



# Законы логики. равносильные преобразования.

Лекция 2

В. В. Гарбузов Воронеж: АПНОО «КВИВТ» 2022г

# Равносильные преобразования в логике высказываний

---

- **Логическая равносильность, законы логики.**
- **Равносильные преобразования в логике высказываний.**
- **Преобразование форм представления формул логики высказываний.**
- **Проблема дедукции в логике высказываний.**

# Логическая равносильность, законы логики.

---

- Два высказывания **равносильны**, если они одновременно истинны или одновременно ложны.
- Две формулы **равносильны** если их эквиваленция является тавтологией (общезначима).

$$F1 \leftrightarrow F2 \equiv 1$$

# Логическая равносильность, законы логики.

---

- **Равносильность** – это *отношение* между формулами и как отношение обладает свойствами ***рефлексивности, симметричности, транзитивности***.
- Равносильности логики высказываний называют ***законами логики***.
- Основные законы логики и основные тавтологии: законы Аристотеля, де Моргана, идемпотентности.

---

$\overline{\overline{X\overline{X}}}$  – закон противоречия.

$X \vee \overline{\overline{X}} = 1$  – закон исключённого третьего.

$\overline{\overline{\overline{X}}} = X$  – закон двойного отрицания.

$\overline{\overline{X\overline{Y}}} = \overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{Y}},$

$\overline{\overline{X \vee Y}} = \overline{\overline{X}} \overline{\overline{Y}}$  – закон де Моргана,

$X = X$ .

# Логическая равносильность, законы логики.

---

- **Алгебра** формул логики высказываний подобна алгебре множеств (законы коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности выполняются для алгебры высказываний).

# Законы

---

$X \vee YZ = (X \vee Y)(X \vee Z)$  – закон дистрибутивности относительно конъюнкции.  
ДИЗЪЮНКЦИИ

$X \vee YX = X$ ;  $X(X \vee Y) = X$  – закон поглощения

$XY \vee XY = Y$ ;  $(X \vee Y)(X \vee Y) = X$  – закон склеивания

$$\left. \begin{array}{ll} C \vee 1 = 1 & C \cdot 1 = C \\ C \vee 0 = C & C \cdot 0 = 0 \end{array} \right\} \text{ где } C \in \{X, \bar{X}\}$$

- 
- Если в равносильные формулы вместо какой-то переменной или подформулы подставить одну и ту же формулу, то полученные формулы останутся равносильными. Это обозначается так:

**$(X \parallel Y)$  или  $(X, Y)$**  – «вместо  $X$  подставить  $Y$ ».



# Принцип двойственности

---

- Две формулы, не содержащие знаков импликации и эквиваленции называют **двойственными**, если каждую из них можно получить из другой заменой символов конъюнкции, дизъюнкции, "0", "1" на символы дизъюнкции, конъюнкции, "1", "0".
- Принцип двойственности утверждает, что если две формулы равносильны, то и двойственные им формулы тоже равносильны.

# Дополнительные законы логики

---

- $PQ \rightarrow P$  – “конъюнкция сильнее каждого из его членов.”
- $P \rightarrow (P \vee Q)$  – “дизъюнкция слабее каждого из её членов.”
- $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$  – “истина из чего угодно.”
- $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$  – “из ложного всё что угодно.”
- “Перестановка посылок.”  $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \leftrightarrow [Q \rightarrow (P \rightarrow R)]$  – тавтология.
- “Объединение и разъединение посылок.”  $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \leftrightarrow [(PQ) \rightarrow R]$

# Равносильные преобразования в логике высказываний

---

- Замену одной формулы другой ей равносильной будем называть ***равносильным преобразованием*** данной формулы.
- Упрощение формулы уменьшает число высказывательных переменных или знаков операций (минимизация).

# Формулы равносильных преобразований

---

$\tilde{X} : \{X, \bar{X}\}$  – высказывательная переменная;  $\tilde{\bar{X}} : \{\bar{X}, X\}$

*Формула относительно конъюнкции:*

$$\tilde{X} \cdot F(\tilde{X}, \tilde{\bar{X}}, Z, W, \dots) = \tilde{\bar{X}} \cdot F(1, 0, Z, W, \dots)$$

Равносильность можно доказать путем подстановки вместо переменной соответствующих констант:

$$1 \cdot F(1, 0, Z, W, \dots) = 1 \cdot F(1, 0, Z, W, \dots);$$

$$0 \cdot F(0, 1, Z, W, \dots) = 0 \cdot F(1, 0, Z, W, \dots) = 0$$

# Формулы равносильных преобразований

---

*Формула относительно дизъюнкции:*

$$\tilde{X} \vee F(\tilde{X}, \overline{\tilde{X}}, Z, W, \dots) = \tilde{X} \vee F(0, 1, Z, W, \dots)$$

Равносильность также можно доказать путем подстановки вместо переменной соответствующих констант.

Пример: Доказать общезначимость.

$$\bullet P \rightarrow [Q \rightarrow PQ] = \overline{P} \vee \overline{Q} \vee PQ = \overline{P} \vee Q \vee \overline{Q} = 1$$

$$\bullet (P \rightarrow Q) \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)] = (\overline{P} \vee Q) \rightarrow [(\overline{Q} \vee R) \rightarrow (\overline{P} \vee R)] = \\ = \overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee \overline{(\overline{Q} \vee R)} \vee \overline{P} \vee R = P\overline{Q} \vee QR \vee \overline{P} \vee R = \overline{Q} \vee Q \vee \overline{P} \vee R = 1$$

$$\bullet [(P \rightarrow R)(Q \rightarrow R)] \rightarrow [(R \vee Q) \rightarrow R] = (\overline{P} \vee R)(\overline{Q} \vee R) \rightarrow \overline{(R \vee Q)} \vee R = \\ = \overline{(\overline{P} \vee R)(\overline{Q} \vee R)} \vee \overline{P} \vee \overline{Q} \vee R = P\overline{R} \vee Q\overline{R} \vee \overline{P} \vee \overline{Q} \vee R = P \vee Q \vee \overline{P} \vee \overline{Q} \vee R = P \vee Q \vee 1 \vee R = 1$$

$(P \rightarrow Q) \rightarrow [(P \rightarrow \overline{Q}) \rightarrow \overline{P}]$  – приведение к противоречию.

$(P \rightarrow Q)(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$  – цепное заключение.

# Преобразование форм представления формул логики высказываний

---

- **Скобочная форма**, образуется непосредственно после формализации высказывания
- **Дизъюнктивная нормальная форма** (ДНФ) – дизъюнкция элементарных конъюнкций.
- **Конъюнктивная нормальная форма** (КНФ) – конъюнкция элементарных дизъюнкций.
- КНФ также называют **клаузальная форма**.

# Преобразование форм представления формул логики высказываний

---

- **Клауза** – элементарная дизъюнкция.
- **Литера, литерал** – элементарное высказывание или его отрицание.
- **Дизъюнкт** – дизъюнкция конечного числа литералов.
- **Хорновский дизъюнкт** имеет не более одной не инверсной литеры.



---

- **Пример:**

$$PQR \rightarrow Z = \overline{PQR} \vee Z = \overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R} \vee Z$$

- Преобразование в КНФ обычно производится при помощи распределительного закона.
- СКНФ получают из КНФ путём добавления к каждому дизъюнту заведомо отрицательной литеры.

- 
- **Совершенная дизъюнктивная нормальная форма** (СДНФ) – в каждой элементарной конъюнкции имеются все  $n$  пропозициональных переменных.
  - **Совершенная конъюнктивная нормальная форма** (СКНФ) – в каждой элементарной дизъюнкции имеются все  $n$  пропозициональных переменных.

# Проблема дедукции в логике высказываний

---

- В логике помимо равносильности широко используется относительные следования.
- Формула  $S$  является **следствием** множества формул  $H$  ( $H \vdash S$ ) если при всех интерпретациях, при которых истинны все формулы из  $H$ , истинна также и формула  $S$ .
- **Тавтология** – следствие из пустого множества формул.

- 
- $S$  является следствием из  $H$  тогда и только тогда, когда  $H \rightarrow S \equiv 1$
  - $(H \vdash S) \leftrightarrow (H \rightarrow S) \equiv 1$
  - $\vdash (H \rightarrow S) \equiv 1$
  - $(H_1, H_2, \dots, H_n) \vdash S \leftrightarrow \vdash (H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_n) \rightarrow S$  – импликация из конъюнкций этих формул тоже общезначима.

- 
- **Фундаментальная проблема логики**: определить является ли  $S$  следствием из множества формул  $H$  (проблема дедукции).
  - Проблема описывается следующим выражением:
  - **$H \vee S \equiv 0$**  (невыполнимо)

- Следствие из множества формул  $H$  формулы  $S$  может быть доказано одним из двух путей:
- 

- Доказательство общезначимости

$$H_1 \vee \overline{H_2} \vee \overline{H_3} \dots \vee \overline{H_n} \vee S \equiv 1$$

- Доказательство

$$H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_n \cdot S \equiv 0$$

- Обычно используют второй путь.
- Иногда доказывают равносильность формул  $A$  и  $B$  если они являются следствием друг друга.

$$A \rightarrow B, B \rightarrow A \\ A \equiv B$$