



Законы логики. равносильные преобразования.

Лекция 2

В. В. Гарбузов Воронеж: АПНОО «КВИВТ» 2022г

Равносильные преобразования в логике высказываний

- **Логическая равносильность, законы логики.**
- **Равносильные преобразования в логике высказываний.**
- **Преобразование форм представления формул логики высказываний.**
- **Проблема дедукции в логике высказываний.**

Логическая равносильность, законы логики.

- Два высказывания **равносильны**, если они одновременно истинны или одновременно ложны.
- Две формулы **равносильны** если их эквиваленция является тавтологией (общезначима).

$$F1 \leftrightarrow F2 \equiv 1$$

Логическая равносильность, законы логики.

- **Равносильность** – это *отношение* между формулами и как отношение обладает свойствами ***рефлексивности, симметричности, транзитивности***.
- Равносильности логики высказываний называют ***законами логики***.
- Основные законы логики и основные тавтологии: законы Аристотеля, де Моргана, идемпотентности.

$\overline{\overline{X\overline{X}}}$ – закон противоречия.

$X \vee \overline{\overline{X}} = 1$ – закон исключённого третьего.

$\overline{\overline{\overline{X}}} = X$ – закон двойного отрицания.

$\overline{\overline{XY}} = \overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{Y}},$

$\overline{\overline{X \vee Y}} = \overline{\overline{X}} \overline{\overline{Y}}$ – закон де Моргана,

$X = X.$

Логическая равносильность, законы логики.

- **Алгебра** формул логики высказываний подобна алгебре множеств (законы коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности выполняются для алгебры высказываний).

Законы

$X \vee YZ = (X \vee Y)(X \vee Z)$ – закон дистрибутивности относительно конъюнкции.
ДИЗЪЮНКЦИИ

$X \vee YX = X$; $X(X \vee Y) = X$ – закон поглощения

$XY \vee XY = Y$; $(X \vee Y)(X \vee Y) = X$ – закон склеивания

$$\left. \begin{array}{ll} C \vee 1 = 1 & C \cdot 1 = C \\ C \vee 0 = C & C \cdot 0 = 0 \end{array} \right\} \text{ где } C \in \{X, \bar{X}\}$$

-
- Если в равносильные формулы вместо какой-то переменной или подформулы подставить одну и ту же формулу, то полученные формулы останутся равносильными. Это обозначается так:

$(X \parallel Y)$ или (X, Y) – «вместо X подставить Y ».

Принцип двойственности

- Две формулы, не содержащие знаков импликации и эквиваленции называют **двойственными**, если каждую из них можно получить из другой заменой символов конъюнкции, дизъюнкции, "0", "1" на символы дизъюнкции, конъюнкции, "1", "0".
- Принцип двойственности утверждает, что если две формулы равносильны, то и двойственные им формулы тоже равносильны.

Дополнительные законы логики

- $PQ \rightarrow P$ – “конъюнкция сильнее каждого из его членов.”
- $P \rightarrow (P \vee Q)$ – “дизъюнкция слабее каждого из её членов.”
- $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ – “истина из чего угодно.”
- $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ – “из ложного всё что угодно.”
- “Перестановка посылок.” $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \leftrightarrow [Q \rightarrow (P \rightarrow R)]$ – тавтология.
- “Объединение и разъединение посылок.” $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \leftrightarrow [(PQ) \rightarrow R]$

Равносильные преобразования в логике высказываний

- Замену одной формулы другой ей равносильной будем называть ***равносильным преобразованием*** данной формулы.
- Упрощение формулы уменьшает число высказывательных переменных или знаков операций (минимизация).

Формулы равносильных преобразований

$\tilde{X} : \{X, \bar{X}\}$ – высказывательная переменная; $\tilde{\bar{X}} : \{\bar{X}, X\}$

Формула относительно конъюнкции:

$$\tilde{X} \cdot F(\tilde{X}, \tilde{\bar{X}}, Z, W, \dots) = \tilde{\bar{X}} \cdot F(1, 0, Z, W, \dots)$$

Равносильность можно доказать путем подстановки вместо переменной соответствующих констант:

$$1 \cdot F(1, 0, Z, W, \dots) = 1 \cdot F(1, 0, Z, W, \dots);$$

$$0 \cdot F(0, 1, Z, W, \dots) = 0 \cdot F(1, 0, Z, W, \dots) = 0$$

Формулы равносильных преобразований

Формула относительно дизъюнкции:

$$\tilde{X} \vee F(\tilde{X}, \bar{\tilde{X}}, Z, W, \dots) = \tilde{X} \vee F(0, 1, Z, W, \dots)$$

Равносильность также можно доказать путем подстановки вместо переменной соответствующих констант.

Пример: Доказать общезначимость.

$$\bullet P \rightarrow [Q \rightarrow PQ] = \overline{P} \vee \overline{Q} \vee PQ = \overline{P} \vee Q \vee \overline{Q} = 1$$

$$\bullet (P \rightarrow Q) \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)] = (\overline{P} \vee Q) \rightarrow [(\overline{Q} \vee R) \rightarrow (\overline{P} \vee R)] = \\ = \overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee \overline{(\overline{Q} \vee R)} \vee \overline{P} \vee R = P\overline{Q} \vee QR \vee \overline{P} \vee R = \overline{Q} \vee Q \vee \overline{P} \vee R = 1$$

$$\bullet [(P \rightarrow R)(Q \rightarrow R)] \rightarrow [(R \vee Q) \rightarrow R] = (\overline{P} \vee R)(\overline{Q} \vee R) \rightarrow \overline{(R \vee Q)} \vee R = \\ = \overline{(\overline{P} \vee R)(\overline{Q} \vee R)} \vee \overline{P} \vee \overline{Q} \vee R = P\overline{R} \vee Q\overline{R} \vee \overline{P} \vee \overline{Q} \vee R = P \vee Q \vee \overline{P} \vee \overline{Q} \vee R = P \vee Q \vee 1 \vee R = 1$$

$(P \rightarrow Q) \rightarrow [(P \rightarrow \overline{Q}) \rightarrow \overline{P}]$ – приведение к противоречию.

$(P \rightarrow Q)(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$ – цепное заключение.

Преобразование форм представления формул логики высказываний

- **Скобочная форма**, образуется непосредственно после формализации высказывания
- **Дизъюнктивная нормальная форма** (ДНФ) – дизъюнкция элементарных конъюнкций.
- **Конъюнктивная нормальная форма** (КНФ) – конъюнкция элементарных дизъюнкций.
- КНФ также называют **клаузальная форма**.

Преобразование форм представления формул логики высказываний

- **Клауза** – элементарная дизъюнкция.
- **Литера, литерал** – элементарное высказывание или его отрицание.
- **Дизъюнкт** – дизъюнкция конечного числа литералов.
- **Хорновский дизъюнкт** имеет не более одной не инверсной литеры.

- **Пример:**

$$PQR \rightarrow Z = \overline{PQR} \vee Z = \overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R} \vee Z$$

- Преобразование в КНФ обычно производится при помощи распределительного закона.
- СКНФ получают из КНФ путём добавления к каждому дизъюнctu заведомо отрицательной литеры.

-
- **Совершенная дизъюнктивная нормальная форма** (СДНФ) – в каждой элементарной конъюнкции имеются все n пропозициональных переменных.
 - **Совершенная конъюнктивная нормальная форма** (СКНФ) – в каждой элементарной дизъюнкции имеются все n пропозициональных переменных.

Проблема дедукции в логике высказываний

- В логике помимо равносильности широко используется относительные следования.
- Формула S является **следствием** множества формул H ($H \vdash S$) если при всех интерпретациях, при которых истинны все формулы из H , истинна также и формула S .
- **Тавтология** – следствие из пустого множества формул.

-
- S является следствием из H тогда и только тогда, когда $H \rightarrow S \equiv 1$
 - $(H \vdash S) \leftrightarrow (H \rightarrow S) \equiv 1$
 - $\vdash (H \rightarrow S) \equiv 1$
 - $(H_1, H_2, \dots, H_n) \vdash S \leftrightarrow \vdash (H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_n) \rightarrow S$ – импликация из конъюнкций этих формул тоже общезначима.

-
- **Фундаментальная проблема логики**: определить является ли S следствием из множества формул H (проблема дедукции).
 - Проблема описывается следующим выражением:
 - **$H \vee S \equiv 0$** (невыполнимо)

- Следствие из множества формул H формулы S может быть доказано одним из двух путей:

○ Доказательство общезначимости

$$H_1 \vee \overline{H_2} \vee \dots \vee \overline{H_n} \vee S \equiv 1$$

- Доказательство

$$H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_n \cdot S \equiv 0$$

- Обычно используют второй путь.
- Иногда доказывают равносильность формул A и B если они являются следствием друг друга.

$$A \rightarrow B, B \rightarrow A \\ A \equiv B$$