

Теорема (признак Дини):

Пусть  $f(x)$  —  $2\pi$  — периодическая функция и

$$\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \text{ и пусть в}$$

точке  $x_0 \in [-\pi, \pi]$   $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$  и  $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 - h) = f_-(x_0)$ . Тогда если  $\exists \delta > 0$ , что

сходится  $\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t} dt,$

$$\text{то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}.$$

Примеры:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & x \in (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ \frac{-\pi - x}{2}, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$2) f(x) = |x| \text{ на } [-\pi, \pi]$$

## Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических.

Определение:

Пусть  $f(x)$  определена на  $[-\pi, \pi]$  и ей можно поставить в соответствие её ряд Фурье  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ,

$$\text{пусть } S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\text{а } D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \text{ядра Дирихле.}$$

$\sigma_{n+1}(x, f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)$  называется последовательностью Фейера, соответствующей  $f(x)$ ,

и  $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n D_k(x)$  называется ядром Фейера

**Лемма (свойства ядра Фейера):**

$$1) F_{n+1}(x) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} x}{2(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$2) F_n(x) \geq 0 \quad \forall n$$

$$3) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = 1$$

$$4) \forall \delta \in (0, \pi) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} F_n(x) dx = 0$$

Теорема (признак Дини):

Пусть  $f(x)$  —  $2\pi$  — периодическая функция и

$$\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \text{ и пусть в}$$

точке  $x_0 \in [-\pi, \pi]$   $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$  и  $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 - h) = f_-(x_0)$ . Тогда если  $\exists \delta > 0$ , что

сходится  $\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t} dt,$

$$\text{то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}.$$

Примеры:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & x \in (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ \frac{-\pi - x}{2}, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$2) f(x) = |x| \text{ на } [-\pi, \pi]$$

Если  $\hat{f}(\lambda)$  – преобразование Фурье  $f(x)$ , то  $\check{f}(x)$   
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$  называется обратным  
преобразованием Фурье.

Лемма:

$\forall f(x)$ , удовлетворяющей условиям из предыдущего  
определения,  $\hat{f}(\lambda) \in C(R)$  и  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |\hat{f}(\lambda)| = 0$ .

Теорема:

Пусть  $f(x)$  удовлетворяет всем условиям определения из начала лекции и пусть в точке  $x_0$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0 \pm 0) \text{ и } \exists \delta > 0, \text{ что}$$

$$\exists \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|}{t} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{A \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A \hat{f}(x) e^{i\lambda x_0} d\lambda \right) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

Следствие:

Если  $f(x) \in C(\mathbb{R})$  и удовлетворяет всем условиям

теоремы и кроме того существует  $\check{f}(x)$ , то

$$\check{f}(x) \equiv f(x).$$