Законы логики. Равносильные преобразования.

Лекция 2

В. В. Гарбузов Воронеж: АПНОО «КВИВТ» 2022г

Равносильные преобразования в логике высказываний

- **Логическая равносильность, законы логики.**
- **Равносильные преобразования в логике высказываний.**
- **Преобразование форм представления формул логики высказываний.**
- **Проблема дедукции в логике высказываний.**

Логическая равносильность, законы логики.

- Два высказывания ***равносильны***, если они одновременно истинны или одновременно ложны.
- Две формулы ***равносильны*** если их эквиваленция является тавтологией (общезначима).

$$F1 \leftrightarrow F2 \equiv 1$$

Логическая равносильность, законы логики.

- **Равносильность** – это *отношение* между формулами и как отношение обладает свойствами ***рефлексивности, симметричности, транзинтивности***.
- Равносильности логики высказываний называют ***законами логики***.
- Основные законы логики и основные тавтологии: законы Аристотеля, де Моргана, идемпотентности.

$\overline{X\overline{X}}$ – *закон противоречия*.

$X \vee \overline{X} = 1$ – *закон исключённого третьего*.

$\overline{\overline{X}}=X$ – *закон двойного отрицания*.

$\overline{XY}=\overline{X} \vee \overline{Y}$,

$\overline{X \vee Y}=\overline{X}\,\overline{Y}$ – *закон де Моргана*,

$X=X$.

Логическая равносильность, законы логики.

- ***Алгебра*** формул логики высказываний подобна алгебре множеств (законы коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности выполняются для алгебры высказываний).

Законы

X ∨ УZ = (X ∨ У)(X ∨ Z) – закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции.

X ∨ УX = X; X(X ∨ У) = X – закон поглощения

XУ ∨ XУ = У; (X ∨ У)(X ∨ У) = X – закон склеивания

$$\left.\begin{array}{ll} C \vee 1 = 1 & C \cdot 1 = C \\ C \vee 0 = C & C \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \text{где } C \in \{X, \overline{X}\}$$

- Если в равносильные формулы вместо какой-то переменной или подформулы подставить одну и ту же формулу, то полученные формулы останутся равносильными. Это обозначается так:

(Х || У) или (Х,У) – «вместо Х подставить У».

Принцип двойственности

- Две формулы, не содержащие знаков импликации и эквиваленции называют ***двойственными***, если каждую из них можно получить из другой заменой символов конъюнкции, дизъюнкции, “0”, “1” на символы дизъюнкции, конъюнкции, “1”, “0”.
- Принцип двойственности утверждает, что если две формулы равносильны, то и двойственные им формулы тоже равносильны.

Дополнительные законы логики

- $PQ \to P$ – “конъюнкция сильнее каждого из его членов.”
- $P \to (P \vee Q)$ – “дизъюнкция слабее каждого из её членов.”
- $P \to (Q \to P)$ – “истина из чего угодно.”
- $P \to (P \to Q)$ – “из ложного всё что угодно.”
- “Перестановка посылок.” $[P\to (Q \to R)] \leftrightarrow [Q \to (P \to R)]$ – тавтология.
- “Объединение и разъединение посылок.” $[P \to (Q \to R)]\leftrightarrow[(PQ) \to R]$

Равносильные преобразования в логике высказываний

- Замену одной формулы другой ей равносильной будем называть ***равносильным преобразованием*** данной формулы.
- Упрощение формулы уменьшает число высказывательных переменных или знаков операций (минимизация).

Формулы равносильных преобразований

$\tilde{X}: \{X, \overline{X}\}$ – высказывательная переменная; $\tilde{X}: \{\overline{X}, X\}$

Формула относительно конъюнкции:

$$\tilde{X} \cdot F(\tilde{X}, \overline{\tilde{X}}, Z, W, \ldots) = \tilde{X} \cdot F(1, 0, Z, W, \ldots)$$

Равносильность можно доказать путем подстановки вместо переменной соответствующих констант:

$1 \cdot F(1, 0, Z, W, \ldots) = 1 \cdot F(1, 0, Z, W, \ldots)$;

$0 \cdot F(0, 1, Z, W, \ldots) = 0 \cdot F(1, 0, Z, W, \ldots) = 0$

Формулы равносильных преобразований

Формула относительно дизъюнкции:

$$\tilde{X} \vee F(\tilde{X}, \overline{\tilde{X}}, Z, W, \ldots) = \tilde{X} \vee F(0, 1, Z, W, \ldots)$$

Равносильность также можно доказать путем подстановки вместо переменной соответствующих констант.

<u>Пример</u>: Доказать общезначимость.

- $P \to [Q \to PQ] = \overline{P} \vee \overline{Q} \vee PQ = \overline{P} \vee Q \vee \overline{Q} = 1$
- $(P \to Q) \to [(Q \to R) \to (P \to R)] = (\overline{P} \vee Q) \to [(\overline{Q} \vee R) \to (\overline{P} \vee R)] =$

$= \overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee \overline{(\overline{Q} \vee R)} \vee \overline{P} \vee R = P\overline{Q} \vee Q\overline{R} \vee \overline{P} \vee R = \overline{Q} \vee Q \vee \overline{P} \vee R = 1$

- $[(P \to R)(Q \to R)] \to [(R \vee Q) \to R] = (\overline{P} \vee R)(\overline{Q} \vee R) \to \overline{(R \vee Q)} \vee R =$

$= \overline{(\overline{P} \vee R)(\overline{Q} \vee R)} \vee \overline{P}\,\overline{Q} \vee R = P\overline{R} \vee Q\overline{R} \vee \overline{P}\,\overline{Q} \vee R = P \vee Q \vee \overline{P}\,\overline{Q} \vee R = P \vee Q \vee 1 \vee R = 1$

$(P \to Q) \to [(P \to \overline{Q}) \to \overline{P}]$ – приведение к противоречию.
$(P \to Q)(Q \to R) \to (P \to R)$ – цепное заключение.

Преобразование форм представления формул логики высказываний

- ***Скобочная форма,*** образуется непосредственно после формализации высказывания
- ***Дизъюнктивная нормальная форма*** (ДНФ) – дизъюнкция элементарных конъюнкций.
- ***Конъюнктивная нормальная форма*** (КНФ) – конъюнкция элементарных дизъюнкций.
- КНФ также называют ***клаузальная*** форма.

Преобразование форм представления формул логики высказываний

- ***Клауза*** – элементарная дизъюнкция.
- ***Литера, литерал*** – элементарное высказывание или его отрицание.
- ***Дизъюнкт*** – дизъюнкция конечного числа литералов.
- ***Хорновский дизъюнкт*** имеет не более одной не инверсной литеры.

- **Пример:**

$$PQR \rightarrow Z = \overline{PQR} \vee Z = \overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R} \vee Z$$

- Преобразование в КНФ обычно производится при помощи распределительного закона.
- СКНФ получают из КНФ путём добавления к каждому дизъюнту заведомо отрицательной литеры.

- ***Совершенная дизъюнктивная нормальная форма*** (СДНФ) – в каждой элементарной конъюнкции имеются все n пропозициональных переменных.
- ***Совершенная конъюнктивная нормальная форма*** (СКНФ) – в каждой элементарной дизъюнкции имеются все n пропозициональных переменных.

Проблема дедукции в логике высказываний

- В логике помимо равносильности широко используется относительные следования.
- Формула S является ***следствием*** множества формул H ($H \vdash S$) если при всех интерпретациях, при которых истинны все формулы из H, истинна также и формула S.
- ***Тавтология*** – следствие из пустого множества формул.

- S является следствием из H тогда и только тогда, когда $H \to S \equiv 1$
- $(H \vdash S) \leftrightarrow (H \to S) \equiv 1$
- $\vdash (H \to S) \equiv 1$
- $(H1, H2, \ldots, Hn) \vdash S \leftrightarrow \vdash (H1 \cdot H2 \cdot \ldots \cdot Hn) \to S$ – импликация из конъюнкций этих формул тоже общезначима.

- ***Фундаментальная проблема логики***: определить является ли S следствием из множества формул H (проблема дедукции).
- Проблема описывается следующим выражением:
- $\mathbf{H \lor S \equiv 0}$ (невыполнимо)

- Следствие из множества формул H формулы S может быть доказано одним из двух путей:
- Доказательство общезначимости

$$\overline{H_1} \vee \overline{H_2} \vee \dots \vee \overline{H_n} \vee S \equiv 1$$

- Доказательство

$$H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_n \cdot S \equiv 0$$

- Обычно используют второй путь.
- Иногда доказывают равносильность формул A и B если они являются следствием друг друга.

$$A \to B,\ B \to A$$

$$A \equiv B$$