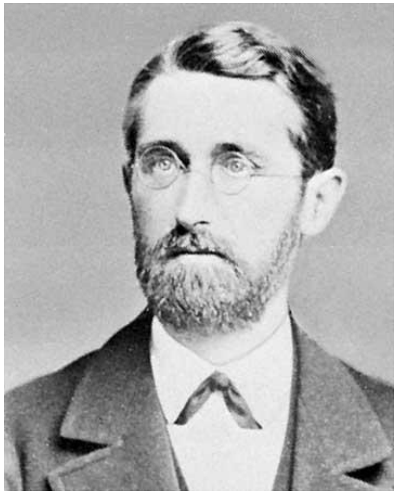
Создатели теории множеств (во второй половине XIX века)

- Георг Кантор (1845-1918)

- Рихард Дедекинд (1831-1916)



Кванторы и обозначения в теории множеств

Квантор всеобщности: $\forall$ - «для всех …», «для каждого …»

Квантор существования: $\exists$ - «существует …», «найдется …»

Импликация: $\Rightarrow$

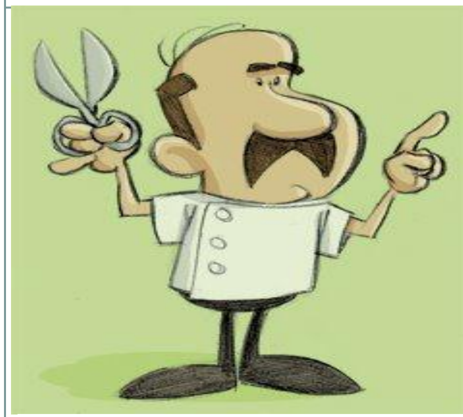
Принадлежность: $\in$

Что такое множество?

- **«Множество»** - это соединение в некое целое M определенных и хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества M). ©Георг Кантор
- **«Множество»** - это совокупность объектов, определенная некоторым правилом.
- Множество A является подмножеством множества B: $A \subset B$, если все элементы множества A принадлежат множеству B

- {все летающие бегемотики} ⊂ {все учащиеся «Ники»}
- Пустое множество $\varnothing$: множество, в котором нет элементов

Парадокс брадобрея



- Приказ командира: брить тех и только тех, кто не бреется сам.
- A = {те и только те, кто не бреется сам}
- Вопрос: брадобрей $\in A$?
- Другая формулировка парадокса брадобрея
- Прилагательное называется рефлексивным, если оно само обладает свойством, которое определяет
- Примеры рефлексивных прилагательных: «русский», «трёхсложный»
- Примеры нерефлексивных прилагательных: «английский», «четырёхсложный»
- Вопрос. Если B ={все рефлексивные прилагательные}, то прилагательное «нерефлексивный» $\in B$ или нет?
- Вопрос-шутка: «трудновыговариваемый» $\in B$ или нет?

Пути разрешения парадоксов

Способ Кантора: **«Наивная теория множеств»**

Идея: разрешается работать со множествами, которые «встречаются в природе», а также с теми, которые получаются из них разумными теоретико-множественными операциями

Пример:

A ={ котики}

B ={бегемоты} (но не летающие!)

$A \cup B$ ={котики и бегемоты}

Аксиоматический способ

Его развивали Цермело, Френкель, Гёдель, Бернайс

Идея: множество – это нечто, удовлетворяющие некоторому набору аксиом

Пример: **Аксиома выделения**

Для каждого множества A и каждого условия φ существует множество $B = \{x : x \in A, \varphi(x)\}$ - подмножество элементов A, удовлетворяющих условию φ.

То есть мы не можем взять

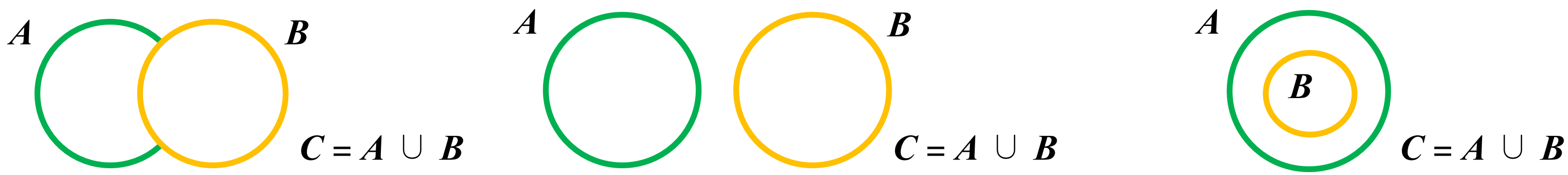
C = {множество всех летающих бегемотиков со всего мира}

D = {множество тех, кто не бреется

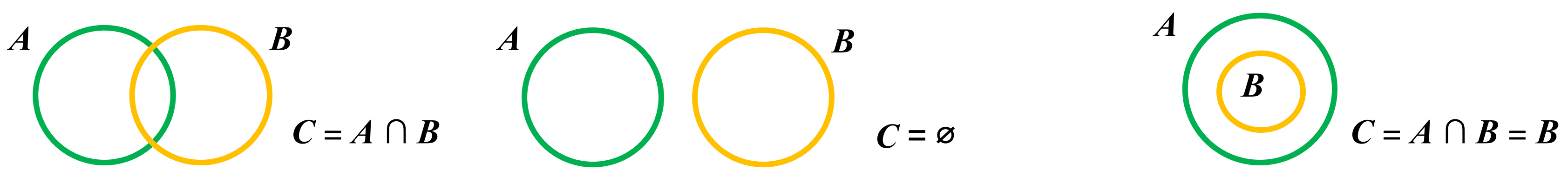
Операции над множествами

Объединение множеств

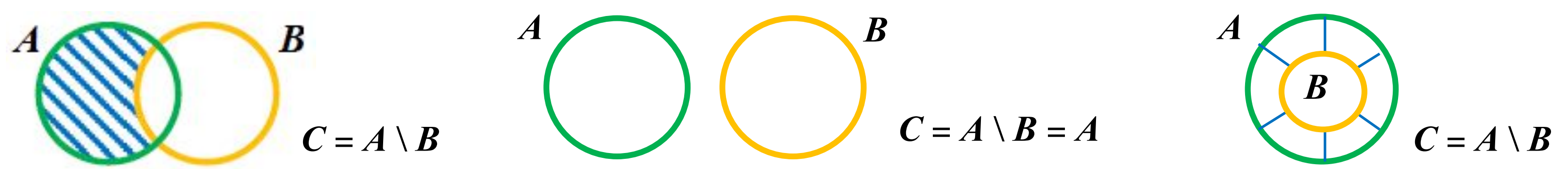
$A \cup B$ = {все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств A и B}



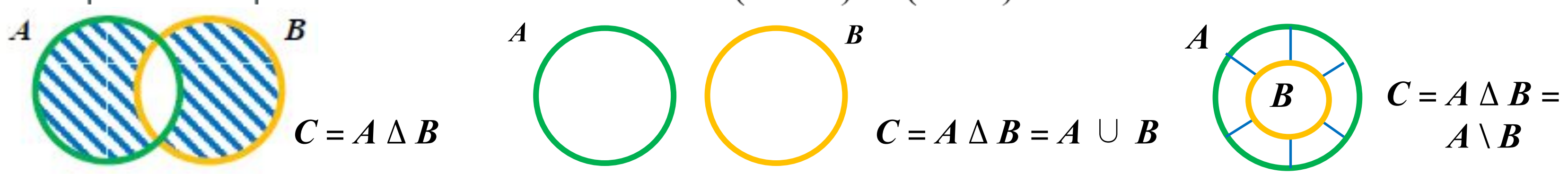
Пересечение множеств $A \cap B$ = {все элементы, принадлежащие как A, так и B}



Разность множеств $A \setminus B = \{x\colon x \in A,\ x \notin B\}$

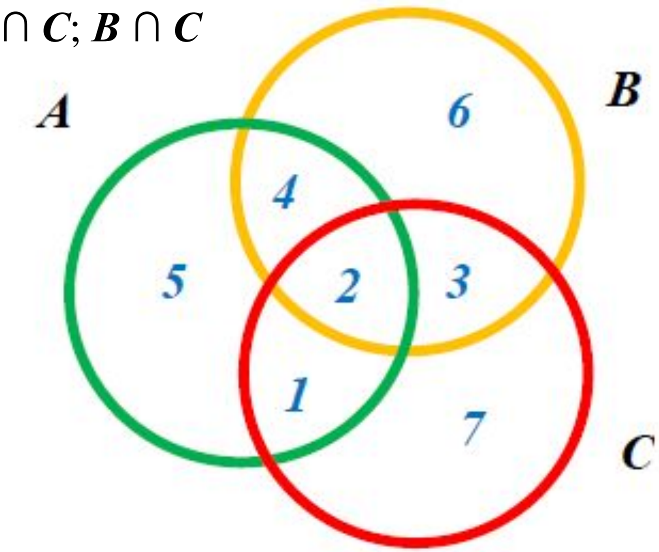


Симметрическая разность множеств $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Основные тождества теории множеств

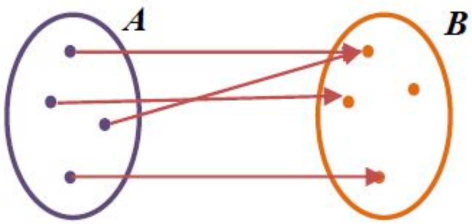
- Коммутативность объединения и пересечения $A \cup B = B \cup A;\ A \cap B = B \cap A$
- Дистрибутивность объединения и пересечения
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Взаимная дистрибутивность объединения и пересечения
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$
- Формальное доказательство взаимной дистрибутивности (1-го тождества)
- Пусть $x \in (A \cup B) \cap C$ Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in C$
- Значит, x принадлежит хотя бы одному из множеств $A; B$ и принадлежит C
- Тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств $A \cap C$; $B \cap C$
- Значит, x принадлежит правой части тождества
- Доказали ли мы формулу?
- **НЕТ!**
- В обратную сторону устно.
- Геометрическое доказательство:
- Принцип двойственности
  $S \setminus (A_1 \cup A_2) = (S \setminus A_1) \cap (S \setminus A_2)$
  $S \setminus (A_1 \cap A_2) = (S \setminus A_1) \cup (S \setminus A_2)$

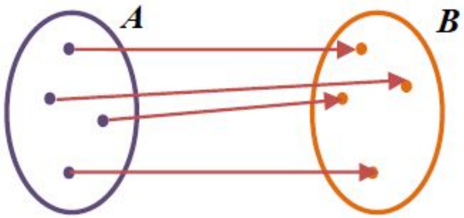


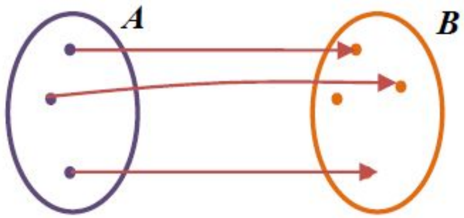
Отображения множеств

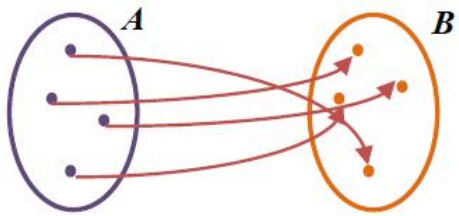
- Отображение $f: A \to B$ - это правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие один и только один элемент множества B
- Если $f(A) = B$, то f называется **сюръекцией**
- Если для $x_1, x_2 \in A$, таких что $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$, то f называется **инъекцией**
- Если f инъекция и сюръекция, то такое отображение называется **биекцией**
- Множества называются **равномощными**, если между ними существует биекция
- **Теорема:** Для всякого множества A множество $P(A)$ его подмножеств не равномощно самому множеству A
- Доказательство: Предложим, $\exists$ биекция $f : A \to P(A)$
- $a \in A$ назовём «хорошим», если $a \in f(a)$ и «плохим», если $a \notin f(a)$
- Пусть $П \subset A$ - множество всех плохих элементов. Так как f- биекция, то $\exists$ $x \in A$, такой что $f(x) = П$. x – хороший или плохой?
- Если x - хороший, то $x \in f(x) = П$ - противоречие
- Если x - плохой, то $x \notin f(x) = П \Rightarrow x$ - хороший, противоречие

Теорема доказана.









Парадоксы с бесконечностью

- Дед Мороз пришел на Новый год к детям с мешком, в котором бесконечно много конфет
- Все конфеты занумерованы натуральными числами
- В 23:59:00 Дед Мороз подарил конфету №1 детям
- В 23:59:30 он дал детям конфеты №2 и №3, но забрал конфету №1
- В 23:59:45 он дал детям конфеты№4, №5, №6, №7, но забрал №2 и №3. И так далее.
- Сколько конфет у детей в полночь?

Счётность $\mathbb{Q}$ и несчётность $\mathbb{R}$

- Множество A называется счётным, если $\exists$ биекция $f: A \to \mathbb{N}$
  - $\mathbb{Z}$ счётно

0	-1	1	-2	2	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	…

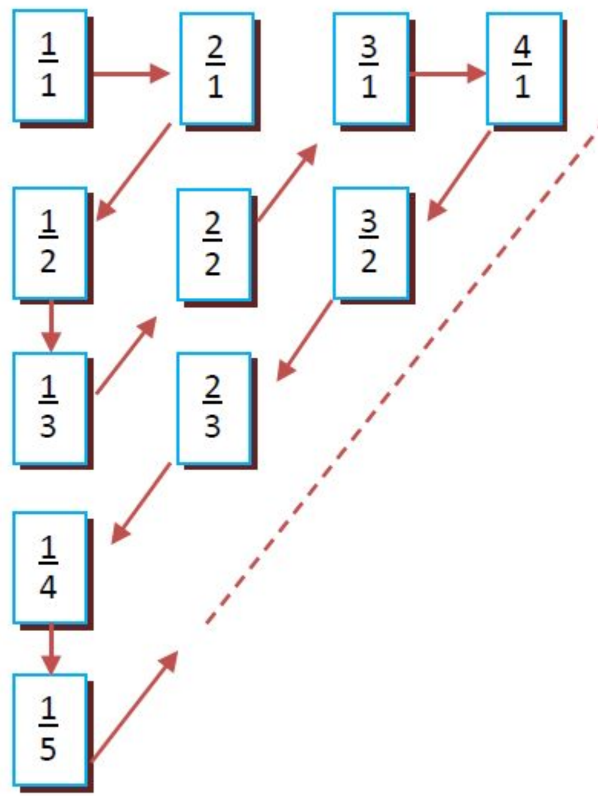
  - $\mathbb{R}$ несчётно

$x_1 = A, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots$
$x_2 = B, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \ldots$
$x_3 = C, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \ldots$

$\overline{a} = \{1$, если $a \neq 1$; 2, если $a = 1\}$

$y = 0, \overline{\alpha_1}\, \overline{\beta_2}\, \overline{\gamma_3} \ldots$
$y \notin \{x_1; x_2; x_3 \ldots\}$

- $\mathbb{Q}$ счётно



Континуум-гипотеза

- Давид Гильберт (1862 –1943)
- Первая проблема Гильберта (континуум-гипотеза):
  С точностью до эквивалентности существуют только два типа бесконечных числовых множеств: счётное множество и континуу
- В 1963 году американский математик Паул Коэн доказал, что континуум-гипотезу

- **НЕЛЬЗЯ НИ ДОКАЗАТЬ, НИ ОПРОВЕРГНУТЬ**