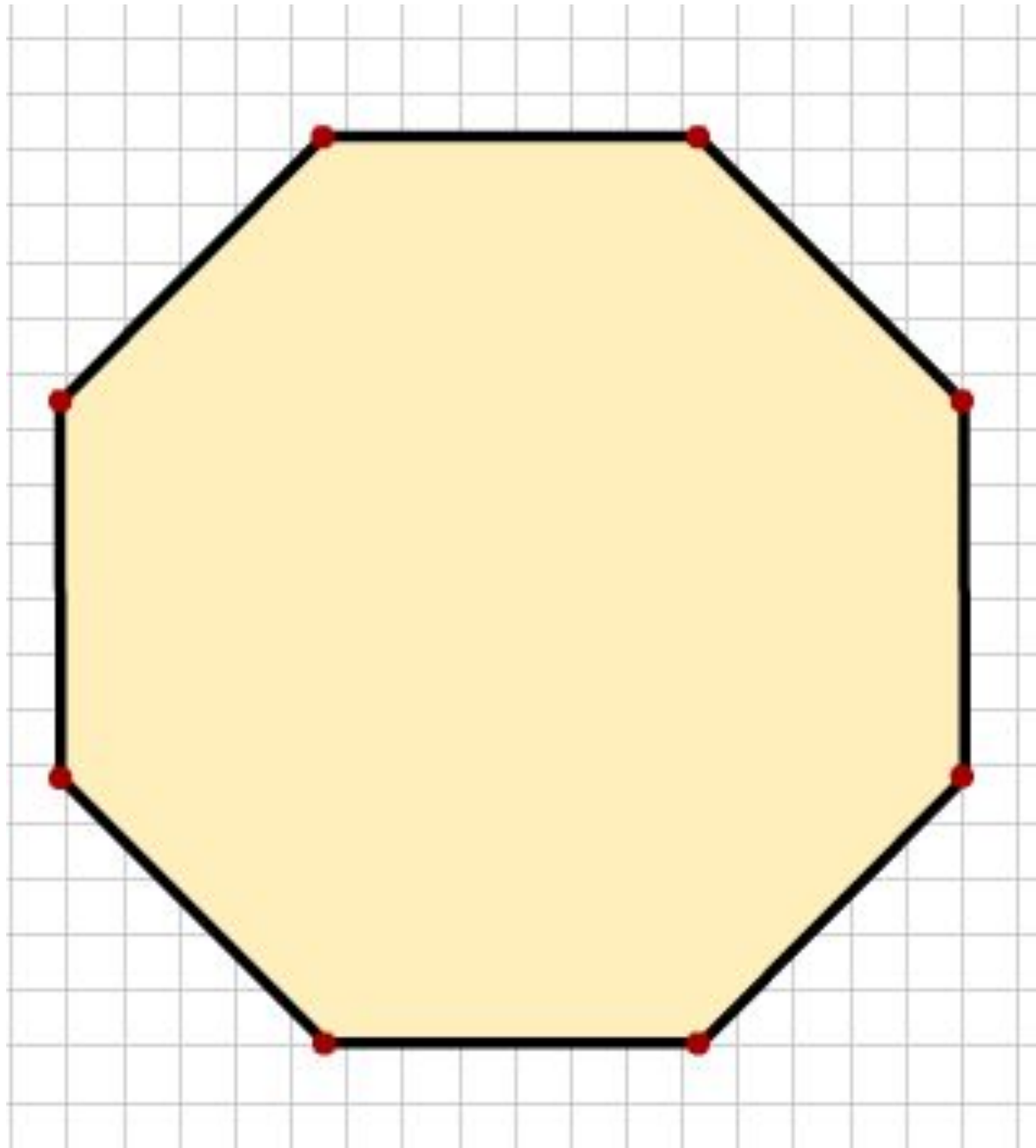
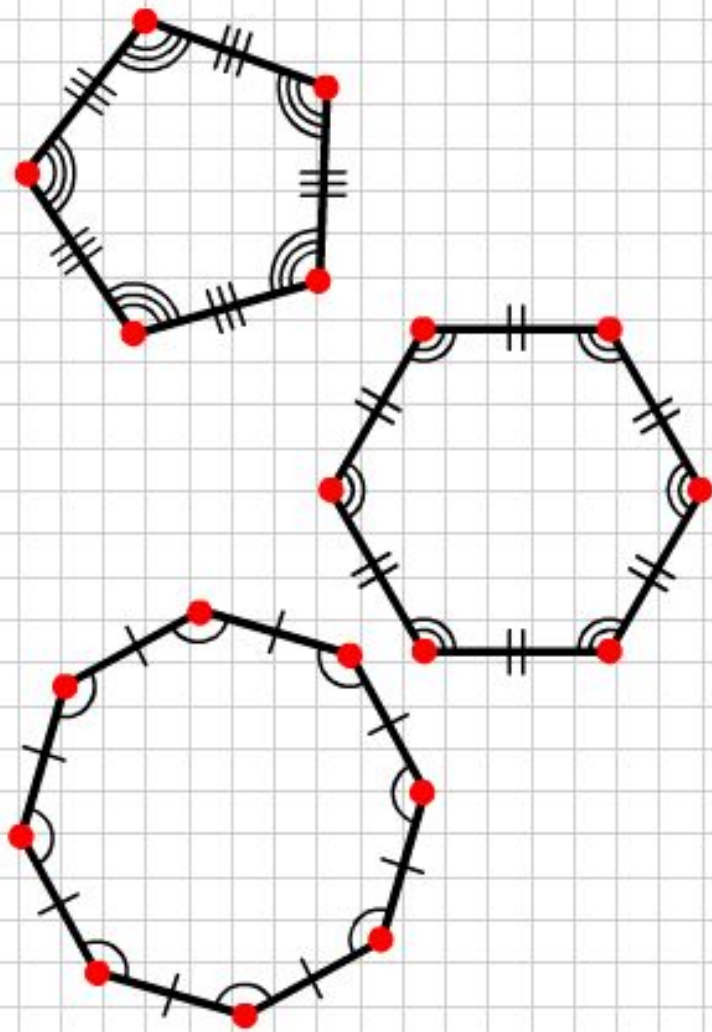


ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ





Правильный многоугольник



Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны. Некоторые правильные многоугольники вам уже известны, например, равносторонний треугольник и квадрат. На рисунке изображены правильные пятиугольник, шестиугольники, восьмиугольник. Т. к. сумма углов n -угольника равна $(n-2)180^\circ$, причем все его углы равны по определению, то

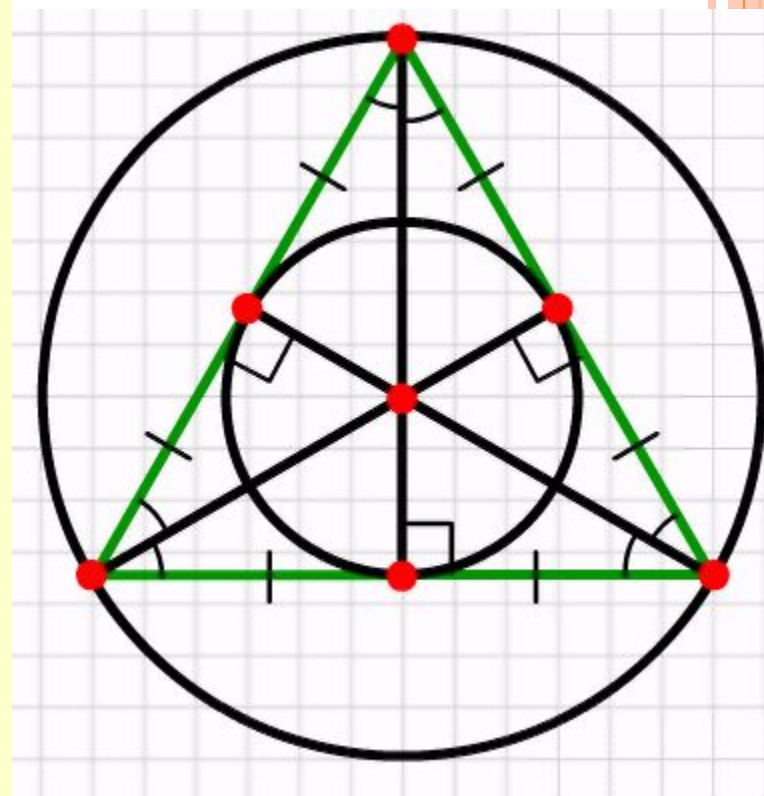
$$\alpha_n = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ.$$



ЦЕНТР ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Центром правильного многоугольника называется такая точка, которая равноудалена от всех вершин и от всех сторон правильного многоугольника.

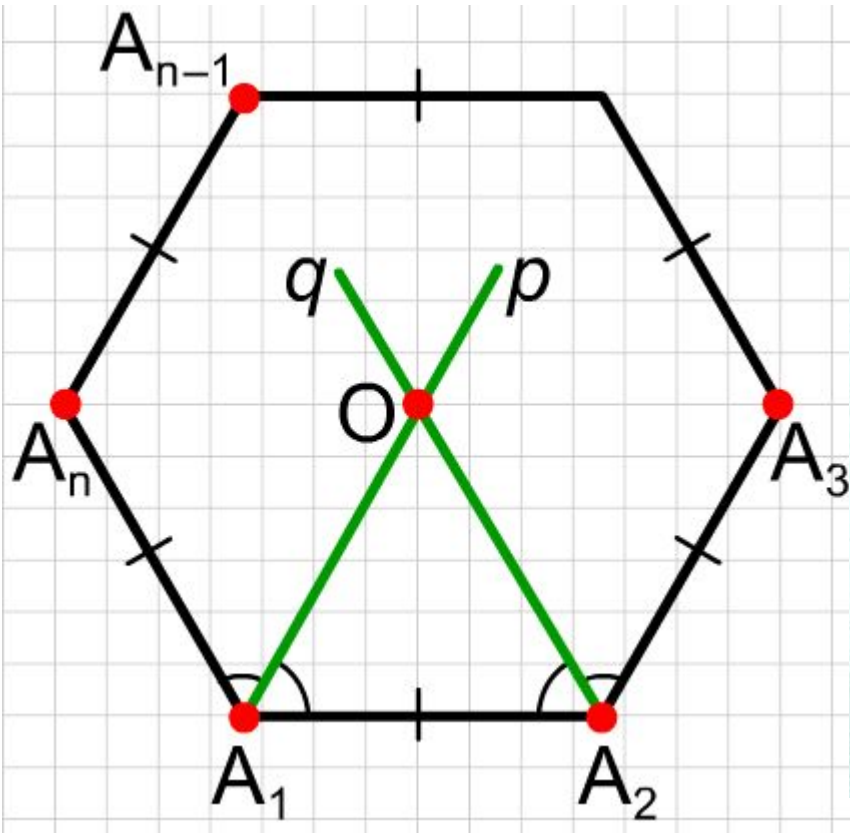
Например, у равностороннего треугольника на рисунке такой точкой является центр вписанной и описанной окружности (это одна точка, т. к. у равностороннего треугольника все биссектрисы, медианы и высоты совпадают, следовательно, совпадают и точка пересечения биссектрис с точкой пересечения серединных перпендикуляров).



Центр равностороннего
треугольника

Теорема о центре правильного многоугольника

В каждом правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон.



Доказательство:

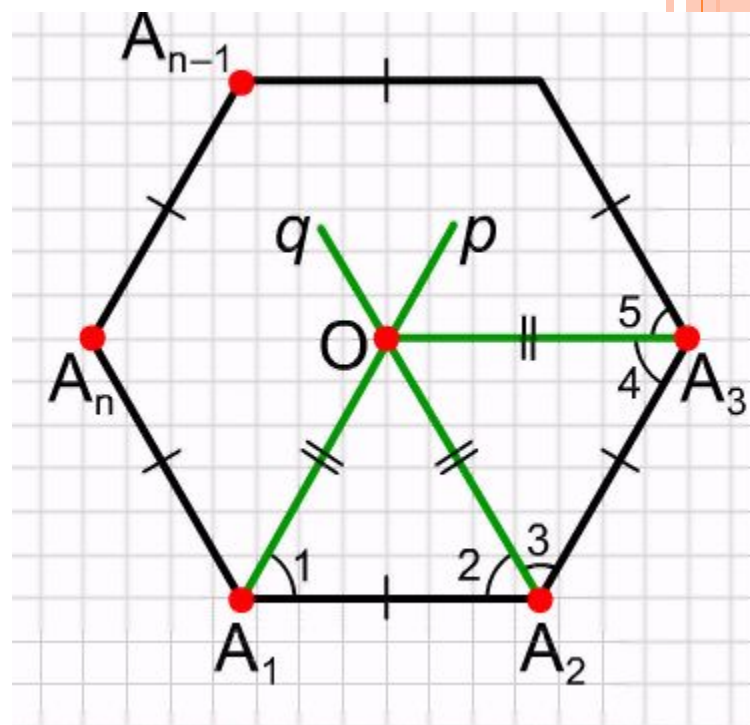
Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — правильный n -угольник (т. е. $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nA_1$ и $\angle A_1 = \angle A_2 = \dots = \angle A_n$). Проведем биссектрисы p и q углов A_1 и A_2 . Пусть $p \cap q = O$. Докажем, что точка O является центром правильного n -угольника $A_1A_2\dots A_n$.

Сначала докажем, что точка O равноудалена от всех вершин A_1, A_2, \dots, A_n правильного n -угольника, т. е. $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$. Т. к. $\angle 1 = \angle 2$ (как половины равных углов), то $\triangle OA_1A_2$ равнобедренный, поэтому $OA_1 = OA_2$. Тогда $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3$ по двум сторонам и углу между ними (OA_2 — общая сторона, $A_1A_2 = A_2A_3$ как стороны правильного n -угольника, $\angle 2 = \angle 3$, т. к. A_2O — биссектриса $\angle A_2$ n -угольника). Из равенства треугольников следует, что $OA_1 = OA_3$. Отсюда $OA_3 = OA_2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

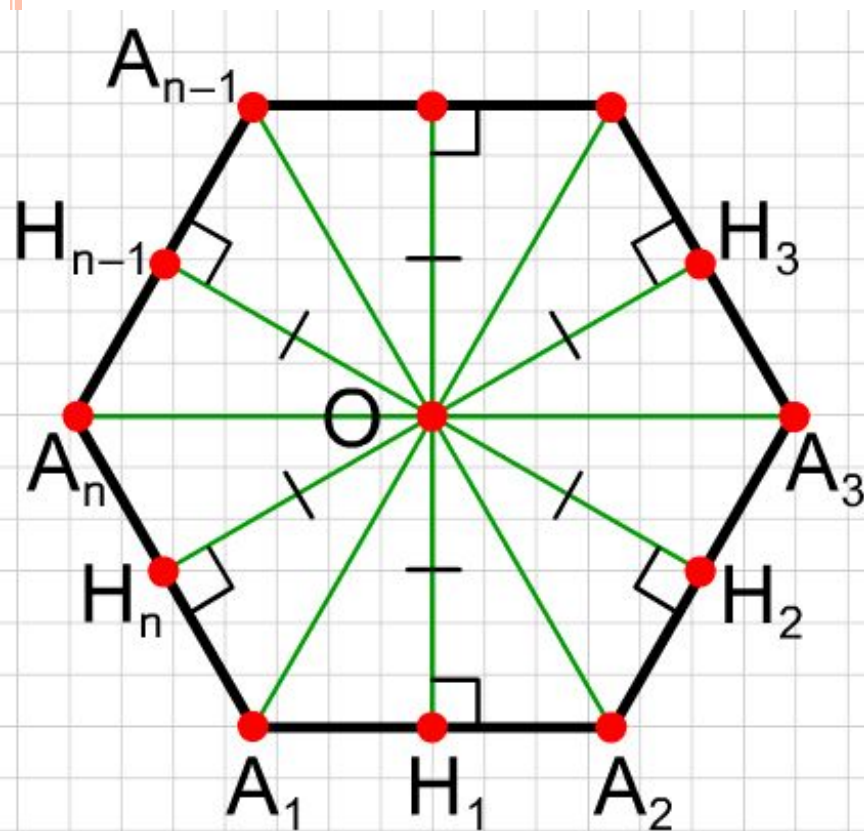
Т. к. $\angle 3 = \frac{1}{2} \angle A_2$, $\angle A_2 = \angle A_3$, то $\angle 3 = \frac{1}{2} \angle A_3$,

$$\text{но } \angle 3 = \angle 4 \Rightarrow \angle 4 = \frac{1}{2} \angle A_3,$$

поэтому $\angle 4 = \angle 5$, т. е. A_3O — биссектриса $\angle A_3$ n -угольника. Повторяя аналогичные рассуждения, получаем, что $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$.



Теорема о центре правильного многоугольника



Докажем, что точка O равноудалена от всех сторон правильного n -угольника.

Попутно мы доказали, что все биссектрисы правильного n -угольника пересекаются в точке O .

Теперь докажем, что точка O равноудалена от всех сторон $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ правильного n -угольника.

Из предыдущих рассуждений следует, что $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = \dots = \triangle OA_{n-1}A_n = \triangle OA_nA_1$.

Тогда равны и высоты $OH_1, OH_2, \dots, OH_{n-1}, OH_n$ к сторонам $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ этих треугольников, т. е.

$OH_1 = OH_2 = \dots = OH_{n-1} = OH_n$, и

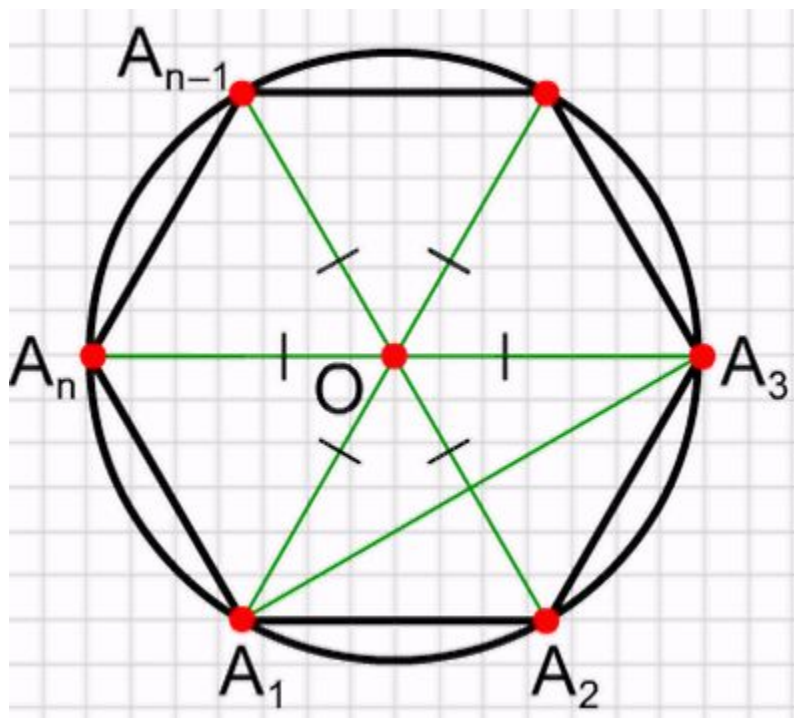
$OH_1 \perp A_1A_2, OH_2 \perp A_2A_3, \dots, OH_{n-1} \perp A_{n-1}A_n,$

$OH_n \perp A_nA_1$. Это и означает, что точка O равноудалена от всех сторон правильного n -угольника.

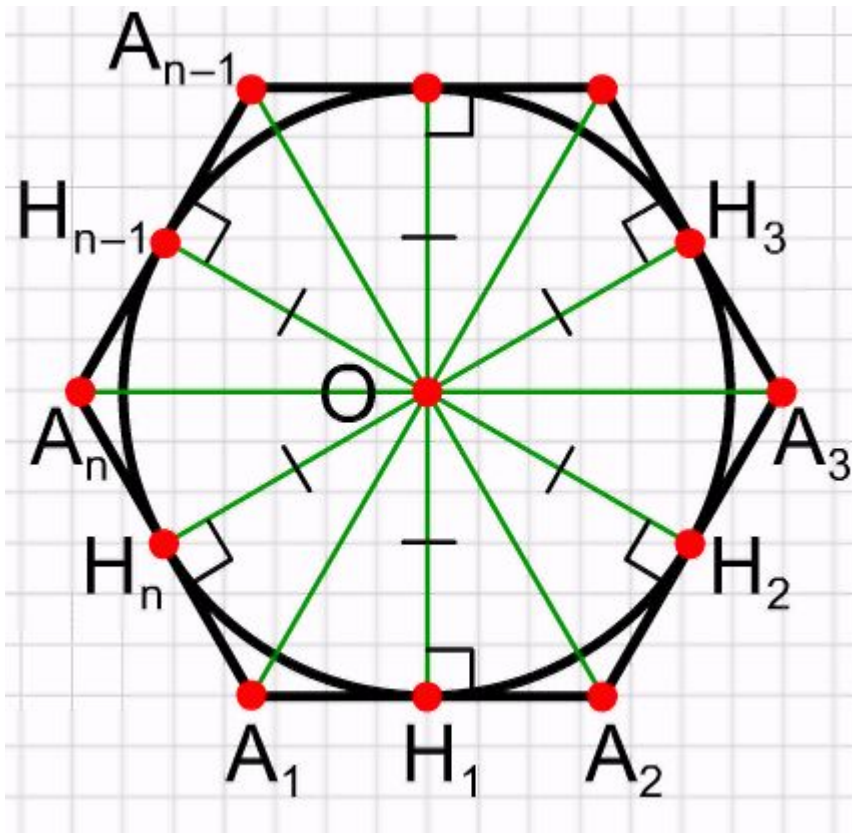
Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает ряд важных следствий. Рассмотрим их.

Теорема. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, причем только одну.

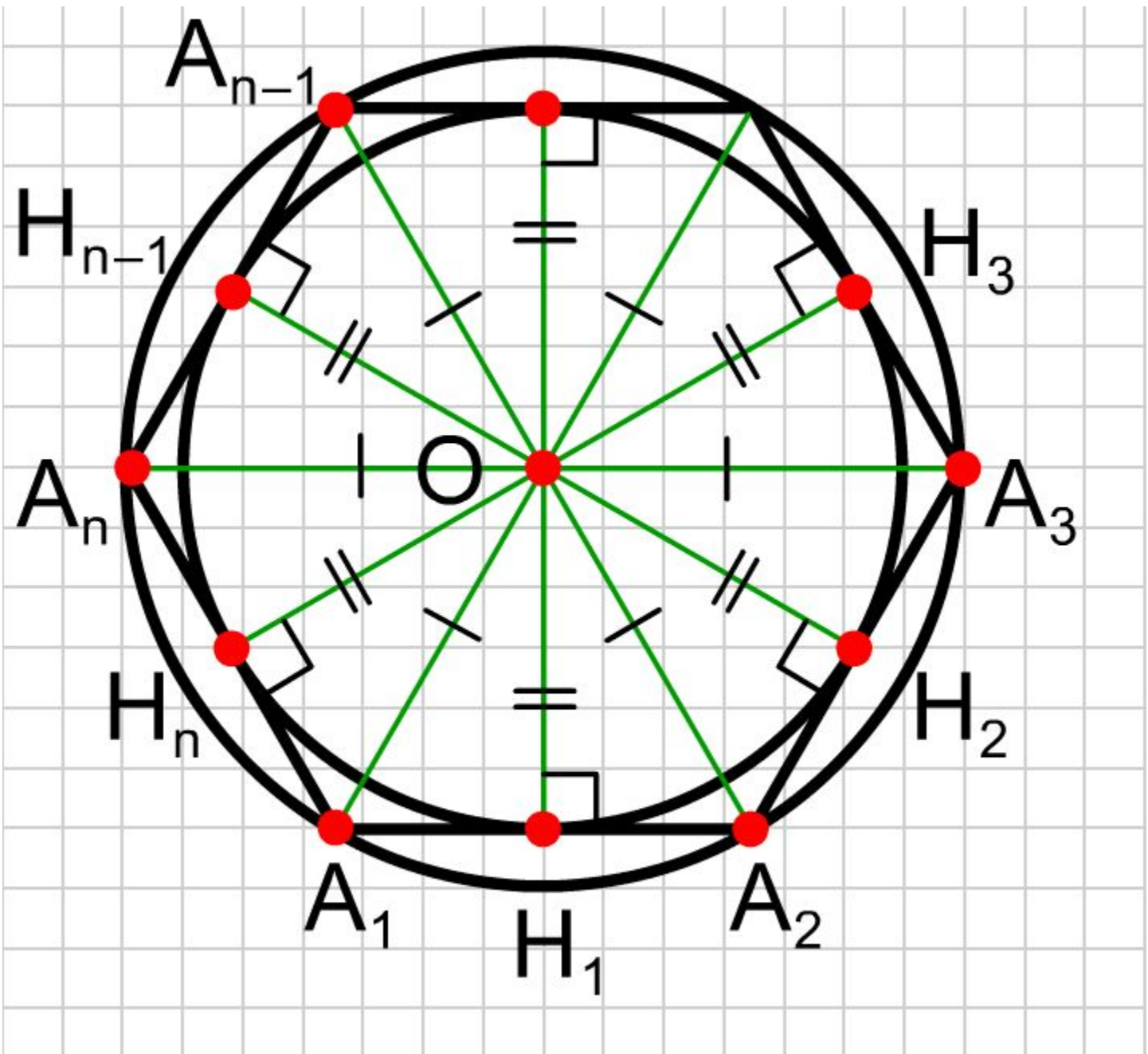


Теорема. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, причем только одну.



Следствие 1. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.





Следствие 2. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности.

