

Создатели теории множеств (во второй половине XIX века)



- Георг Кантор (1845-1918)



- Рихард Дедекиннд (1831-1916)

Кванторы и обозначения в теории множеств

Квантор всеобщности: \forall - «для всех ...», «для каждого ...»

Квантор существования: \exists - «существует ...», «найдется ...»

Импликация: \Rightarrow

Принадлежность: \in

Что такое множество?

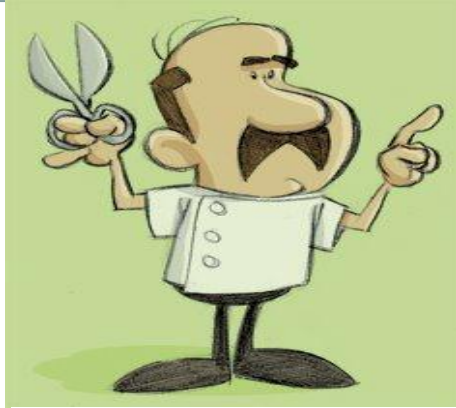


- «**Множество**» - это соединение в некое целое M определенных и хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества M). ©Георг Кантор
- «**Множество**» - это совокупность объектов, определенная некоторым правилом.
- Множество A является подмножеством множества B : $A \subset B$, если все элементы множества A принадлежат множеству B



- {все летающие бегемотики} \subset {все учащиеся «Ники»}
- Пустое множество \emptyset : множество, в котором нет элементов

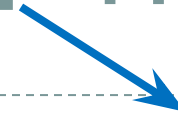
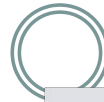
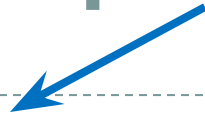
Парадокс брадобрее



- **Приказ командира:** брить тех и только тех, кто не бреется сам.
- $A = \{\text{те и только те, кто не бреется сам}\}$
- Вопрос: брадобрее $\in A$?
- Другая формулировка парадокса брадобрее
- Прилагательное называется рефлексивным, если оно само обладает свойством, которое определяет
- Примеры рефлексивных прилагательных: «русский», «трёхсложный»
- Примеры нерефлексивных прилагательных: «английский», «четырёхсложный»
- Вопрос. Если $B = \{\text{все рефлексивные прилагательные}\}$, то прилагательное «нерефлексивный» $\in B$ или нет?
- Вопрос-шутка: «трудновыговариваемый» $\in B$ или нет?



Пути разрешения парадоксов



Способ Кантора: «**Наивная теория множеств**»

Идея: разрешается работать со множествами, которые «встречаются в природе», а также с теми, которые получаются из них разумными теоретико-множественными операциями

Пример:

$A = \{\text{котики}\}$

$B = \{\text{бегемоты}\}$ (но не летающие!)

$A \cup B = \{\text{котики и бегемоты}\}$

Аксиоматический способ

Его развивали Цермело, Френкель, Гёдель, Бернайс

Идея: множество – это нечто, удовлетворяющее некоторому набору аксиом

Пример: **Аксиома выделения**

Для каждого множества A и каждого условия φ существует множество $B = \{x: x \in A, \varphi(x)\}$ - подмножество элементов A , удовлетворяющих условию φ .

То есть мы не можем взять

$C = \{\text{множество всех летающих бегемотиков со всего мира}\}$

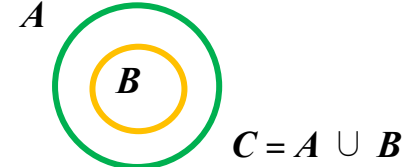
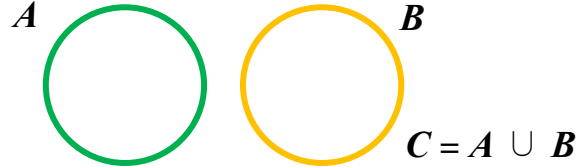
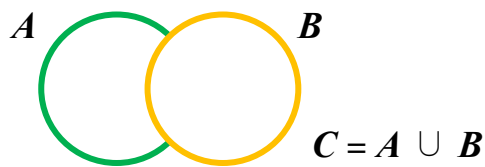
$D = \{\text{множество тех, кто не бреется}\}$

Операции над множествами

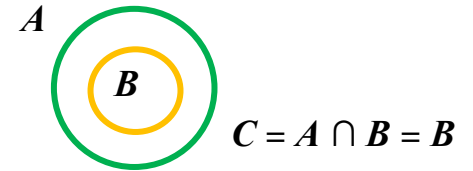
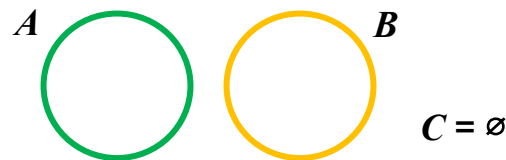
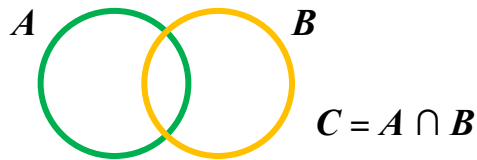


Объединение множеств

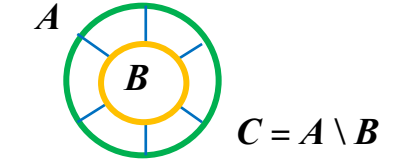
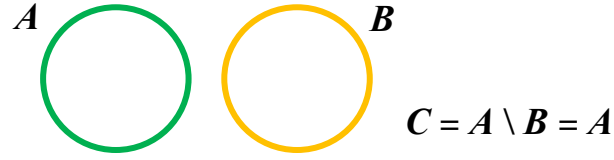
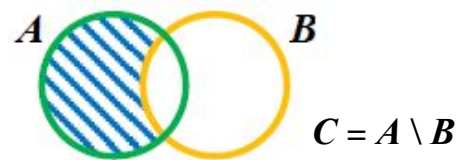
$A \cup B = \{\text{все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств } A \text{ и } B\}$



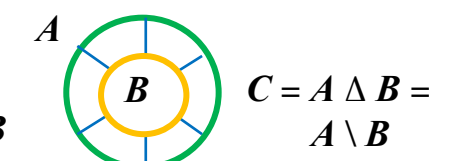
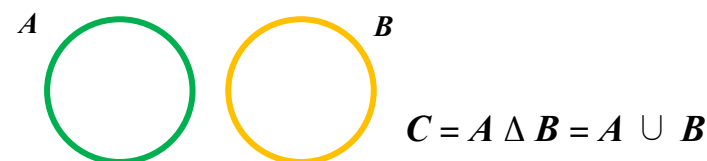
Пересечение множеств $A \cap B = \{\text{все элементы, принадлежащие как } A, \text{ так и } B\}$



Разность множеств $A \setminus B = \{x: x \in A, x \notin B\}$



Симметрическая разность множеств $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

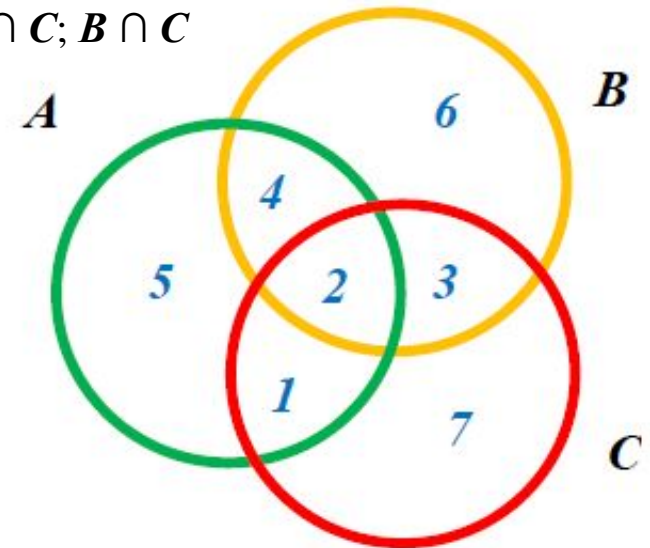


Основные тождества теории

множеств



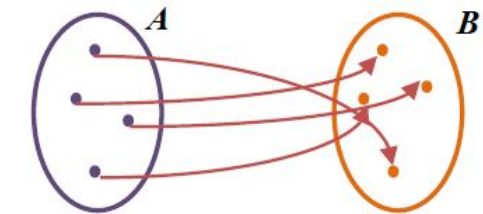
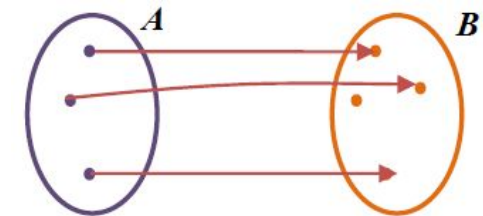
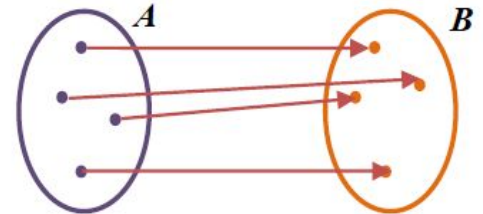
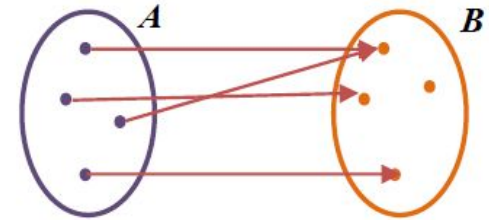
- Коммутативность объединения и пересечения $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- Дистрибутивность объединения и пересечения
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- Взаимная дистрибутивность объединения и пересечения
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- **Формальное доказательство взаимной дистрибутивности (1-го тождества)**
- Пусть $x \in (A \cup B) \cap C$ Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in C$
- Значит, x принадлежит хотя бы одному из множеств A ; B и принадлежит C
- Тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств $A \cap C$; $B \cap C$
- Значит, x принадлежит правой части тождества
- Доказали ли мы формулу?
- **НЕТ!**
- В обратную сторону устно.
- **Геометрическое доказательство:**
- Принцип двойственности
 $S \setminus (A_1 \cup A_2) = (S \setminus A_1) \cap (S \setminus A_2)$
 $S \setminus (A_1 \cap A_2) = (S \setminus A_1) \cup (S \setminus A_2)$



Отображения множеств



- Отображение $f: A \rightarrow B$ - это правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие один и только один элемент множества B
 - Если $f(A) = B$, то f называется **сюръекцией**
 - Если для $x_1, x_2 \in A$, таких что $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, то f называется **инъекцией**
 - Если f инъекция и сюръекция, то такое отображение называется **биекцией**
 - Множества называются **равномощными**, если между ними существует биекция
 - **Теорема:** Для всякого множества A множество $P(A)$ его подмножеств не равномощно самому множеству A
 - **Доказательство:** Предложим, \exists биекция $f: A \rightarrow P(A)$
 - $a \in A$ назовём «хорошим», если $a \in f(a)$ и «плохим», если $a \notin f(a)$
 - Пусть $\Pi \subset A$ - множество всех плохих элементов. Так как f - биекция, то $\exists x \in A$, такой что $f(x) = \Pi$. x - хороший или плохой?
 - Если x - хороший, то $x \in f(x) = \Pi$ - противоречие
 - Если x - плохой, то $x \notin f(x) = \Pi \Rightarrow x$ - хороший, противоречие
- Теорема доказана.**



Парадоксы с бесконечностью



- ❖ Дед Мороз пришел на Новый год к детям с мешком, в котором бесконечно много конфет
- ❖ Все конфеты занумерованы натуральными числами
- ❖ В 23:59:00 Дед Мороз подарил конфету №1 детям
- ❖ В 23:59:30 он дал детям конфеты №2 и №3, но забрал конфету №1
- ❖ В 23:59:45 он дал детям конфеты №4, №5, №6, №7, но забрал №2 и №3. И так далее.
- ❖ Сколько конфет у детей в полночь?



Счётность \mathbb{Q} и несчётность \mathbb{R}



- Множество A называется счётным, если \exists биекция $f: A$

→ \mathbb{N}
● \mathbb{Z} счётно

0	-1	1	-2	2	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	...

- \mathbb{R} несчётно

$$x_1 = A, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots$$

$$x_2 = B, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots$$

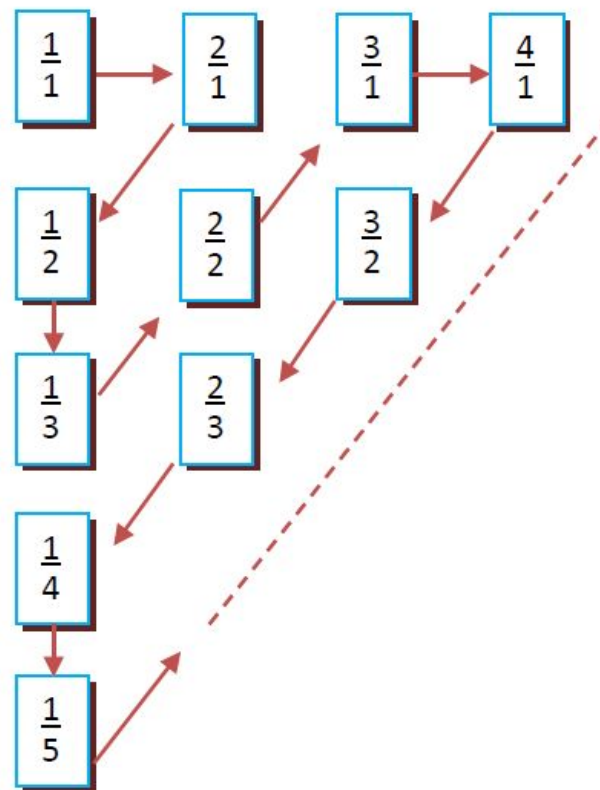
$$x_3 = C, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \dots$$

$$\bar{a} = \{1, \text{если } a \neq 1; 2, \text{если } a =$$

$$1\} = 0, \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_3 \dots$$

$$y \notin \{x_1; x_2; x_3 \dots\}$$

- \mathbb{Q} счётно

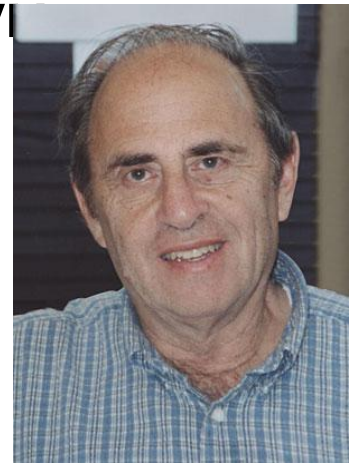


Континуум-гипотеза



Hilbert

- Давид Гильберт (1862 –1943)
- Первая проблема Гильберта (континуум-гипотеза):
С точностью до эквивалентности существуют только два типа бесконечных числовых множеств:
счётное множество и континуум
- В 1963 году американский математик Паул Козэн доказал, что континуум-гипотезу



● **НЕЛЬЗЯ НИ
ДОКАЗАТЬ,
НИ ОПРОВЕРГНУТЬ**