НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

СЕМИНАР 5

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, для всех $x \neq x_0$.
Тогда функция называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняются следующие условия:

а) существует $f(x_0)$;

б) существуют и конечны односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A^-$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A^+$;

в) $A^- = A^+ = f(x_0)$.

Эти три условия можно объединить в одно высказывание: функция непрерывны в точке, если

$$\lim_{x\to x_0} f\,(x) = f\,(x_0),$$

т.е. предел функции в точке существует и равен значению функции в этой точке.

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Если хотя бы одно из условий а) - в) не выполняется, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не является непрерывной, и точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Точки разрыва делятся на два типа: I и II рода.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A^-$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A^+$ конечны, то x_0 – *точка разрыва I рода.*

- если $A^- \neq A^+$, то в точке x_0 *неустранимый* разрыв I рода ("скачок");
- если $A^- = A^+ \neq f(x_0)$, или $A^- = A^+$, а $f(x_0)$ не существует, то в точке x_0 *устранимый* разрыв I рода.

Если хотя бы одно из A^- или A^+ равно ∞ или не существует, то x_0 – *точка разрыва II рода*.

Элементарные функции непрерывны во всех точках своей области определения.

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Исследование функции на непрерывность проводится по следующей схеме:

1. Выделить точки возможного разрыва функции. Для элементарной функции это точки, в которых функция не определена. Для составной функции, например:
   $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & -\infty < x \le a \\ f_2(x), & a < x < +\infty \end{cases}$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - элементарные функции, определенные на $(-\infty, a]$ и $(a, +\infty)$, соответственно;

   это точки, в которых происходит смена аналитических выражений, с помощью которых задана неэлементарная функция (в приведенном примере это точка $x = a$).

2. Найти односторонние пределы функции в каждой из выделенных точек $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и значения функции, если это возможно.

3. Сравнить значения односторонних пределов и значения функции в точках возможного разрыва и сделать вывод.

4. Начертить эскиз графика функции. Для уточнения графика функции можно найти $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пример 1. Исследуем на непрерывность функцию $y = \frac{\sin x}{x}$.

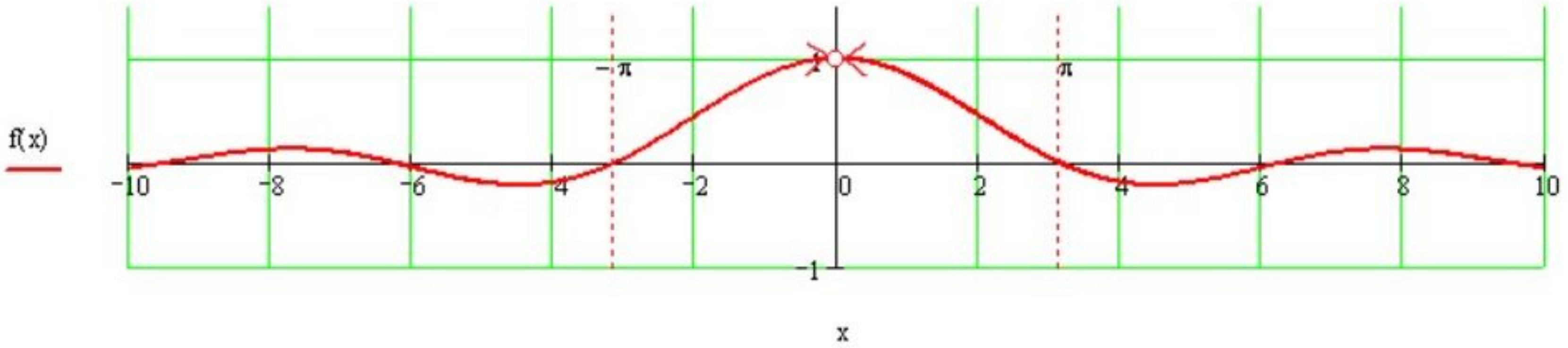
Р е ш е н и е. Данная элементарная функция определена и непрерывна при всех $x \neq 0$.

Так как $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел), то $x = 0$ является точкой разрыва I рода, устранимого.

График рассматриваемой функции пересекает ось Ox в точках, в которых $\sin x = 0$, т.е. при $x = \pi n$.

Предел на бесконечности: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

График функции.



ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пример 2. Исследуем на непрерывность функцию $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. Данная функция является элементарной, определенной при всех $x \neq 0$, следовательно, при таких значениях x она является непрерывной.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 0$:

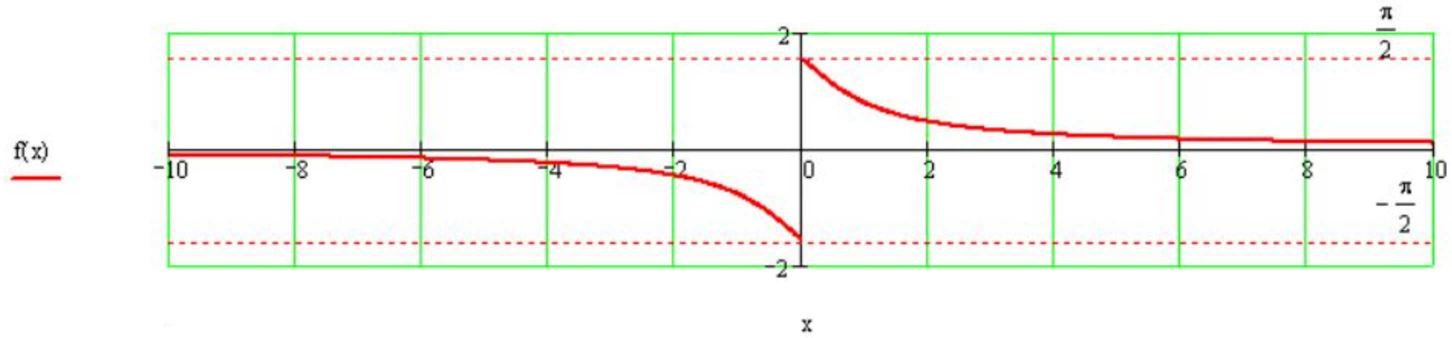
$$\lim_{x\to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{-0}\right] = [\operatorname{arctg}(-\infty)] = -\frac{\pi}{2} \text{ и } \lim_{x\to +0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{+0}\right] = [\operatorname{arctg}(+\infty)] = \frac{\pi}{2}.$$

Односторонние пределы конечны и не равны, следовательно, $x = 0$ – точка разрыва I рода, неустранимого.

Пределы на бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{\infty}\right] = \operatorname{arctg}(0) = 0.$$

График функции:



ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пример 3. Исследуем на непрерывность функцию $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Р е ш е н и е. Данная функция является элементарной, определенной при всех $x \neq 1$, следовательно, она является непрерывной при $x \neq 1$.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 1$:

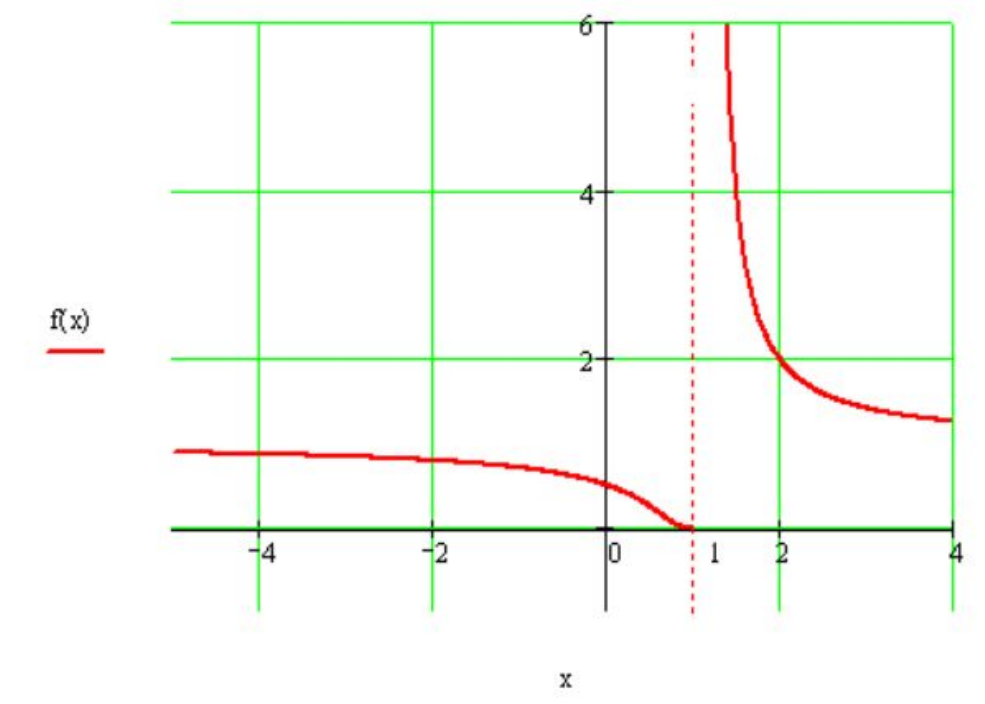
$$\lim_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left[2^{\frac{1}{1-0-1}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} \right] = 0$$

$$\lim_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left[2^{\frac{1}{1+0-1}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} \right] = +\infty.$$

Так как предел справа равен $+\infty$, то $x = 1$ – точка разрыва II рода.

Для уточнения графика найдем пределы на бесконечности:

$$\lim_{x \to \infty} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left[2^{\frac{1}{\infty-1}} = 2^{\frac{1}{\infty}} \right] = 2^0 = 1.$$



ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x+2, & x < -1, \\ x^2, & -1 \le x < 1, \\ 2, & x \ge 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Данная функция не является элементарной, но в интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ она задана одним аналитическим выражением, определена в каждом из этих интервалов, следовательно, непрерывна. Разрыв у данной функции может быть в точках $x = -1$ и $x = 1$. Найдем односторонние пределы и значение функции в каждой из этих точек.

$$\lim_{x\to -1-0} y = \lim_{x\to -1-0} (x+2) = 1, \quad \lim_{x\to -1+0} y = \lim_{x\to -1+0} x^2 = 1,$$

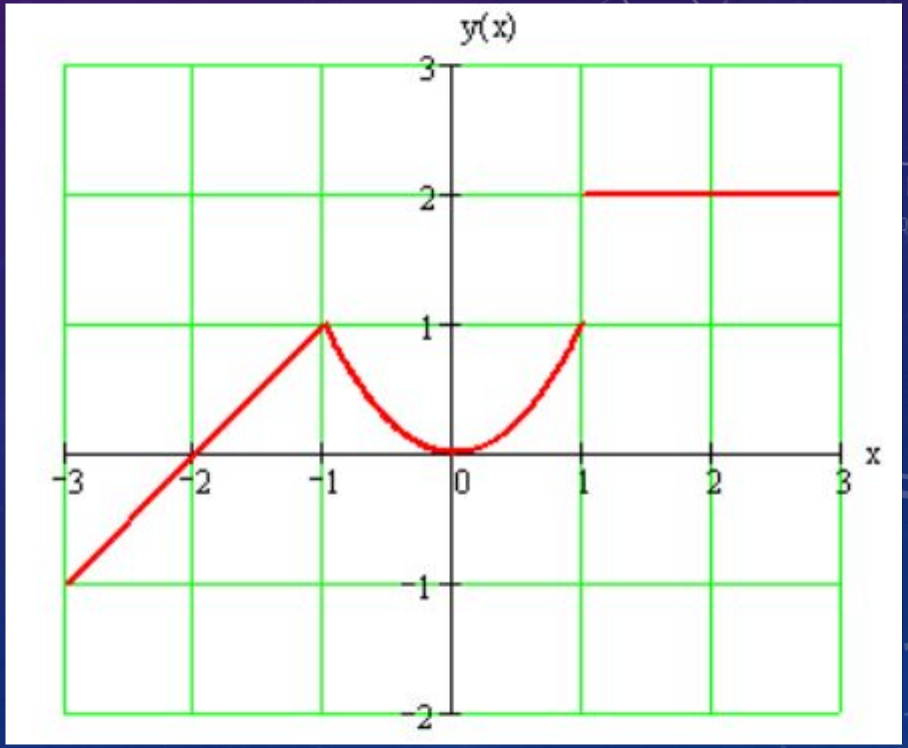
$$y(-1) = x^2\big|_{x=-1} = 1.$$

Односторонние пределы функции в точке $x = -1$ равны между собой и равны значению функции в этой точке, следовательно, $x = -1$ является точкой непрерывности функции.

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1, \quad \lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} 2 = 2,$$

$$y(1) = 2.$$

Односторонние пределы функции в точке $x = 1$ конечны и не равны между собой, следовательно, $x = 1$ – точка разрыва первого рода, неустранимого.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Точка возможного разрыва функции $y = \frac{1}{(x+2)^2}$: ______ .

В этой точке предел слева равен: ______ , предел справа равен: ______ .

Таким образом, данная точка является точкой ______ .

- Ответы: x = - 2; + ∞ ; + ∞ ; точка разрыва второго рода

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Точка возможного разрыва функции $y = 3^{\frac{1}{x-1}}$: ______ .

В этой точке предел слева равен: ______ , предел справа равен: ______ .

Таким образом, данная точка является точкой ______ .

- Ответы: x = 1; 0 ; +∞ ; точка разрыва второго рода

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Точка возможного разрыва функции $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$: ________.

В этой точке предел слева равен: ____, предел справа равен: ____.

Таким образом, данная точка является точкой ________.

- Ответы: x = 0; 1 ; 0 ; точка разрыва первого рода, неустранимая

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Точка возможного разрыва функции $y = x \sin \frac{1}{x}$: ________ .

В этой точке предел слева равен: ____ , предел справа равен: ____ .

Таким образом, данная точка является точкой ________ .

- Ответы: x = 0; 0 ; 0 ; точка разрыва первого рода, устранимая

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Исследуйте на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} 0, & x < -\pi, \\ \sin x, & -\pi \le x < 0, \\ x + 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

в точках $x = -\pi$ и $x = 0$.

В точке $x = -\pi$ предел слева равен: ___, предел справа равен: ___, значение функции в этой точке равно ___.

Таким образом, данная точка является точкой ___.

В точке $x = 0$ предел слева равен: ___, предел справа равен: ___, значение функции в этой точке равно ___.

Таким образом, данная точка является точкой ___.

Ответы: 0; 0; 0; точка непрерывности;

0; 1; 1; точка разрыва первого рода, неустранимого.