Теорема (признак Дини):

Пусть $f(x) - 2\pi -$ периодическая функция и

$\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, и пусть в

точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $\exists \lim\limits_{h\to 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$ и $\exists \lim\limits_{h\to 0+} f(x_0 - h) = f_-(x_0)$. Тогда если $\exists \delta > 0$, что

сходится $\displaystyle\int\limits_0^{\delta} \frac{\left|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)\right|}{t} dt$,

то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = \dfrac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}$.

Примеры:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, x \in (0, \pi] \\ s \\ 0, \qquad x = 0 \\ s \\ \dfrac{-\pi - x}{2}, x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$2)\ f(x) = |x| \ \text{на} \ [-\pi, \pi]$$

Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических.

Определение:

Пусть $f(x)$ определена на $[-\pi, \pi]$ и ей можно поставить

в соответствие её ряд Фурье $\dfrac{a_0}{2} + + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,

пусть $S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$,

а $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ – ядра Дирихле.

$\sigma_{n+1}(x, f) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$ называется последовательностью

Фейера, соответствующей $f(x)$,

$F_{n+1}(x) = \dfrac{1}{\ldots}\sum^{n} D_k(x)$ называется ядром Фейера

Лемма (свойства ядра Фейера):

$$1)\ F_{n+1}(x) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} x}{2(n+1)\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$2)\ F_n(x) \geq 0 \quad \forall n$$

$$3)\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)dx = 1$$

$$4)\ \forall \delta \in (0, \pi) \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} F_n(x)dx = 0$$

<u>Теорема (признак Дини):</u>

Пусть $f(x) - 2\pi -$ периодическая функция и

$\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, и пусть в

точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $\exists \lim_{h\to 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$ и $\exists \lim_{h\to 0+} f(x_0 - h) = f_-(x_0)$. Тогда если $\exists \delta > 0$, что

сходится $\int_0^{\delta} \frac{\left|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)\right|}{t} dt$,

то $\exists \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}$.

Примеры:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, x \in (0, \pi] \\ \qquad\qquad s \\ \quad 0, \qquad x = 0 \\ \qquad\qquad s \\ \dfrac{-\pi - x}{2}, x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$2)\ f(x) = |x| \text{ на } [-\pi, \pi]$$

Если $\hat{f}(\lambda)-$ преобразование Фурье $f(x)$, то $\check{\hat{f}}(x)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)e^{i\lambda x}d\lambda$$ называется обратным преобразованием Фурье.

<u>*Лемма:*</u>

$\forall f(x)$, удовлетворяющей условиям из предыдущего определения, $\hat{f}(\lambda)\in C(R)$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\left|\hat{f}(\lambda)\right|=0.$

Теорема:

Пусть $f(x)$ удовлетворяет всем условиям определения из начала лекции и пусть в точке x_0 $\exists \lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x) = f(x_0 \pm 0)$ и $\exists\delta > 0,$ что

$$\exists \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)|}{t} dt \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(x) e^{i\lambda x_0} d\lambda \right) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

Следствие:

Если $f(x) \in C(R)$ и удовлетворяет всем условиям теоремы и кроме того существует $\check{\hat{f}}(x)$, то $\check{\hat{f}}(x) \equiv f(x)$.