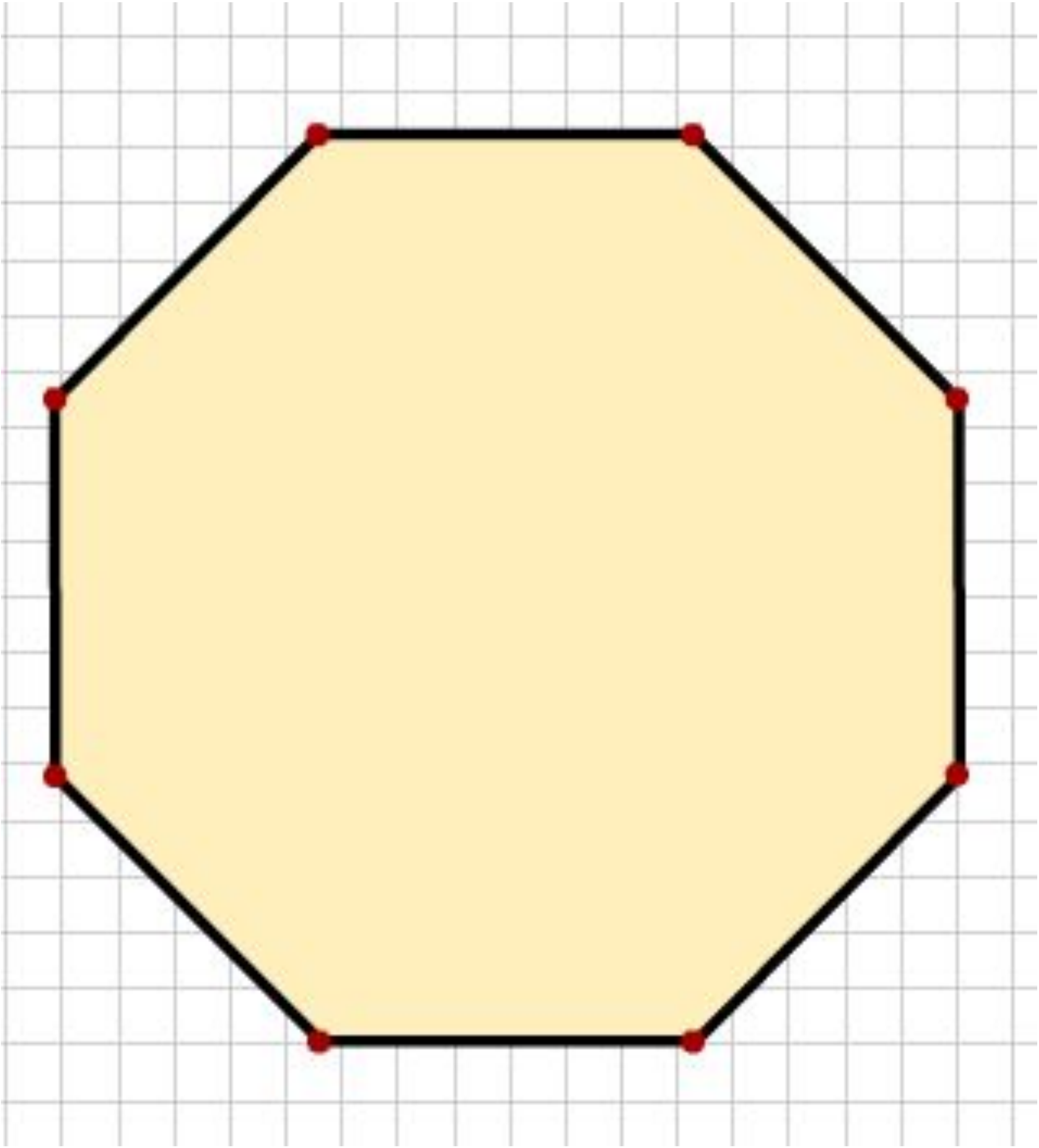
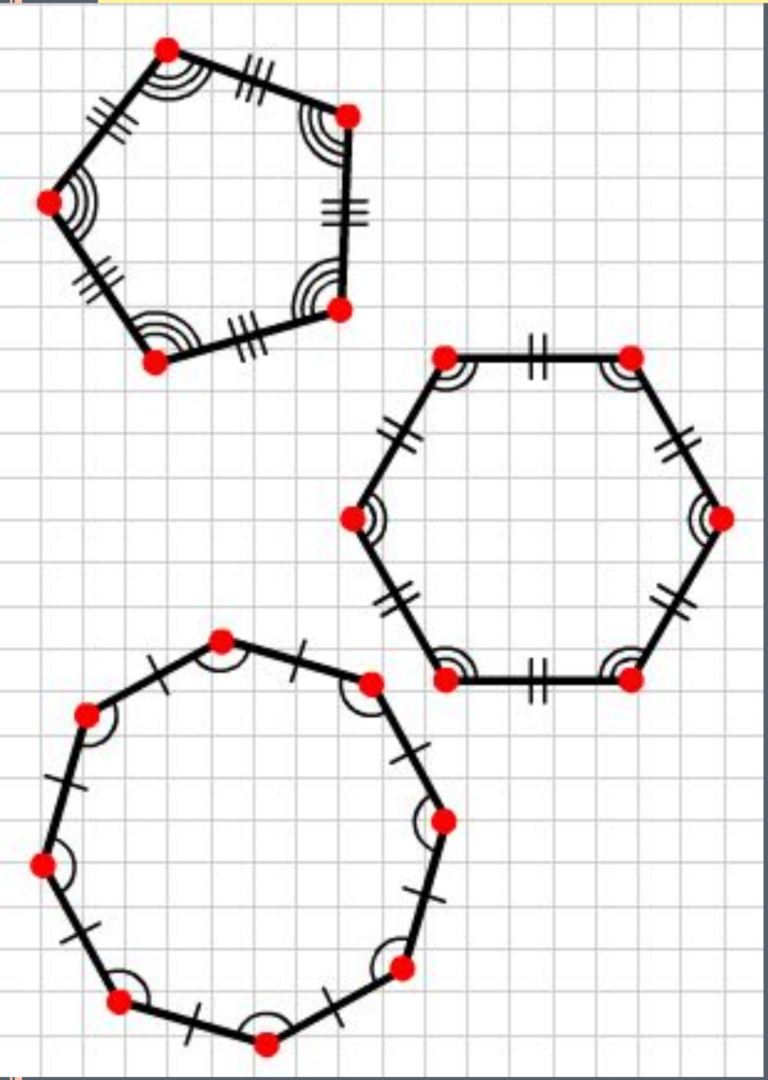
ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ



Правильный многоугольник



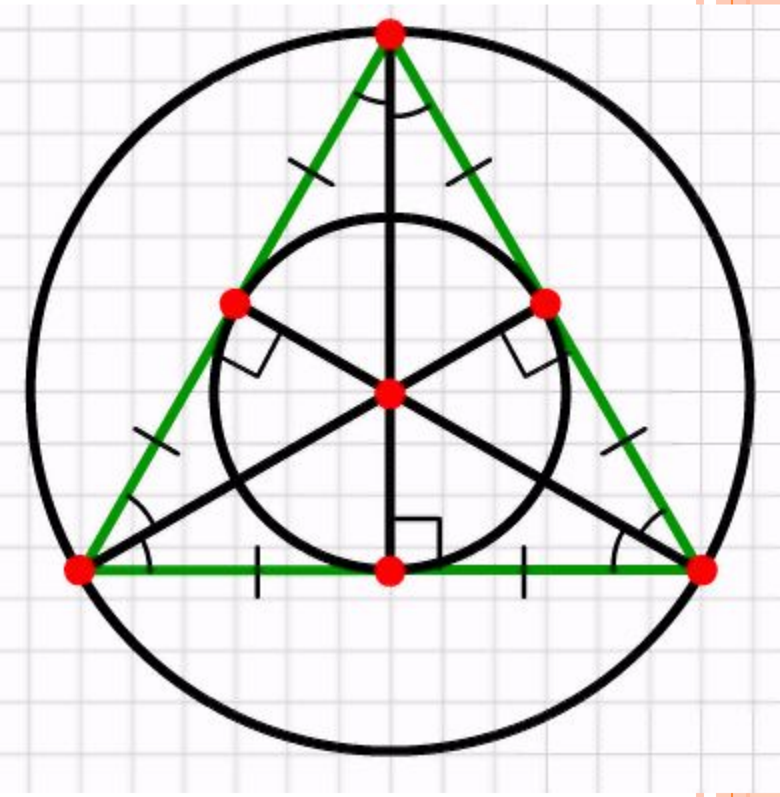
Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны. Некоторые правильные многоугольники вам уже известны, например, равносторонний треугольник и квадрат. На рисунке изображены правильные пятиугольник, шестиугольники восьмиугольник. Т. к. сумма углов n-угольника равна (n-2)180°, причем все его углы равны по определению, то

$$\alpha_n = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180°.$$

ЦЕНТР ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Центром правильного многоугольника называется такая точка, которая равноудалена от всех вершин и от всех сторон правильного многоугольника.

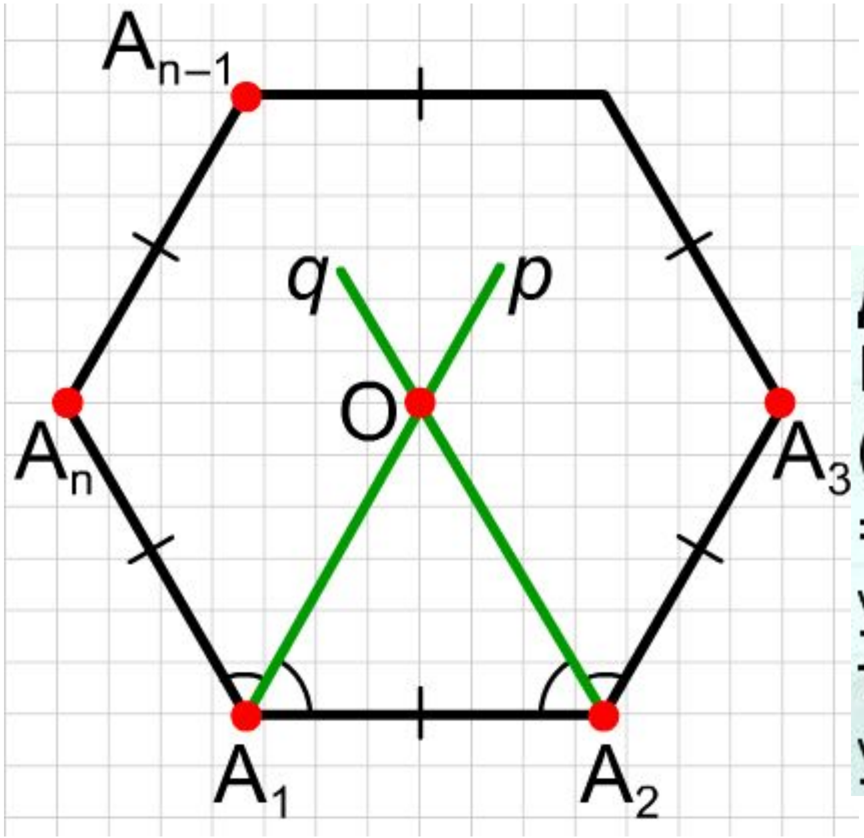
Например, у равностороннего треугольника на рисунке такой точкой является центр вписанной и описанной окружности (это одна точка, т. к. у равностороннего треугольника все <u>биссектрисы, медианы</u> и высоты совпадают, следовательно, совпадают и точка пересечения биссектрис с точкой пересечения серединных перпендикуляров).



Центр равностороннего треугольника

Теорема о центре правильного многоугольника

В каждом правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон.



Доказательство:

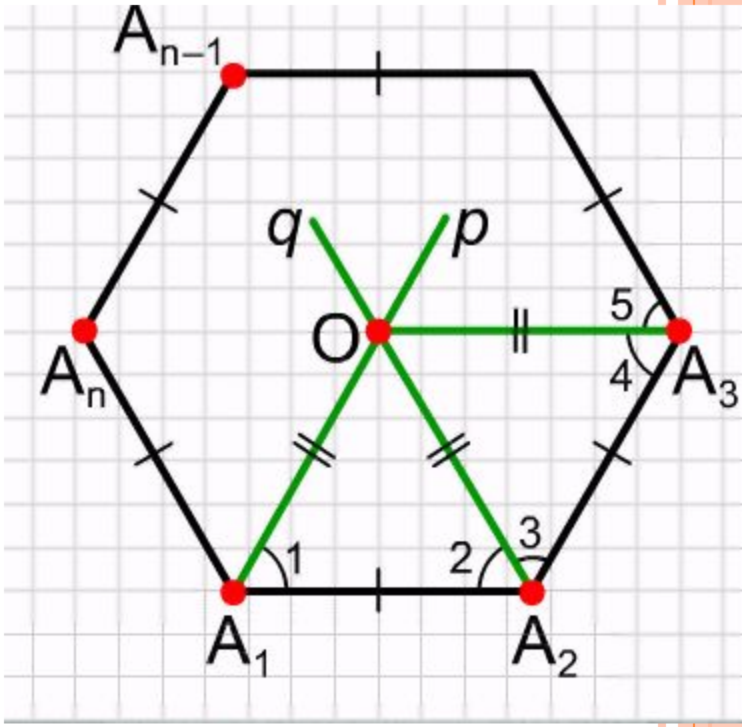
Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный n-угольник (т. е. $A_1A_2= A_2A_3=...=A_{n-1}A_n=A_nA_1$ и $\angle A_1=\angle A_2=...=\angle A_n$). Проведем биссектрисы p и q углов A_1 и A_2. Пусть $p \cap q=O$. Докажем, что точка O является центром правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$.

Сначала докажем, что точка O равноудалена от всех вершин $A_1, A_2 \ldots, A_n$ правильного n-угольника, т. е. $OA_1=OA_2=OA_3=\ldots=OA_n$. Т. к. $\angle 1=\angle 2$ (как половины равных углов), то $\Delta\ OA_1A_2$ равнобедренный, поэтому $OA_1=OA_2$. Тогда $\Delta\ OA_1A_2=\Delta\ OA_2A_3$ по двум сторонам и углу между ними (OA_2 — общая сторона, $A_1A_2=A_2A_3$ как стороны правильного n-угольника, $\angle 2=\angle 3$, т. к. A_2O — биссектриса $\angle A_2$ n-угольника). Из равенства треугольников следует, что $OA_1=OA_3$. Отсюда $OA_3=OA_2$ и $\angle 3=\angle 4$.

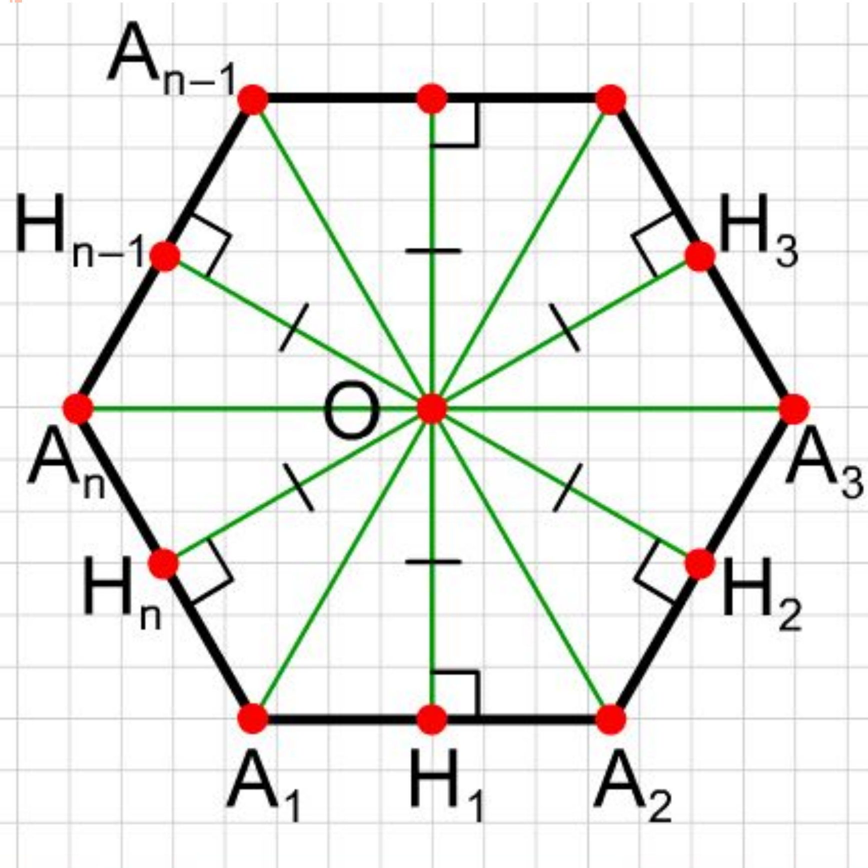
Т.к. $\angle 3 = \dfrac{1}{2}\angle A_2, \angle A_2 = \angle A_3$, то $\angle 3 = \dfrac{1}{2}\angle A_3$,

$$\text{но } \angle 3 = \angle 4 \Rightarrow \angle 4 = \frac{1}{2}\angle A_3,$$

поэтому $\angle 4=\angle 5$, т. е. A_3O — биссектриса $\angle A_3$ n-угольника. Повторяя аналогичные рассуждения, получаем, что $OA_1=OA_2=OA_3=\ldots=OA_n$.



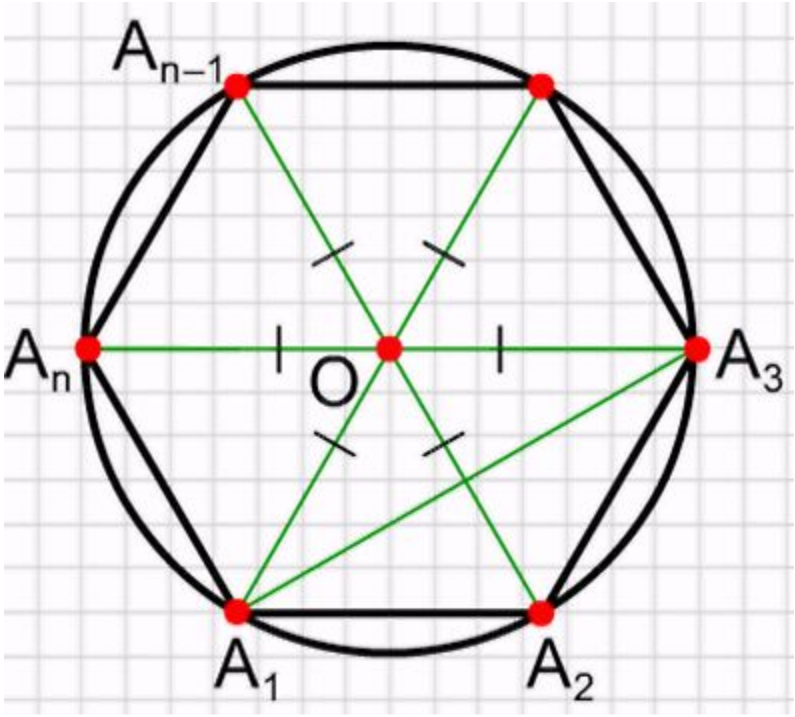
Теорема о центре правильного многоугольника



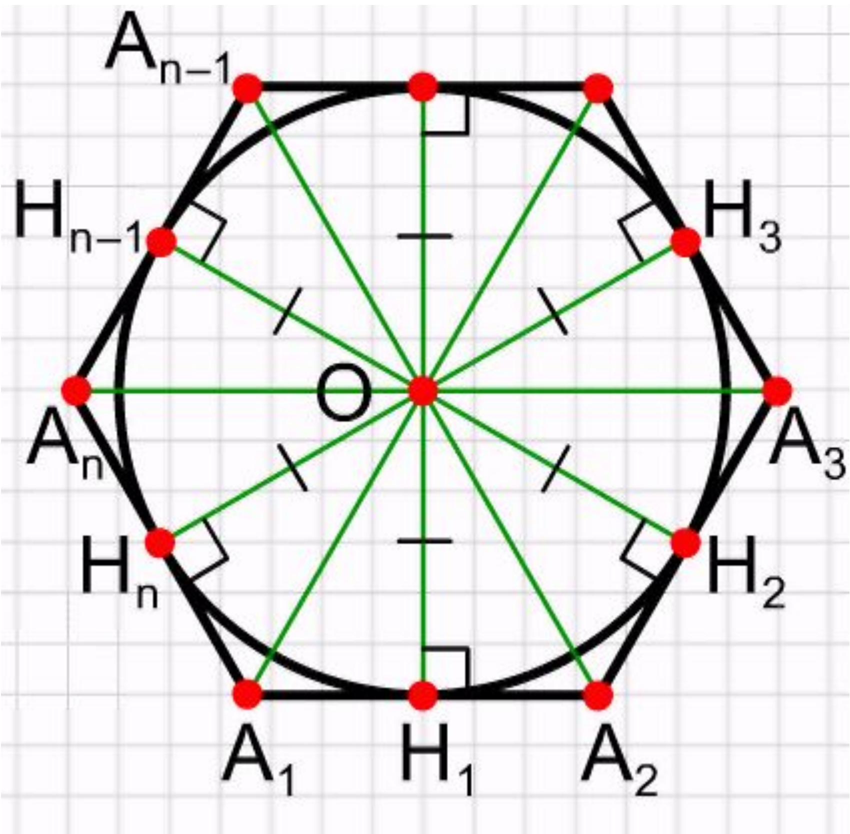
Докажем, что точка *O* равноудалена от всех сторон правильного *n*-угольника.

Попутно мы доказали, что все биссектрисы правильного *n*-угольника пересекаются в точке *O*.
Теперь докажем, что точка *O* равноудалена от всех сторон A_1A_2, A_2A_3,… ,$A_{n-1}A_n$, A_nA_1 правильного *n*-угольника.
Из предыдущих рассуждений следует, что $\Delta OA_1A_2=\Delta OA_2A_3=\ldots=\Delta OA_{n-1}A_n=\Delta OA_nA_1$.
Тогда равны и высоты OH_1, OH_2, …, OH_{n-1}, OH_n к сторонам A_1A_2, A_2A_3,… ,$A_{n-1}A_n$, A_nA_1 этих треугольников, т. е.
$OH_1=OH_2=\ldots=OH_{n-1}=OH_n$, и
$OH_1 \perp A_1A_2$, $OH_2 \perp A_2A_3$, …, $OH_{n-1} \perp A_{n-1}A_n$, $OH_n \perp A_nA_1$. Это и означает, что точка *O* равноудалена от всех сторон правильного *n*-угольника.
Теорема доказана.
Из этой теоремы вытекает ряд важных следствий. Рассмотрим их.

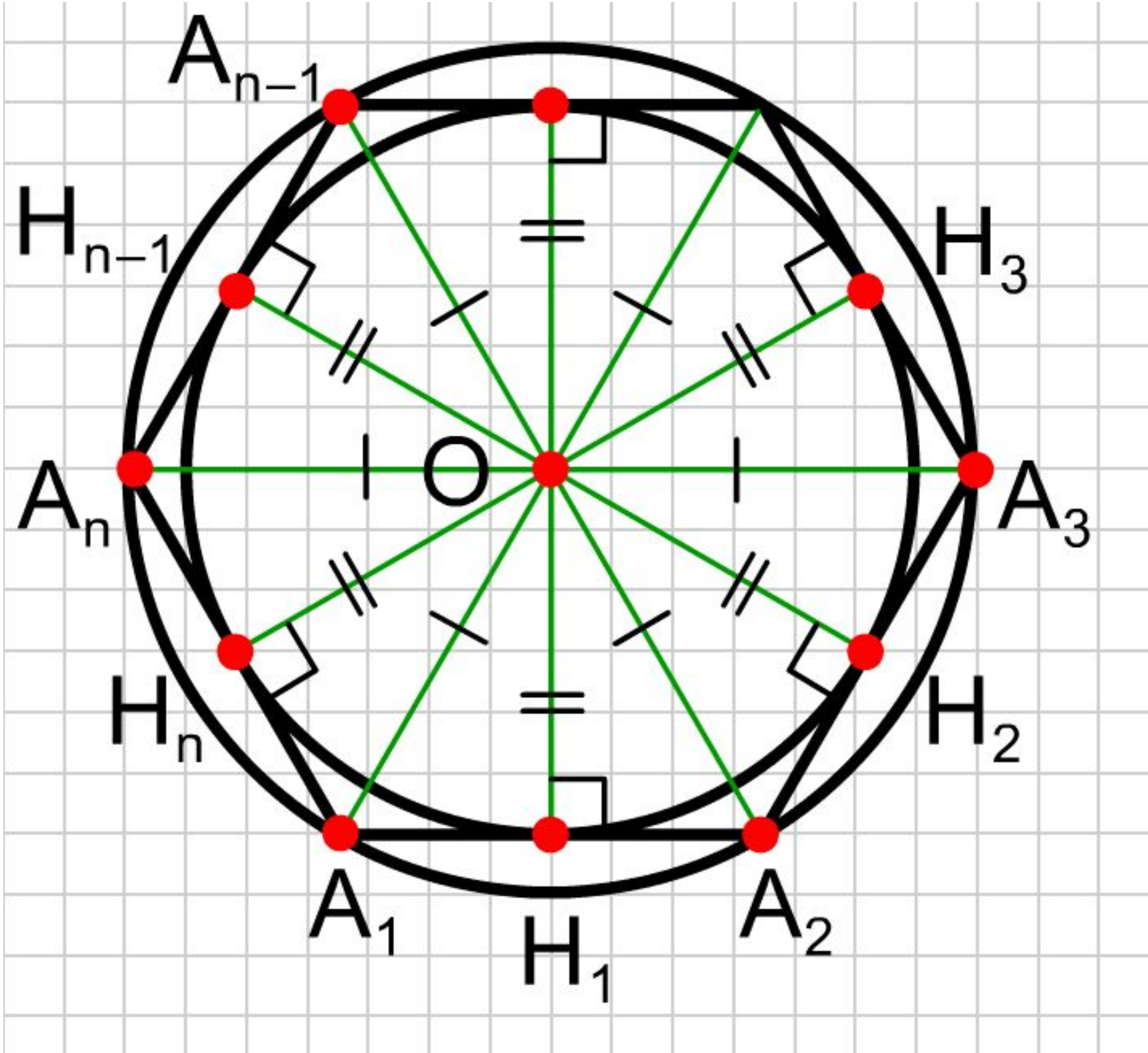
Теорема. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, причем только одну.



Теорема. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, причем только одну.



Следствие 1. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.


A_{n-1}
H_{n-1}
H_3
A_n
O
A_3
H_n
H_2
A_1
H_1
A_2

Следствие 2. **Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности.**