Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук

Доклад
«Теоретико-игровые модели поиска на графе»

Докладчик: аспирант Гусев В. В.
Руководитель: д. ф.-м. н., профессор Мазалов В. В.

Петрозаводск, 2017

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Найдена ситуация равновесия для игры патрулирования с неподвижным прячущимся игроком для разных видов графов.

2. Построена кооперативная модель игры патрулирования в которой патрулирующие игроки подразделяются на слабых и сильных игроков. Найдены значения векторов Шепли, Оуэна и Ауманна-Дрезе для эффективной коалиционной структуры. Доказана супераддитивность характеристической функции игры, показана взаимосвязь вектора Оуэна и Ауманна-Дрезе.

3. Построена многошаговая теоретико-игровая модель поиска двух подвижных игроков на графе. Найдено равновесие по Нэшу в многошаговой игре с предположением, что бюджет, направляемый в группу вершин, имеющих общего родителя, фиксирован. Доказано существование равновесия на каждом шаге, найдено решение одношаговой игры с неэкспоненциальной вероятностью обнаружения.

Математическая модель поиска н. о. на графе

$$G = \langle P, A; Q; S_1, S_2; H(\cdot) \rangle$$

P, A – патрулирующий и атакующий игроки соответственно;
$Q = \langle V, E \rangle$ - связный граф, $n = |V|$;
Множество чистых стратегий игрока P:

$$S_1 = \left\{ v_{k_1} - v_{k_2} - \ldots - v_{k_T} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall\, \mathrm{j} = 1, \ldots, T : v_{k_j} \in V; 1 \le k_j \le n; T \ge 1; \\ \forall t = 1, \ldots, T-1 : \left(v_{k_t} - v_{k_{t+1}} \right) \in E \end{array} \right\}$$

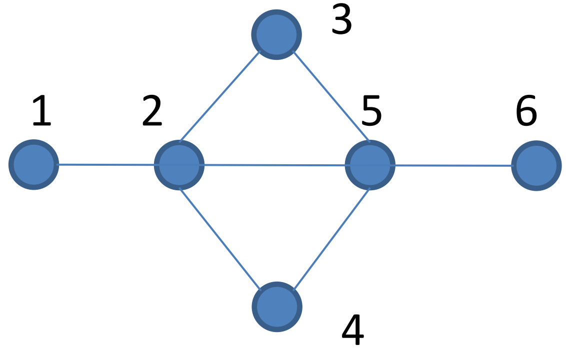
Множество чистых стратегий игрока A:

$$S_2 = \left\{ \underbrace{0 - \ldots - 0}_{t} - \underbrace{v - \ldots - v}_{m} - 0 - \ldots - 0 \mid t = 0, \ldots, T - m, v \in V, m \ge 1 \right\}$$

Индикатор встречи игроков: $\forall u \in S_1, \forall w \in S_2 \;\; h(u, w) = \begin{cases} 0, \forall = 1, \ldots, m : v_{t+j} \ne v; \\ 1, \exists j = 1, \ldots, m : v_{t+j} = v. \end{cases}$

$G(Q, T, m)$ – краткое обозначение игры. Т – длина пути игрока P, m – время проведения атаки.

Граф Q



$$T = 6, m = 3$$

$u_1 = 1-2-3-2-4-5$

$w_1 = 0-0-1-1-1-0$

$h(u_1, w_1) = 0.$

$u_2 = 3-2-4-5-3-2$

$w_2 = 0-4-4-4-0-0$

$h(u_2, w_2) = 1.$

Смешанные стратегии игроков Р, А соответственно :

$$x=\left(x_1,\ldots,x_{|S_1|}\right), y=\left(y_1,\ldots,y_{|S_2|}\right); x_i\geq 0, \sum_{i=1}^{|S_1|} x_i=1; y_j\geq 0, \sum_{j=1}^{|S_2|} y_j=1$$

Функция выигрыша игрока Р

$$H(x,y)=\sum_{i=1}^{|S_1|}\sum_{j=1}^{|S_2|} x_i y_j h\left(u_i,w_j\right), u_i\in S_1, w_j\in S_2, H^*=H\left(x^*,y^*\right) -$$ значение игры

Определение 1. Путь – элемент множества S_1.

Определение 2. Атака– элемент множества S_2.

Лемма 1. Игрок Р, выбирая путь $u\in S_1$, ловит не более $m(T-m+1)$ атак игрока А.

$$\overline{A}=\max_x \sum_{j=1}^{|S_2|} H\left(x,w_j\right)$$

Лемма 2. Значение игры $G(Q,T,m)$ $H^*\leq \frac{\overline{A}}{|S_2|}$.

$Q = C_n$ – граф-цикл.

Теорема 1. Обозначим $\sigma_k = (k+1, k+2, \dots, n, 1,2, \dots, k), k = \overline{0, n-1}$ - перестановка чисел $1,2,\dots,n$; $\sigma_k(j)$ – j-ый элемент набора σ_k; $\sigma_{k'}(j) = \sigma_{k' \bmod n}(j)$, $k' > n-1$. Если патрулирующий выбирает пути из множества

$$\overline{S_1} = \left\{ v_{\sigma_0(j)} - v_{\sigma_1(j)} - \dots - v_{\sigma_{T-1}(j)} \mid j = 1, \dots, n \right\}$$

с вероятностью $\frac{1}{n}$, а атакующий все стратегии из S_2 с вероятностью $\frac{1}{n(T-m+1)}$, то такой набор стратегий будет ситуацией равновесия со значением игры $H^* = min\left\{\frac{m}{n}, 1\right\}$

$Q = S_n$ – граф-звезда, $n \neq 1$.

Теорема 2. $]T \geq m+1$. $H^* = \min\left\{\frac{m}{2(n-1)}, 1\right\}$

Теорема 3. $]T = m$. $H^* = \min\left\{\frac{1}{n-1} \cdot \left[\frac{m+1}{2}\right], 1\right\}$

$Q = L_n$ – линейный граф, $n \neq 1$.

Теорема 4. $\rbrack m = 2, n$ – чётно. $H^* = \min\left\{\frac{2}{n}, 1\right\}$

Теорема 5. $\rbrack m = 2, n$ – нечётно. $H^* = \frac{2}{n+1}$

Теорема 6. $\rbrack T + n \leq 2$. $H^* = 1$

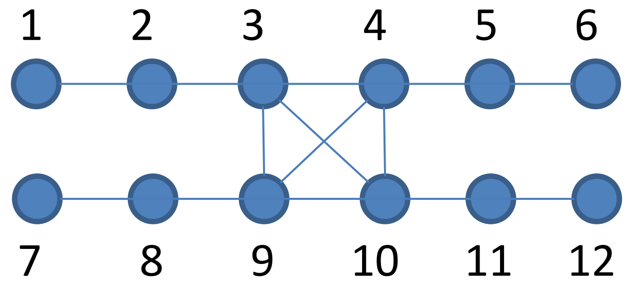
Теорема 7. $\rbrack m = n-1, T < m+n-2$. $H^* = \frac{1}{2}$

Теорема 8. $\rbrack m = n, T < m+n-2$. $H^* = \frac{T-m+2}{2(T-m+1)}$

Теорема 9. $\rbrack T \geq m+n-2, m \neq 2$. $H^* = \min\left\{\frac{m}{2(n-1)}, 1\right\}$

$Q = R(k,l), k \geq 2, l \geq 2$

k – число этажей;
2l – количество квартир на этаже.



$k = 2, l = 3$

3, 4, 9, 10 – начало пути игрока P

Теорема 10. Для графа $R(k,l)$ справедливы следующие утверждения

1. или $]m < l$. $T \leq l$ $H^* =$

2. $]m = T = l + (2k-1)(2l-1)$. $H^* = 1$.

3. $]m = T = l$. $H^* = \dfrac{1}{2kl}$.

4. чётно, $]m = T = l - 2$ $2 = 1kl + (1\ k -)(l -)$ $H^* \leq \dfrac{(2k-1)(7l+2)}{16k(2kl - k - l + 1)}$

Определение 3. $\mu(x, y)$ – средняя длина пути патрулирующего, которая вычисляется по формуле

$$\mu(x, y) = \sum_{i=1}^{|S_1|} \sum_{j=1}^{|S_2|} \tilde{T}_{ij} x_i y_j,$$

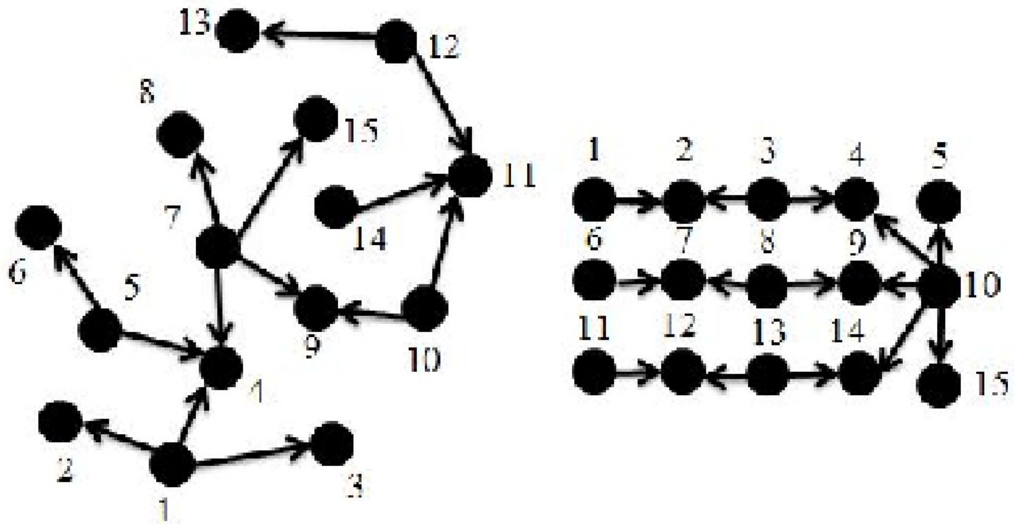
где $\widetilde{T_{ij}}$ – количество рёбер, по которым прошёл патрулирующий до встречи с атакующим, $0 \leq \widetilde{T_{ij}} \leq T - 1$. Если игроки не встретились, то $\widetilde{T_{ij}} = T - 1$

Теорема 11. Пусть в ситуации равновесия в игре G(Q,T,m) атакующий выбирает всевозможные атаки, а в оптимальных путях патрулирующего в каждый момент времени t каждая вершина встречается один раз. Тогда

$$\mu(x^*, y^*) = (T - 1)\left(1 - \frac{H^*}{2}\right)$$

Утверждение. $\frac{\mu}{2} < v < \mu$, v – значение игры, μ – длина пути Эйлеровом графе.[1]

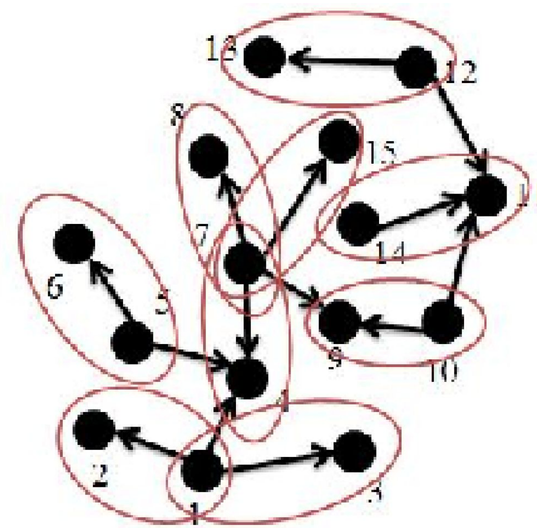
$Q = B_n$ – ориентированный граф, состоящий только из начальных и конечных вершин.



Графы B_{15}

Теорема 12. $$H^* = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & T \geq 2m-1; \\ \dfrac{1}{r}, & T < 2m-1. \end{cases},$$

где r – минимальное число графов покрытия из 2-х вершин графа B_n. Число r зависит от структуры B_n



Покрытие графа

Игра патрулирования с камерой слежения.

Дополнительное условие: как только атакующий появляется на графе, патрулирующий узнает его местоположение

$Q_1, \dots, Q_r$ – покрытие графа Q, $\mathrm{r} \geq 1$, $\mathrm{d}_i \leq 2m+1$, r – минимально, d_i - диаметр Q_i

Теорема 13. Пусть в каждой вершине связного графа установлена камера слежения. Тогда $H^* = \frac{1}{r}$.

Кооператиная игра с коалиционной структурой

Множество патрулирующих игроков

$$N=\{P_1,\ldots,P_n\}$$

A – атакующий игрок; m – количество охраняемых объектов, $1+\left[\frac{n-1}{2}\right]\leq m.$

Правила поимки атакующего:

1. Если на фиксированном охраняемом объекте количество патрулирующих больше одного, то атакующий, если он находится на рассматриваемом объекте, считается пойманным.
2. Если на охраняемом объекте нет патрулирующих, но есть атакующий, то этот злоумышленник не пойман.
3. Допустим ситуацию, при которой на охраняемом объекте один патрулирующий и один атакующий. Если патрулирующий это игрок P_1, то атакующий пойман, иначе не пойман.

$\frac{1}{m}$ - вероятность, с которой А выбирает любой охраняемый объект.

Патрулирующие разбиваются на коалиции и коалициями распределяются по объектам. Переходить с объекта на объект нельзя.

Определение 4. Коалиционная структура π - это такое разбиение $\{B_1, \dots, B_l\}$ N, что выполняются следующие свойства: 1. $B_1 \cup \dots \cup B_l = N$; 2. $\forall i, j, i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$.

Определение 5. Эффективная коалиционная структура π_e - это коалиционная структура, при выборе которой вероятность поимки атакующего максимальна.

$$\pi_e = \{\{P_1\}, \{P_2, P_3\}, \dots, \{P_{n-2}, P_{n-1}\}, \{P_n\}\}, \; N - \text{чётно},$$

$$\pi_e = \{\{P_1\}, \{P_2, P_3\}, \dots, \{P_{n-1}, P_n\}\}, \; N - \text{нечётно}.$$

$$\Gamma = \langle N, v(K), \pi_e \rangle, K \subseteq N$$

$$v(K) = \begin{cases} \dfrac{1}{m}\left(1 + \left[\dfrac{|K| - 1}{2}\right]\right), & P_1 \in K; \\ \dfrac{1}{m}\left[\dfrac{|K|}{2}\right], & P_1 \notin K. \end{cases}$$

$v(K)$ – вероятность поимки атакующего коалицией K

Лемма 3. Характеристическая функция $v(K)$ обладает свойством монотонности и супераддитивности.

Вектор Шепли

Теорема 14. $$\phi_{P_i}(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}, & i=1;\\[2ex] \dfrac{1}{2m}, & i\neq 1,\ N \text{ нечётно};\\[2ex] \dfrac{N-2}{2m(N-1)}, & i\neq 1,\ N \text{ чётно}.\end{cases}$$

Примеры:

$$m=5$$

$$\pi_e=\{\{P_1\},\{P_2,P_3\},\{P_4,P_5\}\}$$

$$\phi=\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$$

$$m=4$$

$$\pi_e=\{\{P_1\},\{P_2,P_3\},\{P_4\}\}$$

$$\phi=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12}\right)$$

Вектор Ауманна-Дрезе

$$\phi_i^{\pi}(v)=\sum_{S\subseteq B(\mathrm{i}):\mathrm{i}\in \mathrm{S}}\frac{\left(\left|B(i)\right|-\left|S\right|\right)!\left(\left|S\right|-1\right)!}{\left|B(i)\right|!}\left(v(S)-v\left(S\setminus\{i\}\right)\right)$$

Теорема 15. $\phi_{P_i}^{\pi_e}(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}, & i=1;\\ \dfrac{1}{2m}, & \left|B(i)\right|=2;\\ 0, & \left|B(i)\right|=1, i\neq 1.\end{cases}$

Примеры :

$$m=5 \qquad\qquad m=4$$

$$\pi_e=\{\{P_1\},\{P_2,P_3\},\{P_4,P_5\}\} \qquad \pi_e=\{\{P_1\},\{P_2,P_3\},\{P_4\}\}$$

$$\phi^{\pi}=\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right) \qquad \phi^{\pi}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8},0\right)$$

Вектор Оуэна

$$Ow_i(N,v,\pi) = \frac{\sum\limits_{\sigma \in \Sigma(N,\pi)} \left(v\left(K_i(\sigma)\right) - v\left(K_i(\sigma) \setminus \{i\}\right) \right)}{\left|\Sigma(N,\pi)\right|}$$

$$\Sigma(N,\pi) = \left\{ \sigma \mid \forall i, j \in B \in \pi : \left|\sigma(i) - \sigma(j)\right| < B \right\}$$

Теорема 16. Вектор Оуэна, вычисленный для эффективной коалиционной структуры, совпадает с вектором Ауманна-Дрезе.

Утверждение. Вычислительная сложность вектора Оуэна для перчаточной игры с коалиционной структурой полиномиального порядка.[1]

[1]Belau J. A Note on the Owen Value for Glove Games// International Game Theory Review (IGTR). 2015. V. 17, N 4. P. 1550014-1-1550014-8.

$$f : \mathrm{N} \to \{1, 2\},\ f(A) = \text{сила игрока } P_i$$

$$v(K) = \begin{cases} \dfrac{l(K)}{m}, & \sum\limits_{I \in K} f(I) \geq 3; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

где $l(K)$ – максимальное количество подкоалиций K' в разбиении коалиции K, для которых выполняется условие $\sum_{I \in K'} f(I) \geq 3$. $l(N) \leq m$.

$$N = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\},\ f(P_1) = f(P_2) = 2,\ f(P_3) = f(P_4) = f(P_5) = 1,\ m = 5;$$

$$v(P_1) = 0,\ v(P_1, P_2) = \frac{1}{5},\ v(P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{5},\ v(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{2}{5},\ v(N) = \frac{2}{5}$$

$$\pi_\alpha = \{\{P_1, P_2\}, \{P_3\}, \{P_4\}, \ldots, \{P_{k+2}\}\}, k \geq 1, f(P_1) = 1, f(P_i) = 2 \;\; \forall i, i \neq 1$$

Теорема 17. $Ow_1(N, v, \pi_\alpha) = Ow_2(N, v, \pi_\alpha) = \dfrac{1}{2m}$

$$\pi_\beta = \{\{P_1, P_2\}, \{P_3\}, \{P_4\}, \ldots, \{P_{k+2}\}\}, f(P_2) = 2;, \;\; \forall i, i \neq 2 : f(P_i) = 1$$

Теорема 18. $Ow_1(N, v, \pi_\beta) = \dfrac{1}{2m(k+1)}\left(\left[\dfrac{k+1}{3}\right] + \left[\dfrac{k}{3}\right] + 1\right),$

$$Ow_2(N, v, \pi_\beta) = 1 - Ow_1(N, v, \pi_\beta)$$

π	$m \cdot Ow_1(N, v, \pi_\beta)$	$m \cdot Ow_i(N, v, \pi_\beta), i \neq 1, i \neq 2$
$\{P_1, P_2\}$	$0,5$	$-$
$\{P_1, P_2\}, \{P_3\}$	$0,250$	$-$
$\{P_1, P_2\}, \{P_3\}, \{P_4\}$	$0,333$	$-$
$\{P_1, P_2\}, \{P_3\}, \{P_4\}, \{P_5\}$	$0,375$	$0,333$
$\{P_1, P_2\}, \{P_3\}, \{P_4\}, \{P_5\}, \{P_6\}$	$0,3$	$0,25$

Поис мобильного игрока

$$G=\langle V,E\rangle$$

L – множество листовых вершин; $ch(i)=\{j \mid (i,j)\in E\}$ – потомки

$$\Gamma_2\left(1,g,l,\Phi_g,\Phi_l\right)=\left\langle I,II,III;P(g),Q(l),\Psi(g)\cup\Psi(l);H_1(\cdot),H_2(\cdot),H_3(\cdot)\right\rangle$$

$$\forall g\in V\setminus L: P(g)=\left\{(p_i)_{i\in ch(g)} \mid p_i\ge 0,\ \sum_{i\in ch(g)} p_i=1\right\}$$

$$\forall l\in V\setminus L: Q(l)=\left\{(q_j)_{j\in ch(l)} \mid q_j\ge 0,\ \sum_{j\in ch(l)} q_j=1\right\}$$

$$\forall g\in V\setminus L: \Psi(g)=\left\{(\varphi_i)_{i\in ch(g)} \mid \varphi_i\ge 0,\ \sum_{j\in ch(g)} c_i\varphi_i=\Phi_g\right\},\ \Phi_g\ge\phi_g>0$$

$1-e^{\alpha_i\varphi_i}$ – вероятность обнаружить 1-го или 2-го игрока соответственно, если игрок находится в i, $\alpha_i>0$.

$$H_1\left(1, p(g), \varphi(g)\right) = \sum_{i \in ch(g)} p_i \left(1 - e^{-\alpha_i \varphi_i}\right)$$

$$H_2\left(1, p(l), \varphi(l)\right) = \sum_{j \in ch(l)} q_j \left(1 - e^{-\alpha_j \varphi_j}\right)$$

$$\sum_{i \in ch(g)} c_i \varphi_i = \Phi_g, \quad \sum_{j \in ch(l)} c_j \varphi_j = \Phi_l$$

$$H_3\left(1, p(g), q(l), \varphi(g), \varphi(l)\right) = \sum_{i \in ch(g)} \sum_{j \in ch(l)} p_i q_j \left(1 - e^{-\alpha_i \varphi_i - \alpha_j \varphi_j}\right)$$

$$\Gamma_1\left(1, g, \Phi_g\right) = \left\langle I, II, III; P(g), Q(g), \Psi(g); H_1(\cdot), H_2(\cdot), H_3(\cdot)\right\rangle$$

$$H_1\left(1, p(g), \varphi(g)\right) = \sum_{i \in ch(g)} p_i \left(1 - e^{-\alpha_i \varphi_i}\right)$$

$$H_2\left(1, p(g), \varphi(g)\right) = \sum_{j \in ch(g)} q_j \left(1 - e^{-\alpha_j \varphi_j}\right)$$

$$\sum_{i \in ch(g)} c_i \varphi_i = \Phi_g$$

$$H_3\left(1, p(g), q(g), \varphi(g)\right) = \sum_{i \in ch(g)} \sum_{j \in ch(g)} p_i q_j \left(1 - e^{-\alpha_i \varphi_i - \alpha_j \varphi_j}\right)$$

$$\Gamma_2\left(\mathrm{k}, g, l, \Phi_g, \Phi_l\right)=\left\langle I, II, III; P(g), Q(l), \Psi(g)\cup\Psi(l); H_1(\cdot), H_2(\cdot), H_3(\cdot)\right\rangle$$

$$H_1\left(1, p(g), \varphi(g)\right)=\sum_{i\in ch(g)} p_i\left(1-e^{-\alpha_i\varphi_i}\right)+\sum_{i\in ch(g)} p_i e^{-\alpha_i\varphi_i} H_1^*\left(k-1, \mathrm{i}, \Phi_i\right)$$

$$H_2\left(1, p(l), \varphi(l)\right)=\sum_{j\in ch(l)} q_j\left(1-e^{-\alpha_j\varphi_j}\right)+\sum_{i\in ch(g)} p_j e^{-\alpha_j\varphi_j} H_2^*\left(k-1, \mathrm{j}, \Phi_j\right)$$

$$H_3\left(1, p(g), q(l), \varphi(g), \varphi(l)\right)=\sum_{i\in ch(g)}\sum_{j\in ch(l)} p_i q_j\left(1-e^{-\alpha_i\varphi_i-\alpha_j\varphi_j}\right)+$$

$$+\sum_{i\in ch(g)}\sum_{j\in ch(l)} p_i q_j e^{-\alpha_i\varphi_i-\alpha_j\varphi_j} H_3^*\left(k-1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \Phi_i, \Phi_j\right)$$

$$v(n, k, e, \Phi)=\max_{\varphi}\min_{p}\sum_{i\in N(k,e)} p_{k,i}\left\{1-e^{-\alpha_i\varphi_i}+e^{-\alpha_i\varphi_i} v\left(n-1, i, e-\eta(k,i), \Phi-\sum_{i\in N(\mathrm{k,e})} c_i\varphi_i\right)\right\}$$

[Hohzaki, 2007]

$$\Gamma_1\left(\mathrm{k}, g, \Phi_g\right) = \left\langle I, II, III; P(g), Q(g), \Psi(g); H_1(\cdot), H_2(\cdot), H_3(\cdot)\right\rangle$$

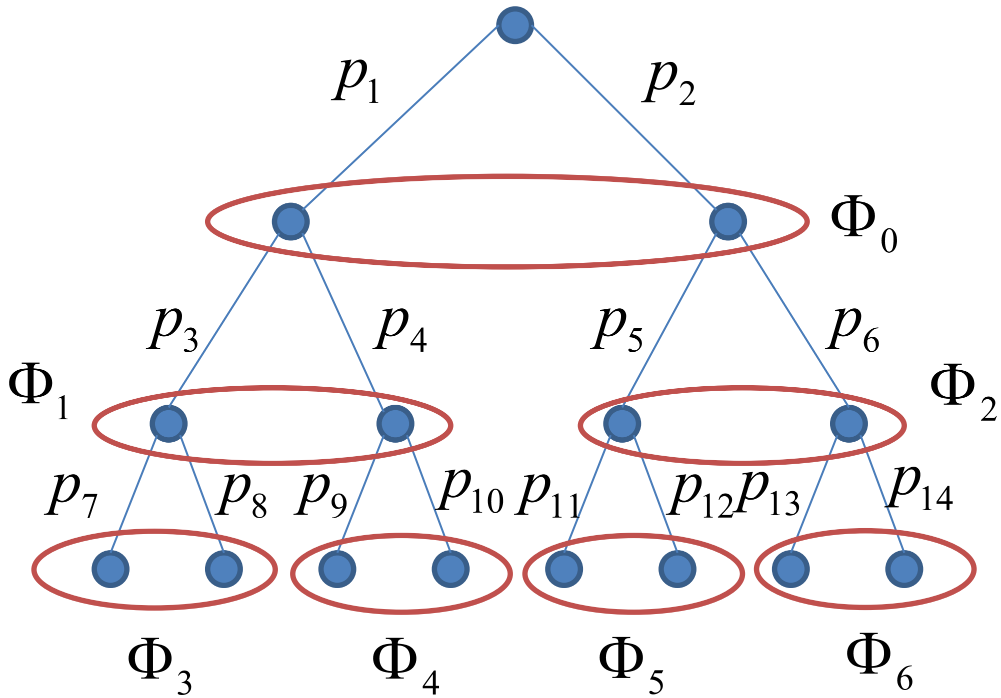
$$H_1\left(1, p(g), \varphi(g)\right) = \sum_{i\in ch(g)} p_i\left(1 - e^{-\alpha_i\varphi_i}\right) + \sum_{i\in ch(g)} p_i e^{-\alpha_i\varphi_i} H_1^*\left(k-1, \mathrm{i}, \Phi_i\right)$$

$$H_2\left(1, p(g), \varphi(g)\right) = \sum_{j\in ch(l)} q_j\left(1 - e^{-\alpha_j\varphi_j}\right) + \sum_{i\in ch(g)} p_j e^{-\alpha_j\varphi_j} H_2^*\left(k-1, \mathrm{j}, \Phi_j\right)$$

$$H_3\left(1, p(g), q(l), \varphi(g), \varphi(l)\right) = \sum_{i\in ch(g)} \sum_{j\in ch(l)} p_i q_j\left(1 - e^{-\alpha_i\varphi_i - \alpha_j\varphi_j}\right) +$$

$$+ \sum_{i\in ch(g)} p_i q_i e^{-2\alpha_i\varphi_i} H_3^*\left(k-1, \mathrm{i}, \Phi_i\right) + \sum_{i\in ch(g)} \sum_{j\in ch(l)} p_i q_j e^{-\alpha_i\varphi_i - \alpha_j\varphi_j} H_3^*\left(k-1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \Phi_i, \Phi_j\right)$$

Лемма 4. В играх $\Gamma_1(k, g, \Phi_g)$ и $\Gamma_2\left(k, g, l, \Phi_g, \Phi_l\right)$ существует равновесие по Нэшу



$$\forall i = \overline{1,7} : p_{2i-1} + p_{2i} = 1,$$

$$p_{2i-1} \geq 0, p_{2i} \geq 0;$$

$$\sum_{i \in h(g)} c_i \varphi_i = \Phi_g,$$

Теорема 17. В игре $\Gamma_2(1, g, l, \Phi_g)$ верны следующие равенства

$$H_1^*(1, g, \Phi_g) = 1 - \exp\left(\frac{-\Phi_g}{\sum_{i \in ch(g)} c_i / \alpha_i}\right), \quad H_2^*(1, l, \Phi_l) = 1 - \exp\left(\frac{-\Phi_l}{\sum_{i \in ch(l)} c_i / \alpha_i}\right)$$

$$H_3^*(1, g, l, \Phi_g, \Phi_l) = 1 - \exp\left(-\frac{\Phi_g}{\sum_{i \in ch(g)} c_i / \alpha_i} - \frac{\Phi_l}{\sum_{i \in ch(l)} c_i / \alpha_i}\right)$$

$$p_i^* = \frac{c_i / \alpha_i}{\sum_{m \in ch(g)} c_m / \alpha_m}, \mathrm{q}_j^* = \frac{c_j / \alpha_j}{\sum_{m \in ch(l)} c_m / \alpha_m}, \varphi_i^* = \frac{\Phi_g / \alpha_i}{\sum_{m \in ch(g)} c_m / \alpha_m}, \varphi_j^* = \frac{\Phi_l / \alpha_j}{\sum_{m \in ch(l)} c_m / \alpha_m}$$

Теорема 18. В игре $\Gamma_1(1, g, \Phi_g)$ верны следующие равенства

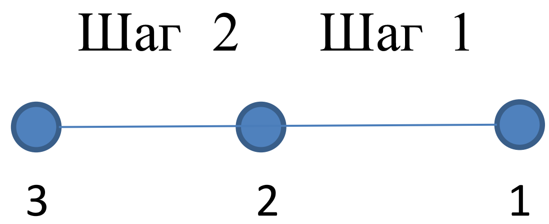
$$H_1^*\left(1, g, \Phi_g\right) = H_2^*\left(1, g, \Phi_g\right) = 1 - \exp\left(\frac{-\Phi_g}{\sum_{i \in ch(g)} c_i / \alpha_i}\right)$$

$$H_3^*\left(1, g, l, \Phi_g, \Phi_l\right) = 1 - \exp\left(-\frac{2\Phi_g}{\sum_{i \in ch(g)} c_i / \alpha_i}\right)$$

$$p_i^* = \gamma_i, q_i^* = 2 \cdot \frac{c_i / \alpha_i}{\sum_{m \in ch(g)} c_m / \alpha_m} - \gamma_i, 0 \le \gamma_i \le 2 \cdot \frac{c_i / \alpha_i}{\sum_{m \in ch(g)} c_m / \alpha_m}, \sum_{i \in ch(g)} \gamma_i = 1$$

L_{n+1}

n – количество шагов



Теорема 19. В игре $\Gamma_1(n, n+1, \Phi_n)$ для линейного графа верны следующие равенства

$$H_1^*(\mathrm{n}, \mathrm{n}+1, \Phi_n) = H_2^*(\mathrm{n}, \mathrm{n}+1, \Phi_n) = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{c_i} \Phi_i\right),$$

$$H_3^*(\mathrm{n}, \mathrm{n}+1, \Phi_n) = 1 - \exp\left(-2\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{c_i} \Phi_i\right)$$

Теорема 20. Пусть оба подвижных объекта на шаге n находятся в вершине g. Тогда оптимальные стратегии игроков имеют вид

$$\varphi_i^* = \left[\frac{\Phi_g / \alpha_i}{\sum\limits_{j \in M(\mathrm{g})} c_j / \alpha_j} - \frac{1}{\alpha_i} \cdot \frac{\sum\limits_{j \in M(\mathrm{g})} c_j / \alpha_j \ln \beta_j}{\sum\limits_{j \in M(\mathrm{g})} c_j / \alpha_j} + \frac{\ln \beta_i}{\alpha_i} \right]^+ ,$$

$$p_i^* = \begin{cases} \dfrac{c_i / \alpha_i}{\sum\limits_{j \in M(g)} c_j / \alpha_j}, i \in M(\mathrm{g}); \\ 0, i \notin M(\mathrm{g}). \end{cases}$$

где $M(g)$ − множество потомков вершины g, для которых $\varphi_i{}^* > 0$,

$\beta_j = 1 - H_1{}^*(n-1, j, \Phi_j)$

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017614131

Программа для поиска оптимальных путей в задаче патрулирования

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук (RU)***

Автор: ***Гусев Василий Васильевич (RU)***

Заявка № **2017611282**

Дата поступления **15 февраля 2017 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***06 апреля 2017 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Список публикаций ВАК по теме диссертации

1. В. В. Гусев, В. В. Мазалов, “Оптимальные стратегии в игре патрулирования на графе”, Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 2015, № 2, 61–76.

2. В. В. Гусев, Ситуация равновесия в игре патрулирования с камерой слежения // Труды Карельского научного центра РАН, № 10. 2015. С. 28-33. DOI: 10.17076/mat145.

3. В. В. Гусев, Поиск оптимального начального распределения местоположения игроков в игре патрулирования //Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2015, т. 25, вып. 4, с. 453-458 DOI: 10.20537/vm150402.

4. В. В. Гусев, “Векторы Шепли, Оуэна и Ауманна–Дрезе в игре патрулирования с коалиционной структурой”, МТИП, 8:4 (2016), 30–42.

Список публикаций в сборниках конференций

5. B. Gusev, V. Mazalov Optimal strategies in the patrol game on a graph// SING-GTM2015 European Meeting on Game Theory Abstracts. 2015. pp 52-53.

6. V. V. Gusev, V. V. Mazalov Optimal Strategies in the Patrol Game on a Graph// NGM, Сборник расширенных тезисов. 2015. p. 12.

7. V. Gusev Shaply Value, Owen and Aumann-Dreze vectors in Patrolling Game With Coalitional Structure// Game theory and Management. Collecked abstract. 2016. P. 60 .

8. В. В. Гусев Векторы Шепли, Оуэна и Ауманна–Дрезе в игре патрулирования с коалиционной структурой // ORM VIII Московская международная конференция по исследованию операций. Том 2. 2016. pp 178-179.

9. V. Gusev Game-Theoretic model of detection of submarines // NGM International Workshop Networking Games and Management. 2016. pp. 18-19.

Спасибо за внимание.