# Законы логики. Равносильные преобразования.

Лекция 2

В. В. Гарбузов  Воронеж: АПНОО «КВИВТ» 2022г

# Равносильные преобразования в логике высказываний

- Логическая равносильность, законы логики.
- Равносильные преобразования в логике высказываний.
- Преобразование форм представления формул логики высказываний.
- Проблема дедукции в логике высказываний.

# Логическая равносильность, законы логики.

- Два высказывания ***равносильны***, если они одновременно истинны или одновременно ложны.
- Две формулы ***равносильны*** если их эквиваленция является тавтологией (общезначима).

$$F1 \leftrightarrow F2 \equiv 1$$

# Логическая равносильность, законы логики.

- **Равносильность** – это *отношение* между формулами и как отношение обладает свойствами ***рефлексивности, симметричности, транзинтивности***.
- Равносильности логики высказываний называют ***законами логики***.
- Основные законы логики и основные тавтологии: законы Аристотеля, де Моргана, идемпотентности.

$\overline{X\overline{X}}$ – *закон противоречия.*

$X \vee \overline{X} = 1$ – *закон исключённого третьего.*

$\overline{\overline{X}}=X$ – *закон двойного отрицания.*

$\overline{XY}=\overline{X} \vee \overline{Y}$,

$\overline{X \vee Y}=\overline{X}\,\overline{Y}$ – *закон де Моргана,*

$X=X.$

# Логическая равносильность, законы логики.

- ***Алгебра*** формул логики высказываний подобна алгебре множеств (законы коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности выполняются для алгебры высказываний).

# Законы

$x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ – закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции.

$x \vee yx = x$; $x(x \vee y) = x$ – закон поглощения

$xy \vee xy = y$; $(x \vee y)(x \vee y) = x$ – закон склеивания

$$\left.\begin{array}{ll} C \vee 1 = 1 & C \cdot 1 = C \\ C \vee 0 = C & C \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \text{где } C \in \{X, \overline{X}\}$$

- Если в равносильные формулы вместо какой-то переменной или подформулы подставить одну и ту же формулу, то полученные формулы останутся равносильными. Это обозначается так:

  **(Х || У) или (Х,У)** – «вместо Х подставить У».

# *Принцип двойственности*

- Две формулы, не содержащие знаков импликации и эквиваленции называют ***двойственными***, если каждую из них можно получить из другой заменой символов конъюнкции, дизъюнкции, “0”, “1” на символы дизъюнкции, конъюнкции, “1”, “0”.
- Принцип двойственности утверждает, что если две формулы равносильны, то и двойственные им формулы тоже равносильны.

# Дополнительные законы логики

- **PQ** $\rightarrow$ **P** – “конъюнкция сильнее каждого из его членов.”
- **P** $\rightarrow$ **(P** $\vee$ **Q)** – “дизъюнкция слабее каждого из её членов.”
- **P** $\rightarrow$ **(Q** $\rightarrow$ **P)** – “истина из чего угодно.”
- **P** $\rightarrow$ **(P** $\rightarrow$ **Q)** – “из ложного всё что угодно.”
- “Перестановка посылок.” **[P**$\rightarrow$ **(Q** $\rightarrow$ **R)]** $\leftrightarrow$ **[Q** $\rightarrow$ **(P** $\rightarrow$ **R)]** – тавтология.
- “Объединение и разъединение посылок.” **[P** $\rightarrow$ **(Q** $\rightarrow$ **R)]**$\leftrightarrow$**[(PQ)** $\rightarrow$ **R]**

# Равносильные преобразования в логике высказываний

- Замену одной формулы другой ей равносильной будем называть ***равносильным преобразованием*** данной формулы.
- Упрощение формулы уменьшает число высказывательных переменных или знаков операций (минимизация).

# Формулы равносильных преобразований

$\tilde{X}$ : {X, $\overline{X}$} – высказывательная переменная; $\tilde{\overline{X}}$ : {$\overline{X}$, X}

*Формула относительно конъюнкции:*

$$\tilde{X} \cdot F(\tilde{X}, \overline{\tilde{X}}, Z, W, \ldots) = \tilde{X} \cdot F(1, 0, Z, W, \ldots)$$

Равносильность можно доказать путем подстановки вместо переменной соответствующих констант:

$1 \cdot F(1, 0, Z, W, \ldots) = 1 \cdot F(1, 0, Z, W, \ldots)$ ;

$0 \cdot F(0, 1, Z, W, \ldots) = 0 \cdot F(1, 0, Z, W, \ldots) = 0$

# Формулы равносильных преобразований

*Формула относительно дизъюнкции:*

$$\tilde{X} \vee F(\tilde{X}, \overline{\tilde{X}}, Z, W, \ldots) = \tilde{X} \vee F(0, 1, Z, W, \ldots)$$

Равносильность также можно доказать путем подстановки вместо переменной соответствующих констант.

<u>Пример</u>: Доказать общезначимость.

- $P \to [Q \to PQ] = \overline{P} \vee \overline{Q} \vee PQ = \overline{P} \vee Q \vee \overline{Q} = 1$

- $(P \to Q) \to [(Q \to R) \to (P \to R)] = (\overline{P} \vee Q) \to [(\overline{Q} \vee R) \to (\overline{P} \vee R)] =$

$= (\overline{\overline{P} \vee Q}) \vee (\overline{\overline{Q} \vee R}) \vee \overline{P} \vee R = P\overline{Q} \vee QR \vee \overline{P} \vee R = \overline{Q} \vee Q \vee \overline{P} \vee R = 1$

- $[(P \to R)(Q \to R)] \to [(R \vee Q) \to R] = (\overline{P} \vee R)(\overline{Q} \vee R) \to \overline{(R \vee Q)} \vee R =$

$= \overline{(\overline{P} \vee R)(\overline{Q} \vee R)} \vee \overline{P}\,\overline{Q} \vee R = P\overline{R} \vee Q\overline{R} \vee \overline{P}\,\overline{Q} \vee R = P \vee Q \vee \overline{P}\,\overline{Q} \vee R = P \vee Q \vee 1 \vee R = 1$

$(P \to Q) \to [(P \to \overline{Q}) \to \overline{P}]$ – приведение к противоречию.
$(P \to Q)(Q \to R) \to (P \to R)$ – цепное заключение.

# Преобразование форм представления формул логики высказываний

- ***Скобочная форма***, образуется непосредственно после формализации высказывания
- ***Дизъюнктивная нормальная форма*** (ДНФ) – дизъюнкция элементарных конъюнкций.
- ***Конъюнктивная нормальная форма*** (КНФ) – конъюнкция элементарных дизъюнкций.
- КНФ также называют ***клаузальная*** форма.

# Преобразование форм представления формул логики высказываний

- ***Клауза*** – элементарная дизъюнкция.
- ***Литера, литерал*** – элементарное высказывание или его отрицание.
- ***Дизъюнкт*** – дизъюнкция конечного числа литералов.
- ***Хорновский дизъюнкт*** имеет не более одной не инверсной литеры.

- **Пример:**

$$PQR \to Z = \overline{PQR} \vee Z = \overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R} \vee Z$$

- Преобразование в КНФ обычно производится при помощи распределительного закона.
- СКНФ получают из КНФ путём добавления к каждому дизъюнту заведомо отрицательной литеры.

- ***Совершенная дизъюнктивная нормальная форма*** (СДНФ) – в каждой элементарной конъюнкции имеются все n пропозициональных переменных.
- ***Совершенная конъюнктивная нормальная форма*** (СКНФ) – в каждой элементарной дизъюнкции имеются все n пропозициональных переменных.

# Проблема дедукции в логике высказываний

- В логике помимо равносильности широко используется относительные следования.
- Формула S является ***следствием*** множества формул H ($H \vdash S$) если при всех интерпретациях, при которых истинны все формулы из H, истинна также и формула S.
- ***Тавтология*** – следствие из пустого множества формул.

- S является следствием из H тогда и только тогда, когда $H \rightarrow S \equiv 1$
- $(H \vdash S) \leftrightarrow (H \rightarrow S) \equiv 1$
- $\vdash (H \rightarrow S) \equiv 1$
- $(H1, H2, \ldots, Hn) \vdash S \leftrightarrow \vdash (H1 \cdot H2 \cdot \ldots \cdot Hn) \rightarrow S$ – импликация из конъюнкций этих формул тоже общезначима.

- ***Фундаментальная проблема логики***: определить является ли S следствием из множества формул H (проблема дедукции).
- Проблема описывается следующим выражением:
- $\mathbf{H \vee S \equiv 0}$ (невыполнимо)

- Следствие из множества формул H формулы S может быть доказано одним из двух путей:
- Доказательство общезначимости

$$\overline{H_1} \vee \overline{H_2} \vee \ldots \vee \overline{H_n} \vee S \equiv 1$$

- Доказательство

$$H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots \cdot H_n \cdot S \equiv 0$$

- Обычно используют второй путь.
- Иногда доказывают равносильность формул A и B если они являются следствием друг друга.

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow A$$

$$A \equiv B$$