеграл ДУ записывается в виде* $\Phi_1(x,y,C) \cdot \Phi_2(x,y,C) \cdot \Phi_k(x,y,C) = 0$.
2	$F(y') = 0$, - отсутствует x, y	-	$F\left(\dfrac{y-C}{x}\right) = 0$
3	$F(x, y') = 0$, - отсутствует y	$x = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$	$dy = y'dx,\quad dx = \varphi'(t)dt$, $\Rightarrow dy = \psi(t)\varphi'(t)dt,\quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C$. *Общее решение в параметрическом виде*: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \end{cases}$
4	$F(y, y') = 0$, - отсутствует x	$y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$	$dy = \varphi' dt, y = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{y'} = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt,\quad x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C$. *Общее решение в параметрическом виде*: $\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$

Спасибо за внимание