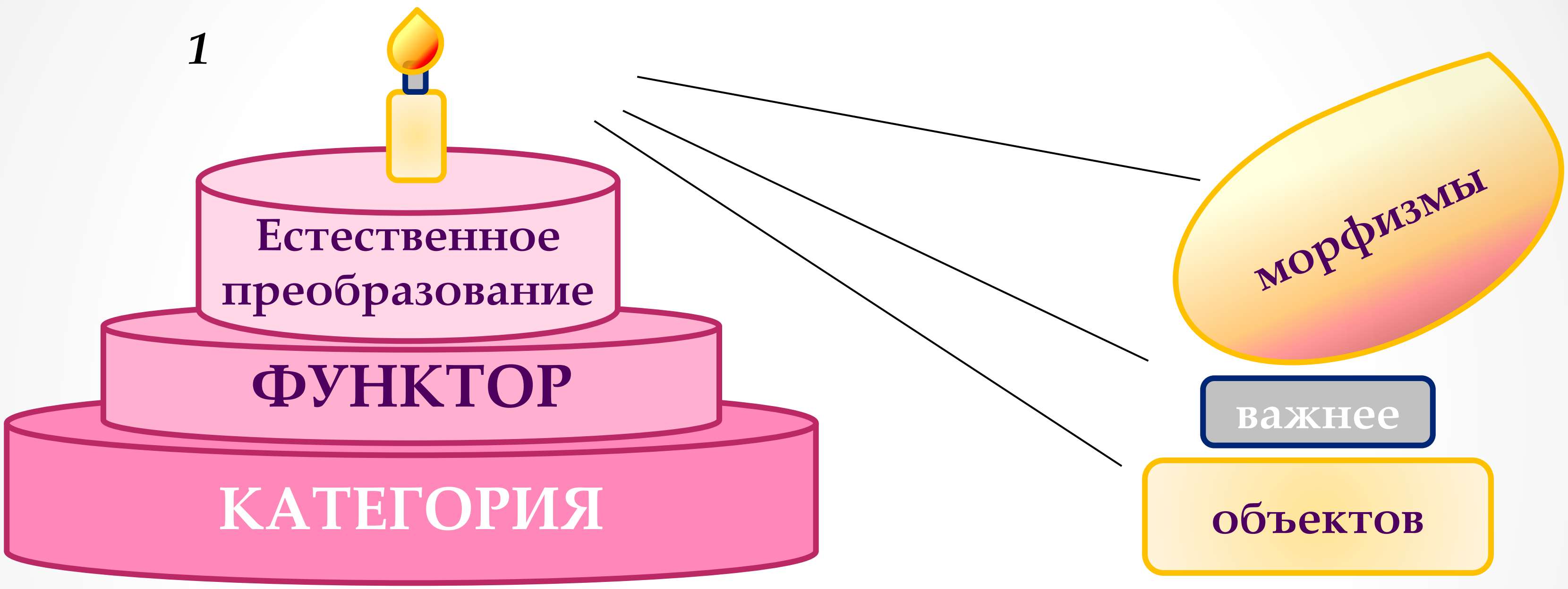
Об эквивалентности
2-мерных топологических квантовых теорий поля
и
абелевых Фробениусовых алгебр

Инструментарий



1 *Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane, General theory of natural equivalences, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 231–294*

Базовые понятия теории категорий

<u>Категория C</u>

состоит из

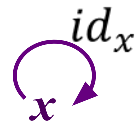
- Класса объектов

  $Ob(C) \ni$ **(x, y, z, …)**
- Класса морфизмов

  $Mor(C) \ni$**(f: x → y)** $\forall x, y \in$

$Ob(C)$, *наделенных*

- Identity-морфизмом

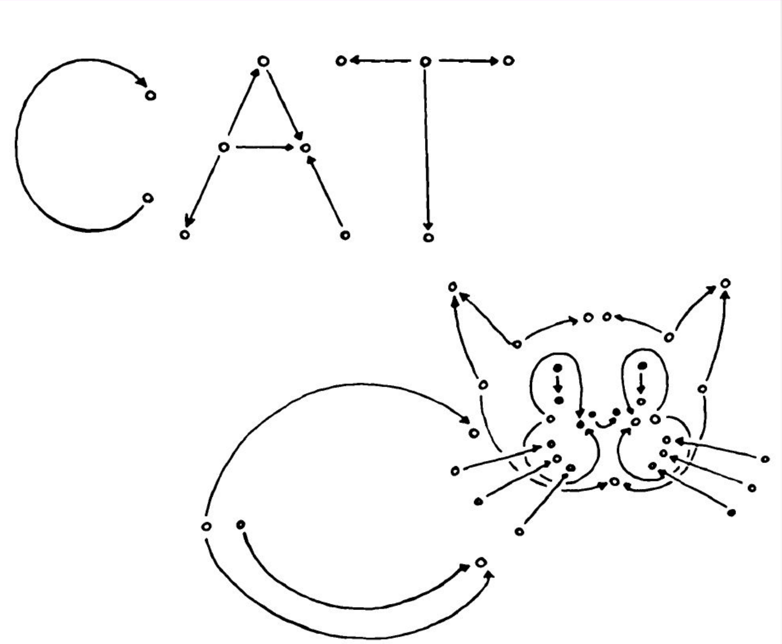


  $id_x\colon x \to x$
- $\forall f, g \in Mor(C)$,

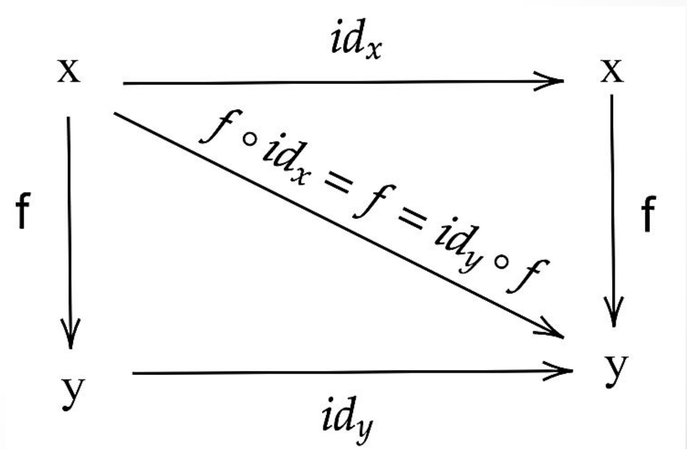
  $f\colon x \to y,\ g\colon y \to z$

композицией

  $gf\colon x \to z$
- $(fg)h = f(gh)$



Пример коммутативной диаграммы



Базовые понятия теории категорий

Функтор $\boldsymbol{F}: C \to D$

$a \in Ob(C) \to F(a) \in Ob(D)$

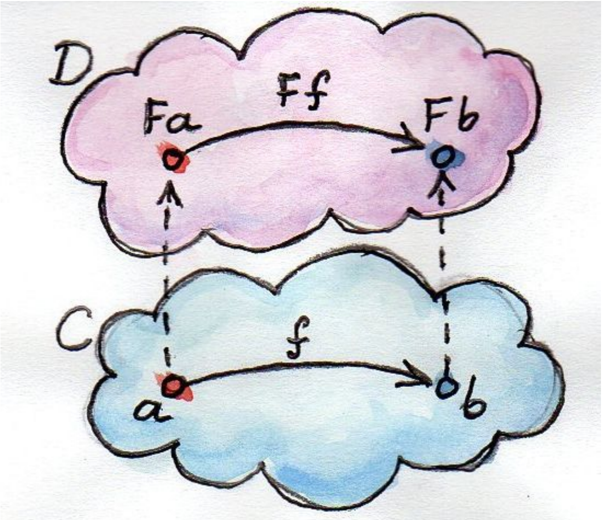
$f: a \to b \in Mor(C) \to$

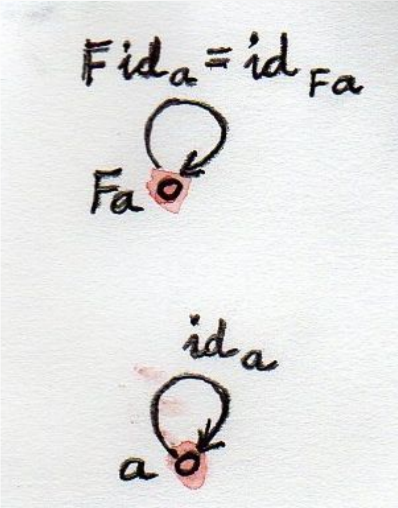
$F(f): F(a) \to F(b) \in Mor(D)$

- $F(id_a) = id_{F(a)}$

Ковариантный

- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$





Пример

Категория *HTop*

$$Ob(HTop) \ni (\underset{T_2}{X}, \Omega_X)$$

$$Mor(HTop) \ni \varphi \in C^0(X, Y)$$

Базовые понятия теории категорий

Естественное преобразование $\mathfrak{e}: \Psi \to \Phi$ – это морфизм функторов, такой что

$$\begin{matrix} \ddot{C} & & \ddot{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}'C & & {}'C \end{matrix}$$

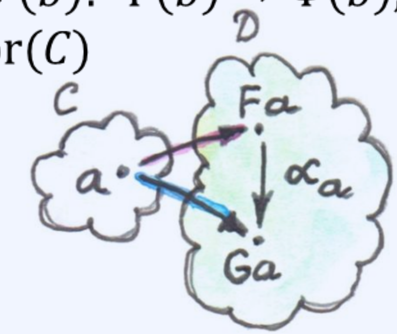
$\forall\, b \in Ob(C)\ \exists\, \mathfrak{e}(b)\colon \Psi(b) \to \Phi(b)$,

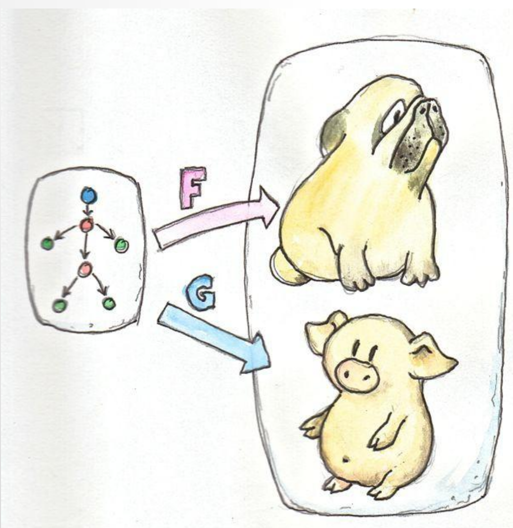
причем $\forall\, \underset{\cdot\cdot}{m} \in \mathrm{Mor}(C)$

$$\begin{matrix} b_j \\ \downarrow \\ b_l \end{matrix}$$

квадрат коммутативен

$$\begin{tikzcd}
\Psi(b_j) \arrow[r, "\mathfrak{e}(b_j)"] & \Phi(b_j) \\
\Psi(b_l) \arrow[u, "\Psi(m)"] \arrow[r, "\mathfrak{e}(b_l)"] & \Phi(b_l) \arrow[u, "\Phi(m)"']
\end{tikzcd}$$





Функторы Ψ и Φ изоморфны,

$$\Psi \overset{iso}{=} \Phi,$$

когда $\exists\, \mathfrak{e}_l\colon \Psi \to \Phi$

и $\mathfrak{e}_j\colon \Psi \to \Phi$ такие, что

$$\mathfrak{e}_l \circ \mathfrak{e}_j = id_\Phi$$

$$\mathfrak{e}_j \circ \mathfrak{e}_l = id_\Psi$$

Функтор $\boldsymbol{\Psi : C \to {}'C}$ – **эквивалентность** категорий C и $'C$, $C \simeq {}'C$, когда $\exists\ {}'\boldsymbol{\Phi}\colon {}'C \to C$, такой, что

$$\begin{cases} {}'\Phi \circ \Psi \overset{iso}{=} id_C \\ \Psi \circ {}'\Phi \overset{iso}{=} id_{'C} \end{cases}$$

n-мерная топологическая квантовая теория поля Z [2,3]

$$M \quad \longrightarrow \quad Z(M)$$

Замкнутое ориентированное (n-1)-многообразие — Векторное пространство над полем F

$$B: M \to N \quad \longrightarrow \quad Z(B): Z(M) \to Z(N)$$

Ориентированный кобордизм — Линейное отображение между векторными пространствами

Функтор

- $'B \sim {''B} \Rightarrow Z('B) = Z(''B)$
- $Z(I(M)) \to id_{Z(M)}$
- $B = {''B}\,{'B} \to Z(B): Z('B) \to Z(''B)$

Моноидальность функтора

- $Z('M \coprod {''M}) = Z('M) \otimes Z(''M)$
- $Z(\emptyset) = F$

2 Witten, E., Comm. Math. Phys. 121 (1989), 351-399.
3 Atiyah, M., Inst. Hautes ′ Etudes Sci. Publ. Math. 68 (1988), 175-186.

Категория *nCob*

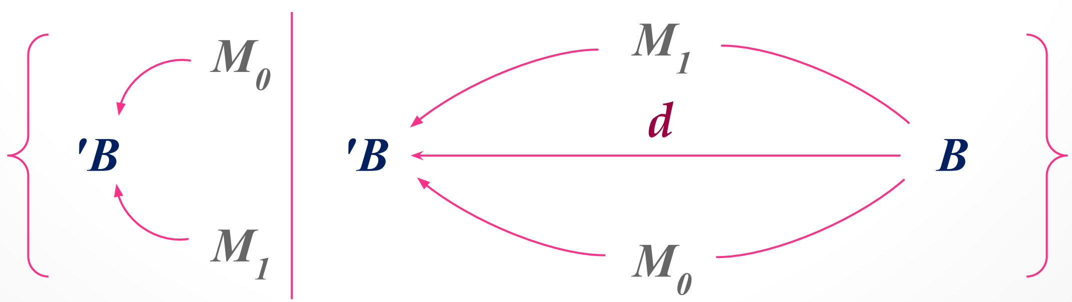
- Ориентированным кобордизмом с M_0 на M_1 называется компактное ориентированное многообразие B вместе с гладкими отображениями

  $M_0 \rightarrow B \leftarrow M_1$, такое, что:

  - M_0 отображается диффеоморфно с сохранением ориентации на $in(\partial B)$
  - M_1 отображается диффеоморфно с сохранением ориентации на $out(\partial B)$

Категория *nCob*

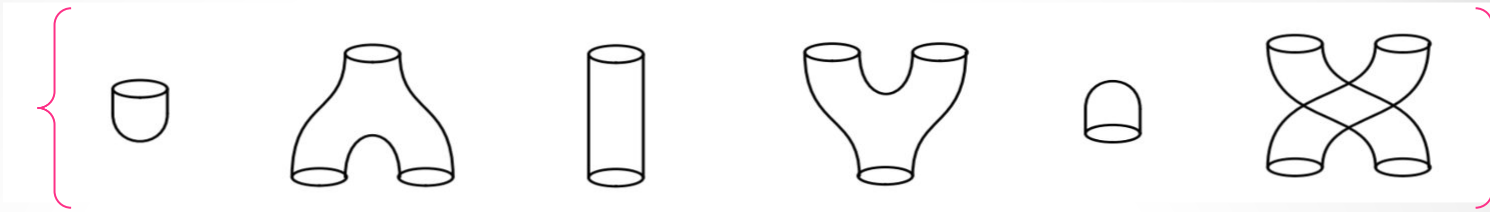
- Объекты **Ob (*nCob*)** $\ni M^{n-1}$: замкнутые ориентированные многообразия размерности n-1
- Морфизмы **Mor (*nCob*)** $\ni \bar{B}$: класс ориентированных кобордизмов по отношению диффеоморфности

$\bar{B} =$ 

Категория *2Cob*

- Категория (*2Cob*) **порождается посредством следующих кобордизмов:**

Gen (*2Cob*) =



«рождение окружности»

2→1 кобордизм

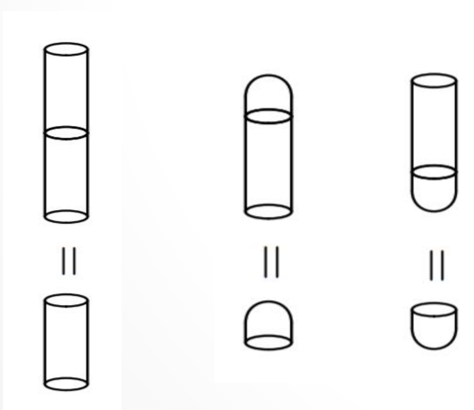
тождественный кобордизм (цилиндр)

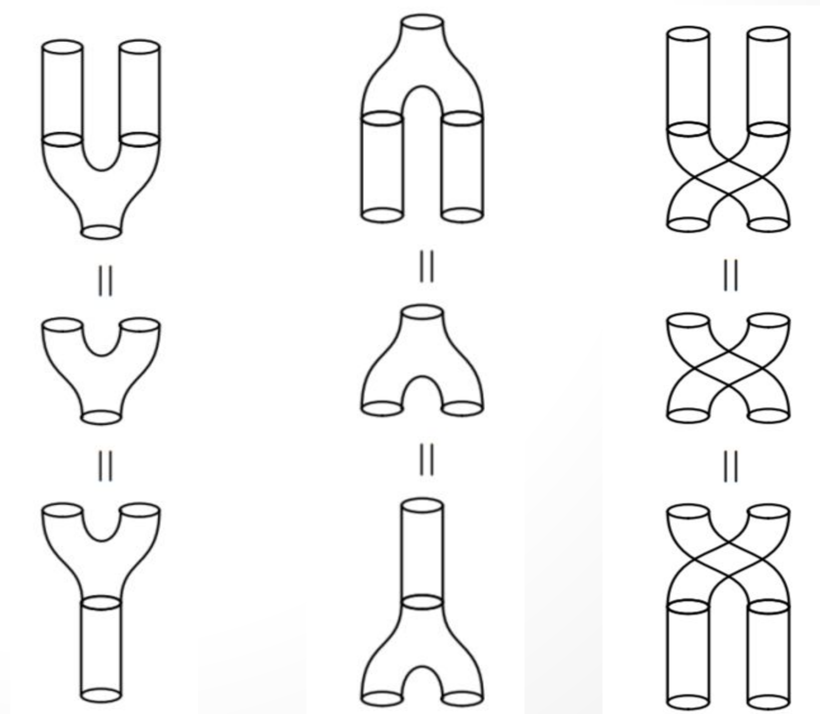
1→2 кобордизм

«уничтожение окружности»

твистовый кобордизм

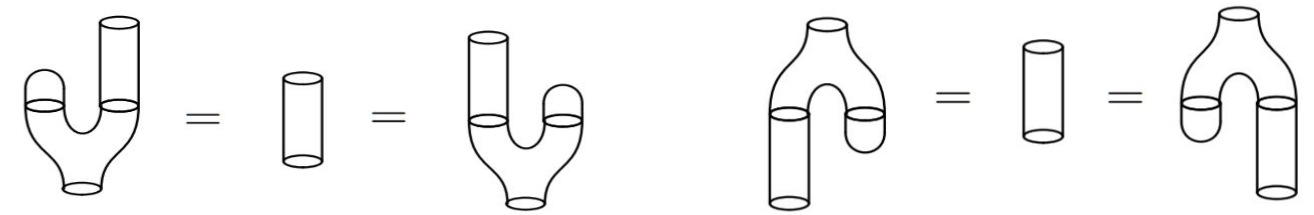
Identity-соотношения



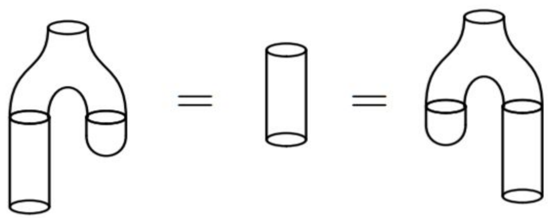


Категория *2Cob*

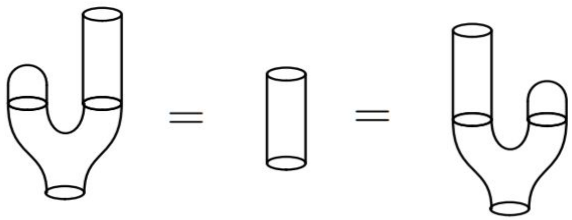
Вырезы в дисках



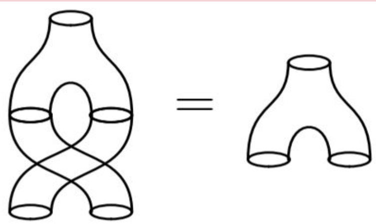
Ассоциативность



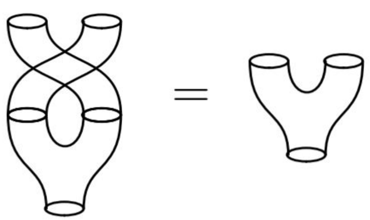
Коассоциативность



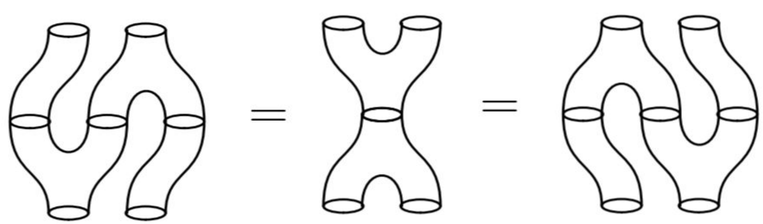
Коммутативность



Кокоммутативность



Соотношения Фробениуса



Фробениусовы алгебры

F-алгебра ***A*** – *F*-векторное пространство, наделенное F-линейными отображениями

умножением

μ: $A \otimes A \rightarrow A$

единичным отображением

η: $F \rightarrow A$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes F \arrow[r, "id_A \otimes \eta"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
 & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[d, "\mu"'] & F \otimes A \arrow[l, "\eta \otimes id_A"'] \arrow[dl] \\
A &
\end{tikzcd}$$

Фробениусова алгебра ***A*** – конечномерная *F*-алгебра, наделенная невырожденным ассоциативным фробениусовым спариванием ***β*: *A*⊗*A*→*F***

F-коалгебра ***A*** – это *F*-векторное пространство, наделенное F-линейными отображениями

коумножением

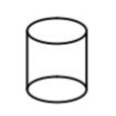
δ: $A \rightarrow A \otimes A$

коединицей

ϵ: $A \rightarrow F$

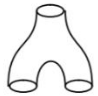
$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\delta \otimes id_A"'] \\
A \otimes A \arrow[u, "id_A \otimes \delta"] & A \arrow[l, "\delta"] \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes F & A \otimes A \arrow[l, "id_A \otimes \epsilon"'] \\
 & A \arrow[ul] \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\epsilon \otimes id_A"] & F \otimes A \\
A \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Графическое исчисление

 $= id(A)$

 $= \eta$ единица

 $= \varepsilon$ форма Фробениуса

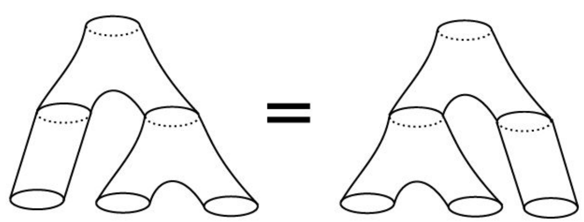
 $= \mu$ умножение

 $= \delta$ коумножение

 $= \beta$ Фробениусово спаривание

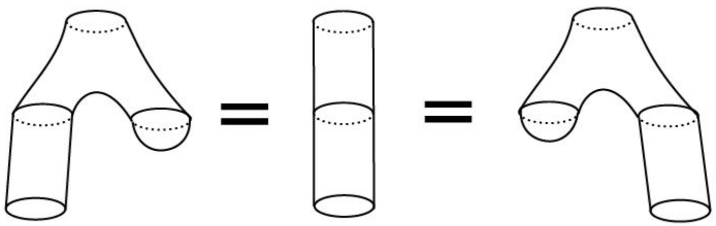
 $= \gamma$ Фробениусово коспаривание

Ассоциативность умножения



$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd}$$

Единица умножения



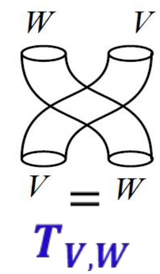
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A \otimes \eta"] \arrow[d, "\eta \otimes id_A"'] \arrow[dr, "id_A"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd}$$

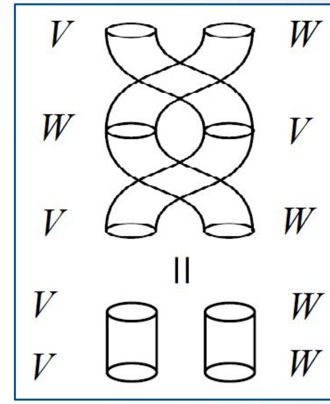
Твистовое отображение

Для любой пары векторных пространств V и W можно определить **отображение канонического твиста**

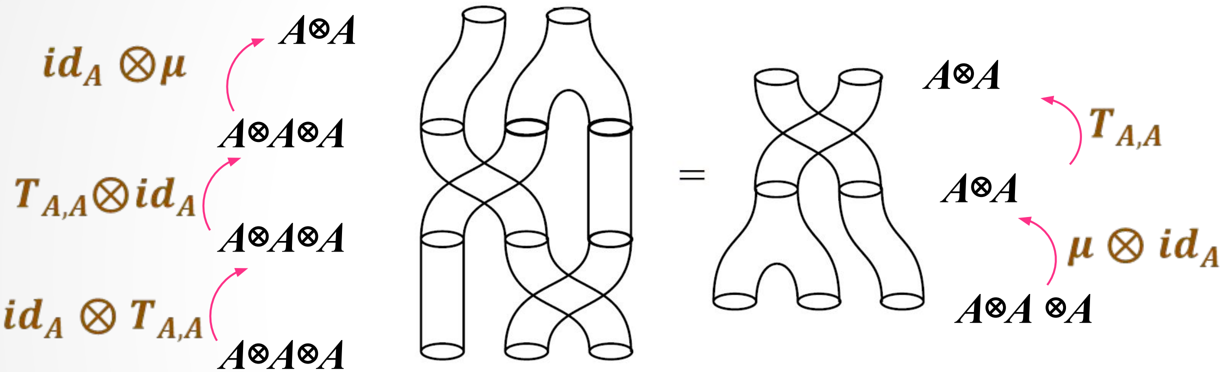
$$\boxed{T_{V,W}\colon V\otimes W \to W\otimes V}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ T_{V,W}\circ T_{W,V} = id_{V\otimes W} \\ \bullet\ T_{W,V}\circ T_{V,W} = id_{W\otimes V} \end{array}}$$



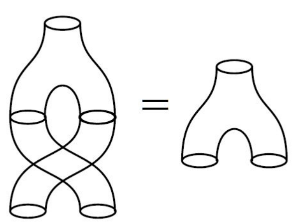


• *Если на векторных пространствах задано отображение умножения* 
и $V=W=A$



• ***Коммутативная алгебра***

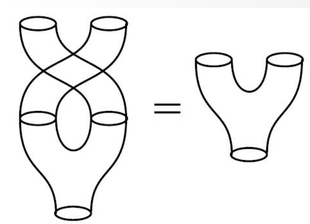
$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "T_{A,A}"] \arrow[dr, "\mu"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ & A \end{tikzcd}$$



$$\boxed{\mu\circ T_{A,A} = \mu}$$

• ***Кокоммутативная коалгебра***

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\delta"'] & A\otimes A \arrow[d, "T_{A,A}"] \\ & A\otimes A \end{tikzcd}$$



$$\boxed{T_{A,A}\circ\delta = \delta}$$

Моноидальные категории

Строгая моноидальная категория – категория C вместе с парой функторов $\boldsymbol{\Phi}: C \times C \to C$ и $\boldsymbol{\Psi}$: $1 \to C$, удовлетворяющих аксиомам:

- *ассоциативность*

$$\begin{tikzcd}
 & & \boldsymbol{C} & & \\
 & \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C} \arrow[ur, "\boldsymbol{\Phi}"] & & \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C} \arrow[ul, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \\
 & & \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C} \arrow[ul, "\boldsymbol{\Phi}\times \boldsymbol{id_C}"] \arrow[ur, "\boldsymbol{id_C}\times\boldsymbol{\Phi}"'] & &
\end{tikzcd}$$

- *нейтрального объекта*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{1}\times\boldsymbol{C} \arrow[r, "\boldsymbol{\Psi}\times \boldsymbol{id_C}"] \arrow[dr] & \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C} \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"] & \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{1} \arrow[l, "\boldsymbol{id_C}\times\boldsymbol{\Psi}"'] \arrow[dl] \\
 & \boldsymbol{C} &
\end{tikzcd}$$

где категория $\boldsymbol{1}$ состоит из одного объекта и одного тождественного морфизма: $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{1}) = \{*\}$, $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{1}) = \{id_*\}$

$$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C} \xrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{C}$$

$(Ob_2, Ob_1) \to \boldsymbol{\Phi}(Ob_2, Ob_1) = Ob_2 \odot Ob_1$, где $\odot \in \{\otimes, \sqcup, \dots\}$

$(m, n) \to \boldsymbol{\Phi}\,(m,n) = m \odot n$

Строгий моноидальный функтор – функтор $\boldsymbol{H}$ $('C, '\odot, '1) \to (''C, ''\odot, ''1)$ между двумя моноидальными категориями, коммутирующий со свойствами

$$\begin{tikzcd}
'\boldsymbol{C}\times '\boldsymbol{C} \arrow[r, "\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}"] & ''\boldsymbol{C}\times ''\boldsymbol{C} \\
'\boldsymbol{C} \arrow[u, "'\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[r, "\boldsymbol{H}"] & ''\boldsymbol{C} \arrow[u, "''\boldsymbol{\Phi}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
'\boldsymbol{C} \arrow[r, "\boldsymbol{H}"] & ''\boldsymbol{C} \\
1 \arrow[u, "'\boldsymbol{\Psi}"] \arrow[r] & 1 \arrow[u, "''\boldsymbol{\Psi}"']
\end{tikzcd}$$

Симметричные моноидальные категории

Симметричная моноидальная категория – это строгая моноидальная категория $(C,\ \odot, 1)$: $\forall b_j, b_l \in Ob(C)\ \exists$ отображение твиста $T_{b_j, b_l} : b_j \odot b_l \to b_l \odot b_j$, удовлетворяющее условиям

- *отображение естественно*

$$\forall(\dot{m}, \dot{n}) \in \mathrm{Mor}\,(C \times C)$$

$$\begin{array}{cc} b_l & b_j \\ \downarrow & \downarrow \\ b_j & b_l \end{array}$$

диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
b_j \odot b_r \arrow[rr, "T_{b_j, b_r}"] & & b_r \odot b_j \\
b_l \odot b_s \arrow[u, "m \odot n"] \arrow[rr, "T_{b_l, b_s}"] & & b_s \odot b_l \arrow[u, "n \odot m"']
\end{tikzcd}$$

- $\forall b_j, b_l, b_k \in \mathrm{Ob}\,(C)$

справедливо

$$\begin{tikzcd}
b_j \odot b_l \odot b_k \arrow[rr, "T_{b_j, b_l \odot b_k}"] \arrow[dr, "T_{b_j, b_l} \odot id_{b_k}"'] & & \text{Естественное преобразование } e: \Psi \to \Phi \text{ – это морфизм функторов, такой что} \\
& b_l \odot b_j \odot b_k \arrow[ur, "id_{b_l} \odot T_{b_j, b_k}"'] &
\end{tikzcd}$$

- $T_{b_j, b_l} \circ T_{b_l, b_j} = id_{b_j \odot b_l}$

$$\begin{tikzcd}
b_j \odot b_l \odot b_k \arrow[rr, "T_{b_j \odot b_l, b_j,}"] \arrow[dr, "id_{b_j} \odot T_{b_l, b_k}"'] & & b_l \odot b_k \odot b_l \\
& b_l \odot b_j \odot b_k \arrow[ur, "T_{b_j, b_k} \odot id_{b_l}"'] &
\end{tikzcd}$$

Обозначение $(C,\ \odot,\ 1,\ T)$

Моноидальные структуры

Примеры моноидальных категорий

Нестрогой

$(\boldsymbol{Vec_F}, \otimes, \boldsymbol{F})$

$$\boldsymbol{Vec_F} \times \boldsymbol{Vec_F} \xrightarrow{\;'\Phi\;} \boldsymbol{Vec_F}$$

$$(v_j, v_l) \longrightarrow {}'\Phi(v_j, v_l) \equiv v_j \otimes v_l$$

$$(A^v, A^w) \longrightarrow {}'\Phi(A^v, A^w) \equiv A^v \otimes A^w$$

$$\boldsymbol{1} \xrightarrow{\;'\Psi\;} \boldsymbol{Vec_F}$$

$${}'\Psi(*) = \boldsymbol{F}$$

Строгой

Симплициальная категория $\blacktriangle$

$$\boldsymbol{Ob}(\blacktriangle) \ni N = \{0, 1, \dots, N-1\} \equiv \boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{Mor}\,(\blacktriangle) \ni n: \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$$

$$0 \le j \le l \le N-1 \Rightarrow n(j) \equiv n_j \le n(l) \equiv n_l$$

Моноидальный бифунктор $+: \blacktriangle^{\times 2} \to \blacktriangle$

$$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{N} + \boldsymbol{M} = \{0, 1, \dots, N+M-1\}$$

$$(n, m) \to n + m \in \boldsymbol{Mor}(\blacktriangle)$$

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{N} & \boldsymbol{M} \\ \downarrow & \downarrow \\ {}'N & {}'M \end{array}$$

$$(n+m)_j = \begin{cases} n_j, j = \overline{0, N-1} \\ {}'N + m_{j-N}, j = \overline{N, N+M-1} \end{cases}$$

Топологическая квантовая теория поля (ТКТП)

Симметричный моноидальный функтор – это функтор между двумя симметричными моноидальными категориями

$('C, '\circledcirc, '1, 'T) \xrightarrow{'H} (''C, ''\circledcirc, ''1, ''T)$, сохраняющий симметричную структуру, т. е.

$\forall b_j, b_l \in 'C$ *справедливо* $'H('T_{'b_j, 'b_l}) = ''T_{'H('b_j), 'H('b_l)}$

Топологическая квантовая теория поля – это симметричный моноидальный функтор

$Z: (nCob, \sqcup, \emptyset, T^{cob}) \to (Vec_F, \otimes, \mathrm{F}, T^{vec})$

- Соотношения категории 2Cob переходят в аксиомы коммутативной Фробениусовой алгебры
- **Имеет место каноническая эквивалентность категорий 2TQFT и категории всех коммутативных Фробениусовых алгебр над F**

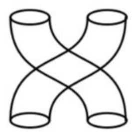
Эквивалентность 2-мерных ТКТП и абелевых Фробениусовых алгебр[4]

$$\mathbf{2Cob} \longrightarrow \mathbf{Vec_F}$$

$$\bigcirc \longrightarrow V$$

$$\underbrace{\bigcirc \sqcup \bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc}_{\mathbf{n}} \longrightarrow \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{\mathbf{n}}$$

$$\longrightarrow \quad id_V : V \to V$$



$$\longrightarrow \quad T^{vec} : V \otimes V \to V \otimes V$$
$$X \otimes Y \to X \otimes Y$$

$$\longrightarrow \quad \eta : F \to V$$

$$\longrightarrow \quad \mu : V \otimes V \to V$$

$$\longrightarrow \quad \epsilon : V \to F$$

$$\longrightarrow \quad \delta : V \to V \otimes V$$

4 Dijkgraaf, R., Ph.D. thesis, University of Utrecht, Utrecht (1989).