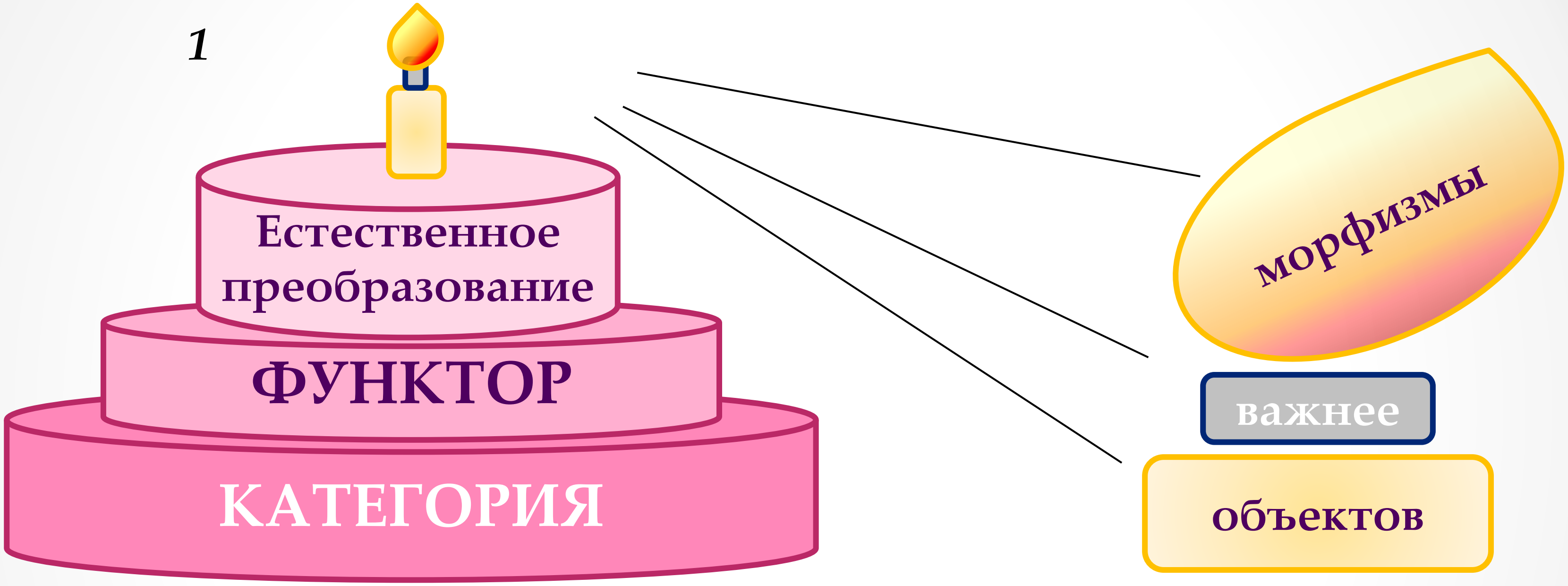
Об эквивалентности
2-мерных топологических квантовых теорий поля
и
абелевых Фробениусовых алгебр

Инструментарий

1



1 *Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane, General theory of natural equivalences, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 231–294*

Базовые понятия теории категорий

<u>Категория C</u>

состоит из

- Класса объектов

  $Ob(C) \ni$ **(x, y, z, …)**

- Класса морфизмов

  $Mor(C) \ni$**(f: x → y)** $\forall x, y \in Ob(C)$, *наделенных*

- Identity-морфизмом

  $id_x \colon x \to x$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop above, "id_x"] \end{tikzcd}$$

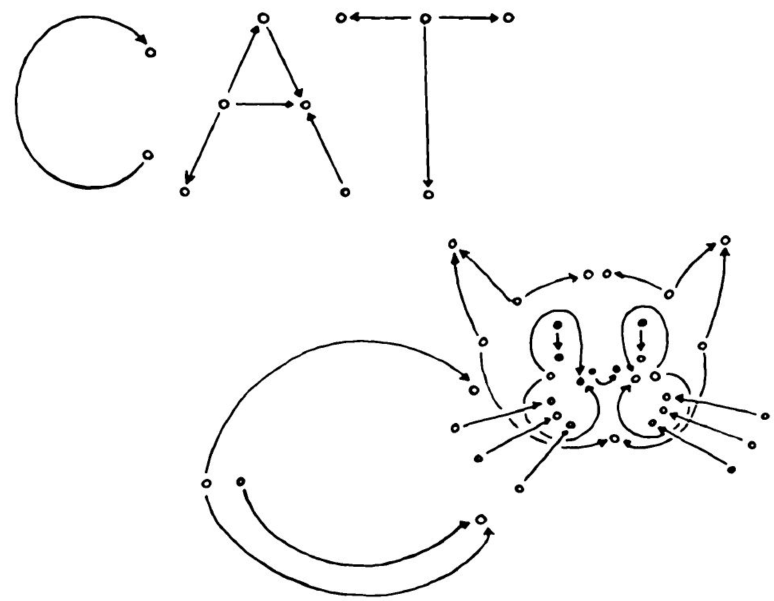
- $\forall f, g \in Mor(C)$,

  $f \colon x \to y,\ g \colon y \to z$

композицией

$gf \colon x \to z$

- $(fg)h = f(gh)$



Пример коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "id_x"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f \circ id_x = f = id_y \circ f"] & x \arrow[d, "f"] \\ y \arrow[r, "id_y"'] & y \end{tikzcd}$$

Базовые понятия теории категорий

Функтор $\boldsymbol{F}: C \to D$

$a \in Ob(C) \to F(a) \in Ob(D)$

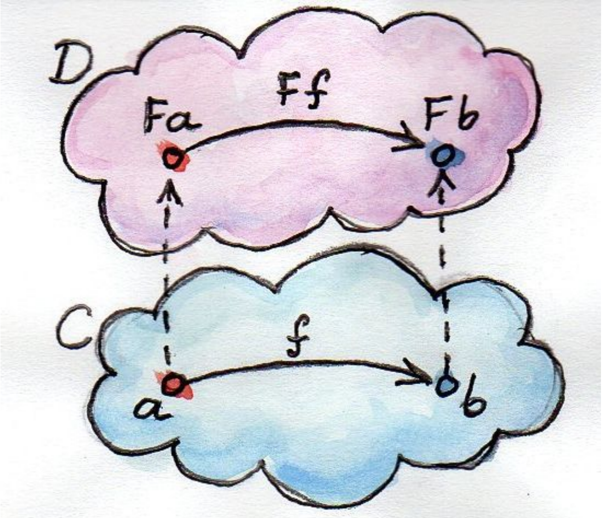
$f: a \to b \in Mor(C) \to$

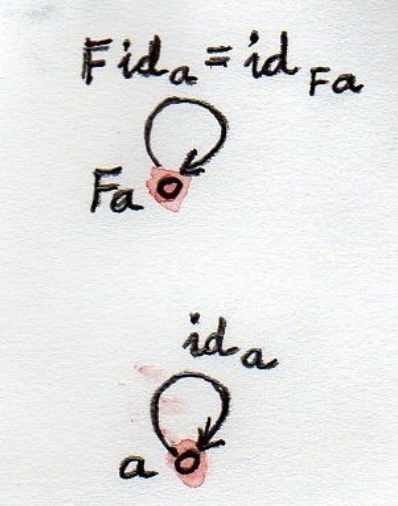
$F(f): F(a) \to F(b) \in Mor(D)$

- $F(id_a) = id_{F(a)}$

Ковариантный

- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$





Пример

Категория ***HTop***

$$Ob(HTop) \ni (\underset{T_2}{X}, \Omega_X)$$

$$Mor(HTop) \ni \varphi \in C^0(X, Y)$$

Базовые понятия теории категорий

Естественное преобразование $e : \Psi \to \Phi$ – это морфизм функторов, такой что

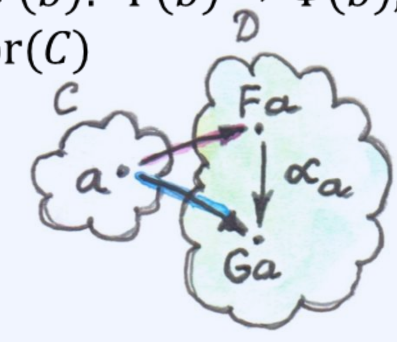
$\Psi: C \to {}'C$, $\Phi: C \to {}'C$

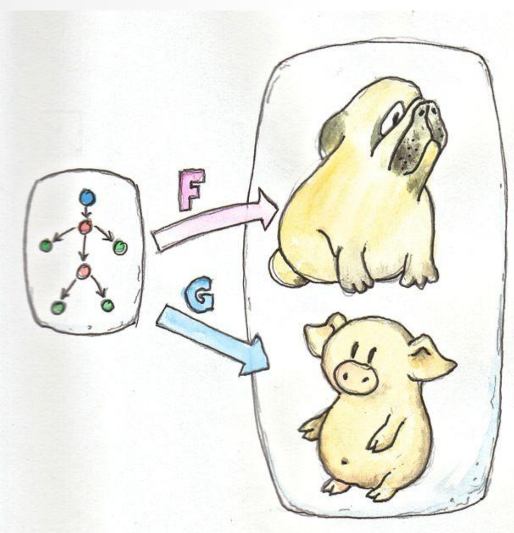
$\forall\, b \in Ob(C)\ \exists\, e(b)\colon \Psi(b) \to \Phi(b)$,

причем $\forall\, m \in \mathrm{Mor}(C)$, $m: b_j \to b_l$

квадрат коммутативен

$$\begin{array}{ccc} \Psi(b_j) & \xrightarrow{e(b_j)} & \Phi(b_j) \\ \Psi(m)\ \uparrow & & \uparrow\ \Phi(m) \\ \Psi(b_l) & \xrightarrow{e(b_l)} & \Phi(b_l) \end{array}$$





Функторы Ψ и Φ изоморфны,

$\Psi \overset{iso}{=} \Phi$,

когда $\exists\, e_l\colon \Psi \to \Phi$

и $e_j\colon \Psi \to \Phi$ такие, что

$$e_l \circ e_j = id_\Phi$$

$$e_j \circ e_l = id_\Psi$$

Функтор $\Psi : C \to {}'C$ –

эквивалентность

категорий C и $'C$, $C \simeq {}'C$,

когда $\exists\ {}'\Phi\colon {}'C \to C$,

такой, что

$$\begin{cases} {}'\Phi \circ \Psi \overset{iso}{=} id_C \\ \Psi \circ {}'\Phi \overset{iso}{=} id_{'C} \end{cases}$$

n-мерная топологическая квантовая теория поля Z [2,3]

$M \longrightarrow Z(M)$

Замкнутое ориентированное (n-1)-многообразие

Векторное пространство над полем F

$B: M \to N \longrightarrow Z(B): Z(M) \to Z(N)$

Ориентированный кобордизм

Линейное отображение между векторными пространствами

Функтор

- $'B \sim {''B} \Rightarrow Z('B) = Z(''B)$
- $Z(I(M)) \to id_{Z(M)}$
- $B = {''B}\,'B \to Z(B): Z('B) \to Z(''B)$

Моноидальность функтора

- $Z('M \coprod {''M}) = Z('M) \otimes Z(''M)$
- $Z(\emptyset) = F$

2 Witten, E., Comm. Math. Phys. 121 (1989), 351-399.
3 Atiyah, M., Inst. Hautes ' Etudes Sci. Publ. Math. 68 (1988), 175-186.

Категория *nCob*

- **Ориентированным кобордизмом** с M_0 на M_1 называется компактное ориентированное многообразие B вместе с гладкими отображениями

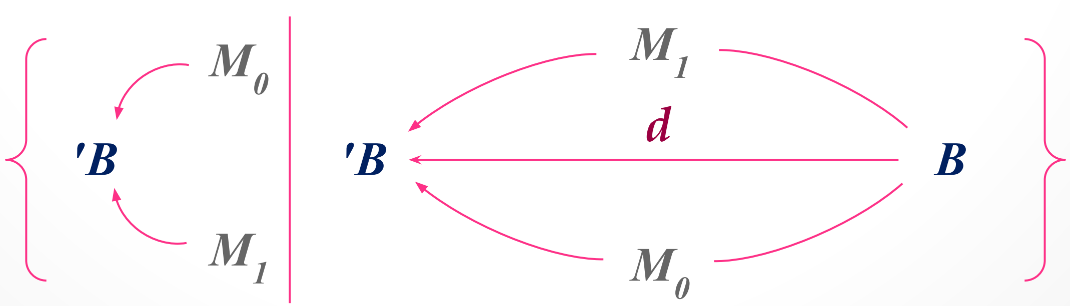
  $M_0 \rightarrow B \leftarrow M_1$, такое, что:

  - M_0 отображается диффеоморфно с сохранением ориентации на $in(\partial B)$
  - M_1 отображается диффеоморфно с сохранением ориентации на $out(\partial B)$

Категория *nCob*

- Объекты **Ob** (*nCob*) ∋ M^{n-1} : замкнутые ориентированные многообразия размерности n-1
- Морфизмы **Mor** (*nCob*) ∋ $\overline{B}$: класс ориентированных кобордизмов по отношению диффеоморфности

$\overline{B} =$



Категория *2Cob*

- Категория (*2Cob*) **порождается посредством следующих кобордизмов:**

Gen (*2Cob*) =

«рождение окружности»

2→1 кобордизм

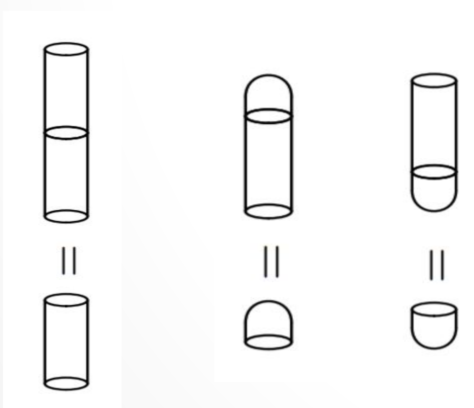
тождественный кобордизм (цилиндр)

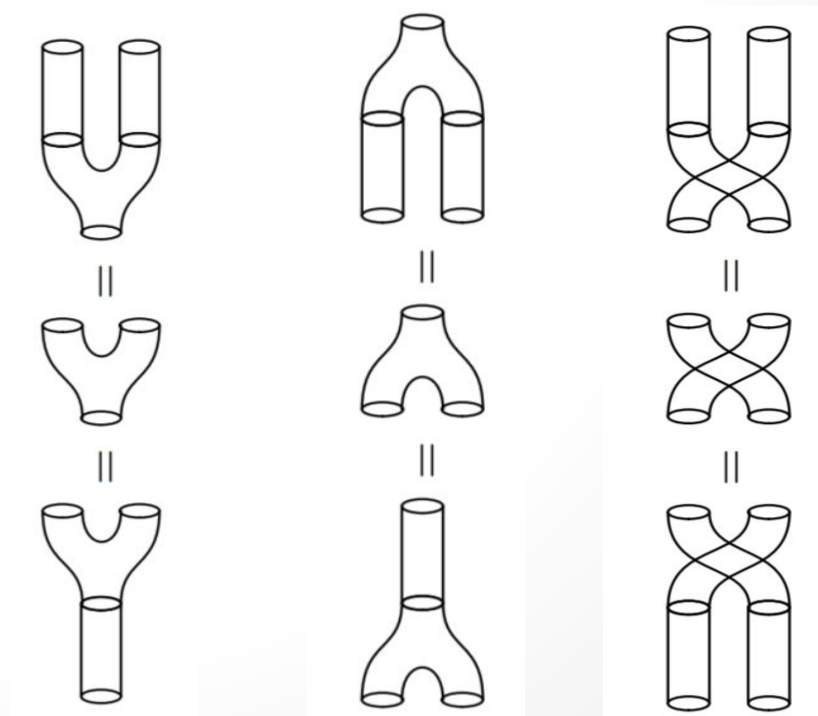
1→2 кобордизм

«уничтожение окружности»

твистовый кобордизм

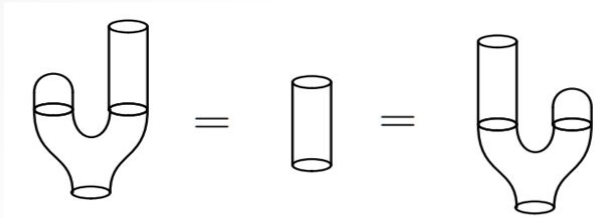
Identity-соотношения

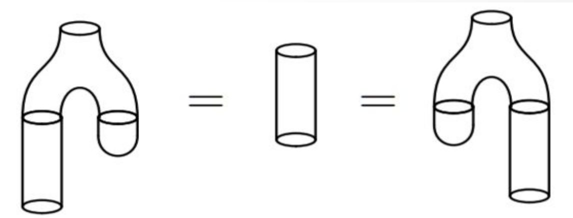




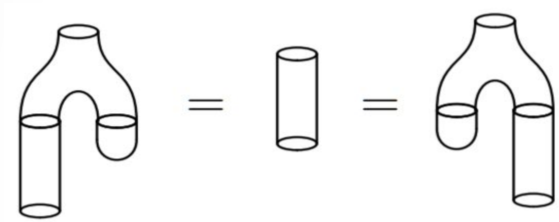
Категория *2Cob*

Вырезы в дисках

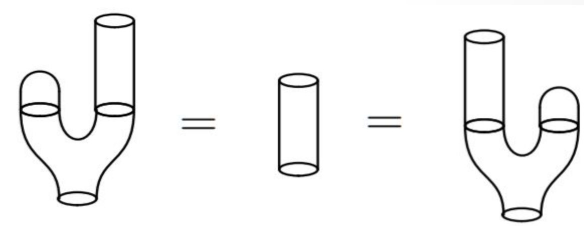




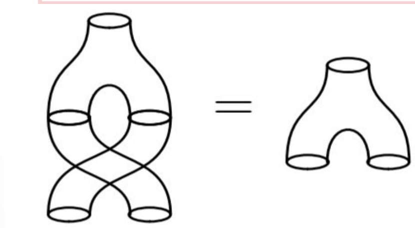
Ассоциативность



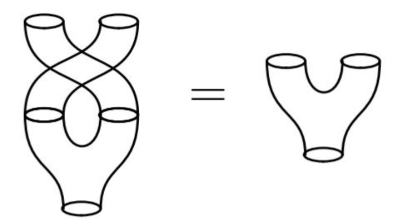
Коассоциативность



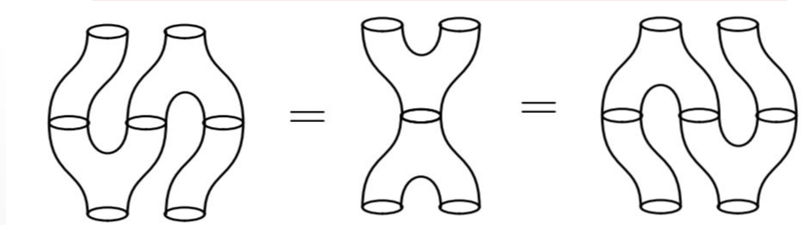
Коммутативность



Кокоммутативность



Соотношения Фробениуса



Фробениусовы алгебры

F-алгебра A – F-векторное пространство, наделенное F-линейными отображениями

умножением $\mu: A \otimes A \rightarrow A$

единичным отображением $\eta: F \rightarrow A$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes F \arrow[r, "id_A \otimes \eta"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
& A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[d, "\mu"'] & F \otimes A \arrow[l, "\eta \otimes id_A"'] \arrow[dl] \\
A &
\end{tikzcd}$$

Фробениусова алгебра A – конечномерная F-алгебра, наделенная невырожденным ассоциативным фробениусовым спариванием $\boldsymbol{\beta: A \otimes A \rightarrow F}$

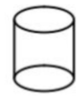
F-коалгебра A – это F-векторное пространство, наделенное F-линейными отображениями

коумножением $\delta: A \rightarrow A \otimes A$

коединицей $\epsilon: A \rightarrow F$

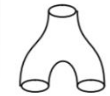
$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\delta \otimes id_A"'] \\
A \otimes A \arrow[u, "id_A \otimes \delta"] & A \arrow[l, "\delta"] \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes F & A \otimes A \arrow[l, "id_A \otimes \epsilon"'] \\
& A \arrow[ul] \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\epsilon \otimes id_A"] & F \otimes A \\
A \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Графическое исчисление

 $= id(A)$

 $= \eta$ единица

 $= \varepsilon$ форма Фробениуса

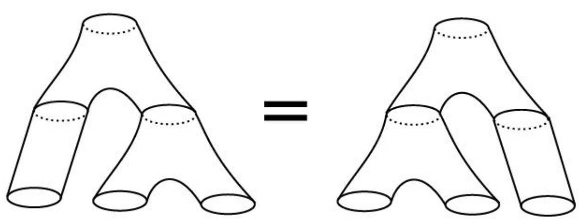
 $= \mu$ умножение

 $= \delta$ коумножение

 $= \beta$ Фробениусово спаривание

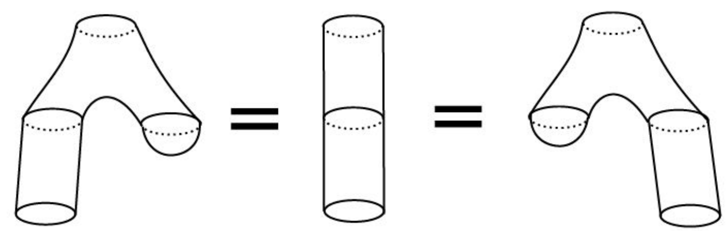
 $= \gamma$ Фробениусово коспаривание

Ассоциативность умножения



$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}$$

Единица умножения



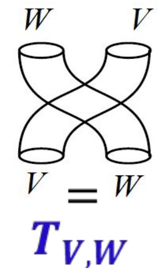
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A \otimes \eta"] \arrow[d, "\eta \otimes id_A"'] \arrow[dr, "id_A"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}$$

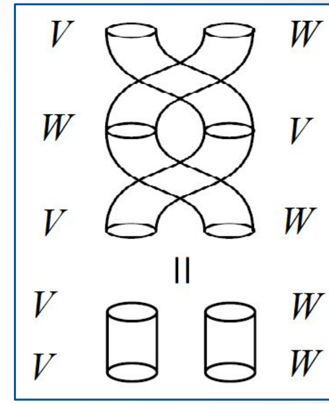
Твистовое отображение

Для любой пары векторных пространств V и W можно определить **отображение канонического твиста**

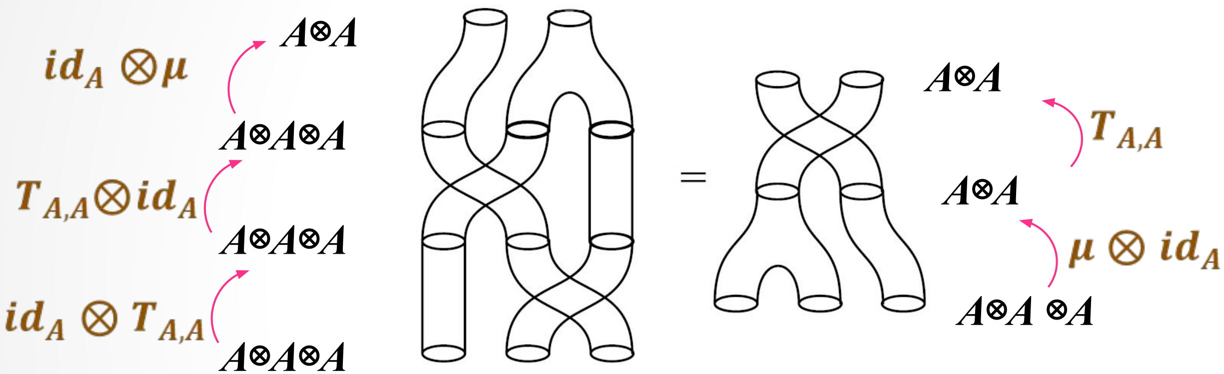
$$\boxed{T_{V,W}\colon V\otimes W \to W\otimes V}$$

- $T_{V,W}\circ T_{W,V} = id_{V\otimes W}$
- $T_{W,V}\circ T_{V,W} = id_{W\otimes V}$



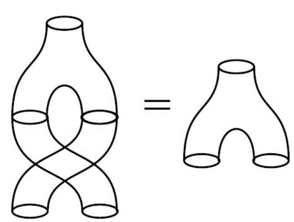


- *Если на векторных пространствах задано отображение умножения*  *и* ***V=W=A***



- ***Коммутативная алгебра***

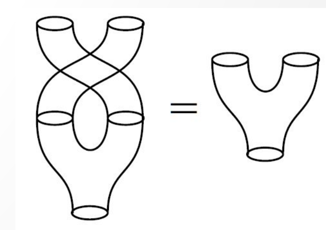
$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[r, "T_{A,A}"] \arrow[dr, "\mu"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$



$$\boxed{\mu\circ T_{A,A} = \mu}$$

- ***Кокоммутативная коалгебра***

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\delta"'] & A\otimes A \arrow[d, "T_{A,A}"] \\
 & A\otimes A
\end{tikzcd}$$



$$\boxed{T_{A,A}\circ\delta = \delta}$$

Моноидальные категории

Строгая моноидальная категория – категория C вместе с парой функторов $\boldsymbol{\Phi} : C \times C \to C$ и $\boldsymbol{\Psi}$: $1 \to C$, удовлетворяющих аксиомам:

- *ассоциативность*
- *нейтрального объекта*

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{C} & \\
\boldsymbol{C \times C} \arrow[ur, "\boldsymbol{\Phi}"] & & \boldsymbol{C \times C} \arrow[ul, "\boldsymbol{\Phi}"'] \\
 & \boldsymbol{C \times C \times C} \arrow[ul, "\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{id_C}"] \arrow[ur, "\boldsymbol{id_C} \times \boldsymbol{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{1 \times C} \arrow[r, "\boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{id_C}"] \arrow[dr] & \boldsymbol{C \times C} \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"] & \boldsymbol{C \times 1} \arrow[l, "\boldsymbol{id_C} \times \boldsymbol{\Psi}"'] \arrow[dl] \\
 & \boldsymbol{C} &
\end{tikzcd}$$

где категория ***1*** состоит из одного объекта и одного тождественного морфизма: Ob($\boldsymbol{1}$) = {*}, Mor($\boldsymbol{1}$) = $\{id_*\}$

$$\boldsymbol{C \times C} \xrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{C}$$

$(Ob_2, Ob_1) \to \boldsymbol{\Phi}(Ob_2, Ob_1) = Ob_2 \odot Ob_1$, где $\odot \in \{\otimes, \sqcup, \dots\}$

$(m, n) \to \boldsymbol{\Phi}\,(m, n) = m \odot n$

Строгий моноидальный функтор – функтор $\boldsymbol{H}$ $('C, '\odot, '1) \to (''C, ''\odot, ''1)$ между двумя моноидальными категориями , коммутирующий со свойствами

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{'C \times 'C} \arrow[r, "\boldsymbol{H \times H}"] & \boldsymbol{''C \times ''C} \\
\boldsymbol{'C} \arrow[u, "\boldsymbol{'\Phi}"] \arrow[r, "\boldsymbol{H}"] & \boldsymbol{''C} \arrow[u, "\boldsymbol{''\Phi}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{'C} \arrow[r, "\boldsymbol{H}"] & \boldsymbol{''C} \\
1 \arrow[u, "\boldsymbol{'\Psi}"] \arrow[r] & 1 \arrow[u, "\boldsymbol{''\Psi}"']
\end{tikzcd}$$

Симметричные моноидальные категории

Симметричная моноидальная категория – это строгая моноидальная категория $(C, \odot, 1)$: $\forall b_j, b_l \in Ob(C)$ $\exists$ отображение твиста $T_{b_j, b_l} : b_j \odot b_l \to b_l \odot b_j$, удовлетворяющее условиям

- *отображение естественно*

  $\forall(m, n) \in \mathrm{Mor}\,(C \times C)$

  $$\begin{array}{cc} \ddot{\ } & \ddot{\ } \\ b_l & b_j \\ \downarrow & \downarrow \\ b_j & b_l \end{array}$$

  диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
b_j \odot b_r \arrow[r, "T_{b_j, b_r}"] & b_r \odot b_j \\
b_l \odot b_s \arrow[u, "m \odot n"] \arrow[r, "T_{b_l, b_s}"] & b_s \odot b_l \arrow[u, "n \odot m"']
\end{tikzcd}$$

- $\forall b_j, b_l, b_k \in \mathrm{Ob}\,(C)$

  справедливо

$$\begin{tikzcd}
b_j \odot b_l \odot b_k \arrow[rr, "T_{b_j, b_l \odot b_k}"] \arrow[dr, "T_{b_j, b_l} \odot id_{b_k}"'] & & \text{Естественное преобразование } e : \Psi \to \Phi \text{ – это морфизм функторов, такой что} \\
& b_l \odot b_j \odot b_k \arrow[ur, "id_{b_l} \odot T_{b_j, b_k}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
b_j \odot b_l \odot b_k \arrow[rr, "T_{b_j \odot b_l, b_j,}"] \arrow[dr, "id_{b_j} \odot T_{b_l, b_k}"'] & & b_l \odot b_k \odot b_l \\
& b_l \odot b_j \odot b_k \arrow[ur, "T_{b_j, b_k} \odot id_{b_l}"'] &
\end{tikzcd}$$

- $T_{b_j, b_l} \circ T_{b_l, b_j} = id_{b_j \odot b_l}$

<u>Обозначение</u> $(C, \odot, 1, T)$

Моноидальные структуры

Примеры моноидальных категорий

Нестрогой

$(\boldsymbol{Vec_F}, \otimes, \boldsymbol{F})$

$$\boldsymbol{Vec_F} \times \boldsymbol{Vec_F} \xrightarrow{\ '\Phi\ } \boldsymbol{Vec_F}$$

$$(v_j, v_l) \longrightarrow {}'\boldsymbol{\Phi}(v_j, v_l) \equiv v_j \otimes v_l$$

$$(A^v, A^w) \longrightarrow {}'\boldsymbol{\Phi}(A^v, A^w) \equiv A^v \otimes A^w$$

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\ '\Psi\ } \boldsymbol{Vec_F}$$

$${}'\Psi(*) = \boldsymbol{F}$$

Строгой

Симплициальная категория $\blacktriangle$

$$\boldsymbol{Ob}(\blacktriangle) \ni N = \{0, 1, \dots, N-1\} \equiv \boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{Mor}\,(\blacktriangle) \ni n\colon \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$$

$$0 \le j \le l \le N-1 \Rightarrow n(j) \equiv n_j \le n(l) \equiv n_l$$

Моноидальный бифунктор $+\colon \blacktriangle^{\times 2} \to \blacktriangle$

$$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{N} + \boldsymbol{M} = \{0, 1, \dots, N + M - 1\}$$

$$(\, n, m\,) \to n + m \in \boldsymbol{Mor}(\blacktriangle)$$

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{N} & \boldsymbol{M} \\ \downarrow & \downarrow \\ {}'N & {}'M \end{array}$$

$$(n+m)_j = \begin{cases} n_j, j = \overline{0, N-1} \\ {}'N + m_{j-N}, j = \overline{N, N+M-1} \end{cases}$$

Топологическая квантовая теория поля (ТКТП)

Симметричный моноидальный функтор – это функтор между двумя симметричными моноидальными категориями

$('C, '\odot, '1, 'T) \xrightarrow{'H} (''C, ''\odot, ''1, ''T)$, сохраняющий симметричную структуру, т. е.

$\forall b_j, b_l \in 'C$ *справедливо* $'H('T_{'b_j, 'b_l}) = ''T_{'H('b_j), 'H('b_l)}$

Топологическая квантовая теория поля – это симметричный моноидальный функтор

$\mathbf{Z}: (\boldsymbol{nCob}, \sqcup, \emptyset, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{cob}}) \to (\boldsymbol{Vec}_{\boldsymbol{F}}, \otimes, \mathbf{F}, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{vec}})$

- Соотношения категории 2Cob переходят в аксиомы коммутативной Фробениусовой алгебры
- **Имеет место каноническая эквивалентность категорий 2TQFT и категории всех коммутативных Фробениусовых алгебр над F**

Эквивалентность 2-мерных ТКТП и абелевых Фробениусовых алгебр [4]

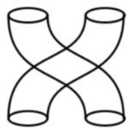
$2Cob \longrightarrow Vec_F$

 $\longrightarrow V$

n

$\longrightarrow \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{n}$

 $\longrightarrow id_V : V \to V$

 $\longrightarrow T^{vec} : V \otimes V \to V \otimes V$

$X \otimes Y \to X \otimes Y$

 $\longrightarrow \eta : F \to V$

 $\longrightarrow \mu : V \otimes V \to V$

 $\longrightarrow \epsilon : V \to F$

 $\longrightarrow \delta : V \to V \otimes V$

4 *Dijkgraaf, R., Ph.D. thesis, University of Utrecht, Utrecht (1989).*