

Показательные неравенства
ИХ ТИПЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ



1. Область определения функции
2. Область значений функции
3. Промежутки сравнения значений функции с единицей
4. Четность, нечетность
5. <u>Монотонность</u>
6. Экстремумы
7. Асимптота
8. При любых действительных значениях x и y ; $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$, $b \neq 1$.

$(-\infty; \infty)$	
$(0; \infty)$	
$y = a^x, a > 1$	$y = a^x, 0 < a < 1$
при $x > 0$, $a^x > 1$	при $x > 0$, $0 < a^x < 1$
при $x < 0$, $0 < a^x < 1$	при $x < 0$, $a^x > 1$
Функция не является ни чётной, ни нечётной (функция общего вида).	
монотонно возрастает на \mathbf{R}	монотонно убывает на \mathbf{R}
Показательная функция экстремумов не имеет	
Ось O_x является горизонтальной асимптотой	
1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;	6) $r \in \mathbf{Q}$ и $a < b$, то
2) $a^x : a^y = a^{x-y}$;	$a^r < b^r$ при $r > 0$
3) $(ab)^x = a^x b^x$;	$a^r > b^r$ при $r < 0$;
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;	7) $r, s \in \mathbf{Q}$ и $r > s$, то
5) $(a^x)^y = a^{xy}$;	$a^r > a^s$ при $a > 1$
	$a^r < a^s$ при $0 < a < 1$.

Определите тип функции

$$y = (1,3)^x$$

возрастающая

$$1,3 > 1$$

$$y = (0,8)^x$$

убывающая

$$0 < 0,8 < 1$$

$$y = e^x$$

возрастающая

$$e > 1$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$$

убывающая

$$0 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ простейших показательных неравенств:

Пусть **a** – данное положительное, не равное единице число и **b** – данное действительное число. Тогда неравенства

$$\mathbf{a^x > b \ (a^x \geq b)} \text{ и } \mathbf{a^x < b \ (a^x \leq b)}$$

называются простейшими показательными неравенствами.

ЧТО НАЗЫВАЕТСЯ решением неравенства?

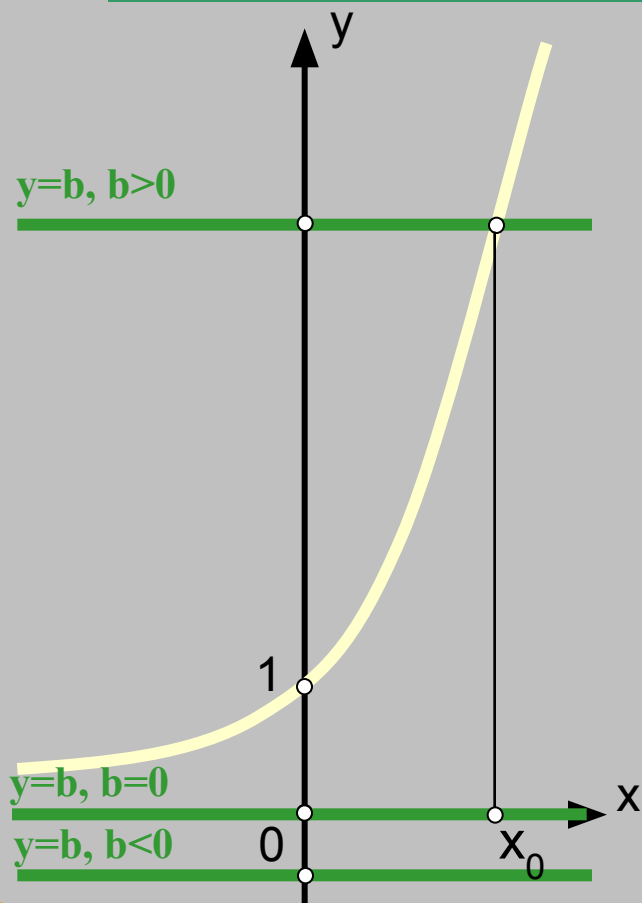
Решением неравенства с неизвестным x называют число x_0 , при подстановке которого в неравенство получается верное числовое неравенство.

ЧТО ЗНАЧИТ решить неравенство?

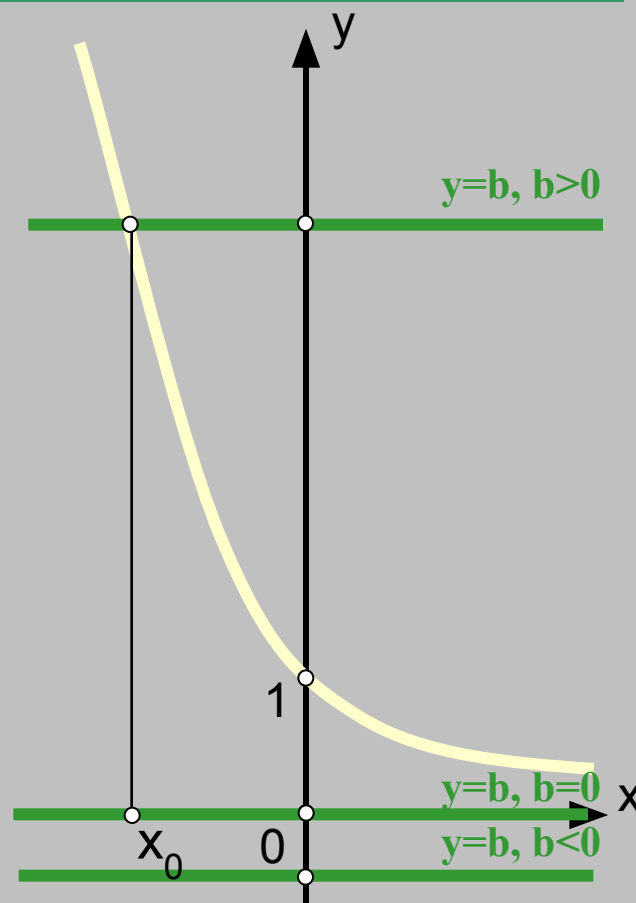
Решить неравенство –
значит, найти все его решения или
показать, что их нет.

Рассмотрим взаимное расположение графика функции $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ и прямой $y=b$

$y = a^x, a > 1$ и $b \in \mathbb{R}$



$y = a^x, 0 < a < 1$ и $b \in \mathbb{R}$



ВЫВОД №1:

При $b \leq 0$ прямая $y=b$ не пересекает график функции $y=a^x$, т.к. расположена ниже кривой $y=a^x$, поэтому неравенства $a^x > b$ ($a^x \geq b$) выполняются при $x \in \mathbb{R}$, а неравенства $a^x < b$ ($a^x \leq b$) не имеют решения.

$$2^x > -5 \text{ справедливо при любых } x$$

$$2^x > 0 \text{ и } -5 < 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq -4 \text{ справедливо при любых } x$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0 \text{ и } -4 < 0$$

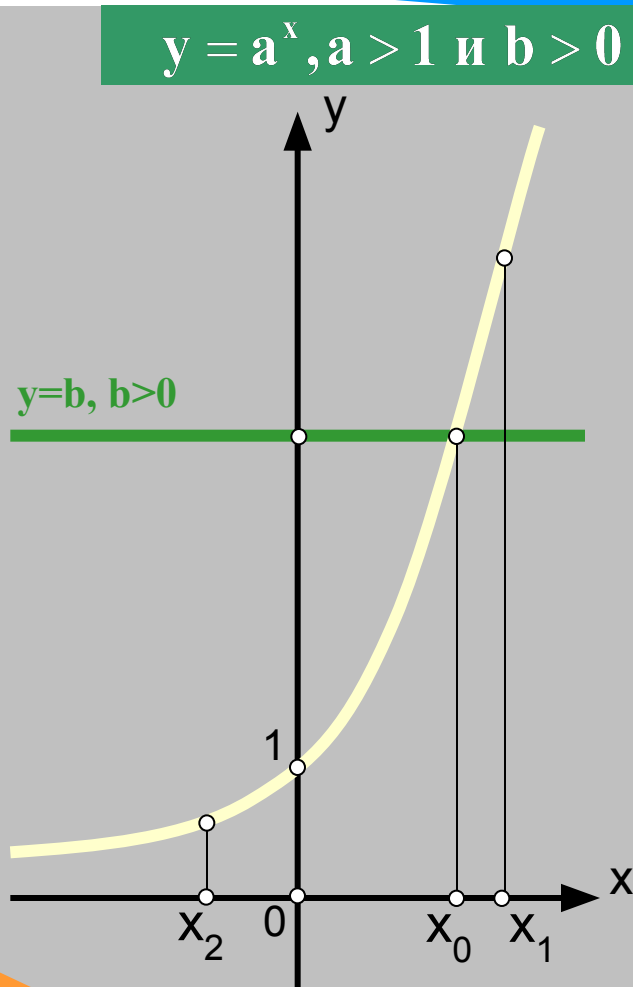
$$10^x < -3 \text{ решений нет}$$

$$10^x > 0 \text{ и } -3 < 0$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x \leq -10 \text{ решений нет}$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x > 0 \text{ и } -10 < 0$$

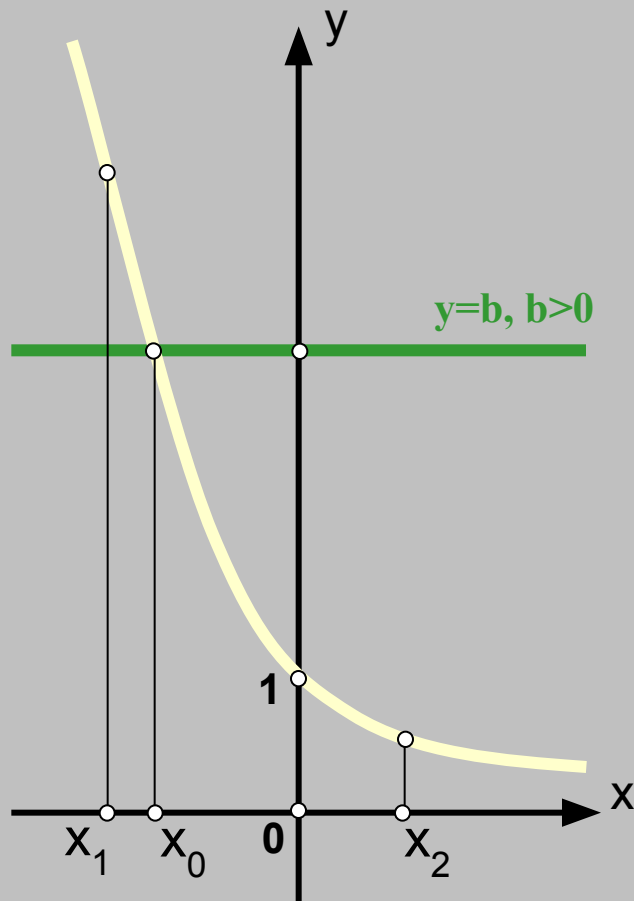
При $b > 0$ прямая $y = b$ пересекает график функции $y = a^x$ в единственной точке, абсцисса которой $x_0 = \log_a b$



Если $a > 1$ и $b > 0$,
то для каждого $x_1 > x_0$
соответствующая
точка графика функции $y = a^x$
находится выше прямой $y = b$,
а для каждого $x_2 < x_0$ - ниже
прямой $y = b$.

При $b > 0$ прямая $y = b$ пересекает график функции $y = a^x$ в единственной точке, абсцисса которой $x_0 = \log_a b$

$$y = a^x, 0 < a < 1 \text{ и } b > 0$$



Если $a > 1$ и $b > 0$, то для каждого $x_1 < x_0$ соответствующая точка графика функции $y = a^x$ находится выше прямой $y = b$, а для каждого $x_2 > x_0$ - ниже прямой $y = b$.

Простейшие показательные неравенства

$$a > 1$$

$$a^x > b$$

$$a^x < b$$

$$a^x > a^{\log_a b}$$

$$a^x < a^{\log_a b}$$

$$x > \log_a b$$

$$x < \log_a b$$

$$0 < a < 1$$

$$a^x > b$$

$$a^x < b$$

$$a^x > a^{\log_a b}$$

$$a^x < a^{\log_a b}$$

$$x < \log_a b$$

$$x > \log_a b$$

Пример №1.1

$$2^x < 8$$

Решение:

$$2^x < 8,$$

$$2^x < 2^3, \quad y = 2^t \quad (2 > 1)$$

возрастает на всей области определения,

$$x < 3.$$

Ответ:

$$(-\infty; 3)$$

Пример №1.2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 27$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 27,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^t \left(0 < \frac{1}{3} < 1\right) \text{ убывает на всей области определения,}$$

$$x < -3.$$

Ответ:

$$(-\infty; -3)$$

Пример №1.3

$$3^x > 5$$

Решение:

$$3^x > 5,$$

$$3^x > 3^{\log_3 5}, \quad y = 3^t (3 > 1) \text{ возрастает на всей}$$

области определения,

$$x > \log_3 5.$$

Ответ:

$$(\log_3 5; \infty)$$

Пример №1.4

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < 7$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < 7,$$

$$4^{-x} < 4^{\log_4 7}, \quad y = 4^t (4 > 1) \quad \text{возрастает на всей области определения,}$$

$$-x < \log_4 7,$$

$$x > -\log_4 7.$$

Ответ:
 $(-\log_4 7; \infty)$

1) Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим

Решение:

Пример №1

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4$$

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4,$$

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 2^2, \quad y = 2^t \quad (2 > 1) \quad \text{возрастает на всей области определения}$$

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 2,$$

$$\frac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0,$$

$$\frac{x-5}{x-2} \leq 0,$$

$$2 < x \leq 5.$$

Ответ:

$(2; 5]$

1) Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим

Решение:

$$-4 \leq 3^{x^2-2x-1} - 5 \leq 4,$$

$$1 \leq 3^{x^2-2x-1} \leq 9,$$

$$\begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \geq 1, \\ 3^{x^2-2x-1} \leq 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \geq 3^0, \\ 3^{x^2-2x-1} \leq 3^2; \end{cases}$$

$y = 3^t$ ($3 > 1$) **возрастает на всей области определения**

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 1 \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 - \sqrt{2}, \\ x \geq 1 + \sqrt{2}; \\ -1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 3, \\ x \leq 1 - \sqrt{2}, \\ -1 \leq x \leq 3, \\ x \geq 1 + \sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 - \sqrt{2}, \\ 1 + \sqrt{2} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Пример №2

$$-4 \leq 3^{x^2-2x-1} - 5 \leq 4$$

Ответ:

$$[-1; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; 3]$$

2) Показательные неравенства, сводящиеся к квадратным неравенствам

Решение:

$$2^{2x} + 2 > 3 \cdot 2^x,$$

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 > 0.$$

Пусть $2^x = t, t > 0$, тогда

$$\begin{cases} t^2 - 3t + 2 > 0, \\ t > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t < 1, \\ t > 2, \\ t > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 0, \\ t < 1, \\ t > 0, \\ t > 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < t < 1, \\ t > 2. \end{cases}$$

Вернёмся к переменной x

$$\begin{cases} 0 < 2^x < 1, \\ 2^x > 2; \end{cases} \quad 2^x > 0 \quad \text{при } x \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} 2^x < 1, \\ 2^x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x < 2^0, \\ 2^x > 2; \end{cases}$$

функция $y = 2^t (2 > 1)$

возрастает при всех x
из области определения

$$\begin{cases} x < 0, \\ x > 1. \end{cases}$$

Пример

$$2^{2x} + 2 > 3 \cdot 2^x$$

Ответ:

$$(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$$

3) Однородные показательные неравенства первой и второй степени. Однородные показательные неравенства первой степени

Решение:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right) > 5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \frac{5}{4} > 5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 4,$$

$$(2)^{2-x} > 2^2, \quad y = 2^t (2 > 1) \text{ возрастает на всей области определения}$$

$$2 - x > 2,$$

$$x < 0.$$

Пример №1

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 5$$

Ответ:

$$(-\infty; 0)$$

3) Однородные показательные

Решение:

Степени первой и второй степени. Однородные показательные

неравенства первой степени

$$3^{x+2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1},$$

$$3^{x+2} - 34 \cdot 3^{x-1} < 4 \cdot 7^{x-1} - 7^x,$$

$$3^{x-1}(3^3 - 34) < 7^{x-1}(4 - 7),$$

$$3^{x-1}(-7) < 7^{x-1}(-3),$$

$$3^{x-2} > 7^{x-2}, 7^{x-2} > 0, \text{ при } x \in \mathbf{R}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-2} > 1,$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-2} > \left(\frac{3}{7}\right)^0, y = \left(\frac{3}{7}\right)^t \left(0 < \frac{3}{7} < 1\right),$$

$$x - 2 < 0.$$

$$x < 2.$$

Пример №2

$$3^{x+2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1}$$

убывает на всей
области определения

Ответ:

$$(-\infty; 2)$$

3) Однородные показательные неравенства первой и второй степени. Однородные показательные неравенства второй степени

Решение:

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0,$$

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot (2 \cdot 3)^x + 2 \cdot 3^{2x} < 0,$$

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{2x} < 0, \quad 3^{2x} > 0, \quad \text{при } x \in \mathbf{R}$$

$$3 \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - 5 \frac{2^x 3^x}{3^{2x}} + 2 \frac{3^{2x}}{3^{2x}} < 0,$$

$$3 \left(\frac{2}{3} \right)^{2x} - 5 \left(\frac{2}{3} \right)^x + 2 < 0.$$

Вернёмся к переменной x

$$\frac{2}{3} < \left(\frac{2}{3} \right)^x < 1, \quad \frac{2}{3} < \left(\frac{2}{3} \right)^x < \left(\frac{2}{3} \right)^0, \quad y = \left(\frac{2}{3} \right)^r \left(0 < \frac{2}{3} < 1 \right) \text{ убывает на всей области определения}$$

$$0 < x < 1.$$

Пример №3

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0$$

Пусть $\left(\frac{2}{3} \right)^x = t, t > 0$, тогда

$$\begin{cases} 3t^2 - 5t + 2 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3} < t < 1, \\ t > 0; \end{cases} \quad \frac{2}{3} < t < 1.$$

Ответ:

$$(0; 1)$$

4) Показательные неравенства, сводящиеся к рациональным неравенствам

Решение:

$$2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0,$$

$$2^x + \frac{2}{2^x} - 3 < 0,$$

Пусть $2^x = t, t > 0$, тогда

$$\begin{cases} t + \frac{2}{t} - 3 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{t^2 - 3t + 2}{t} < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 3t + 2 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < t < 2, \\ t > 0; \end{cases}$$

$1 < t < 2$. Вернёмся к переменной x

$$1 < 2^x < 2,$$

$$y = 2^r \quad (2 > 1)$$

возрастает на всей области определения

$$0 < x < 1.$$

Пример

$$2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$$

Ответ:

$(0; 1)$

5) Показательные нестандартные неравенства

Решение:

$$(x^2 - 4x + 4)^{x-1,5} \geq 1,$$

$$((x-2)^2)^{x-1,5} \geq 1,$$

$$|x-2|^{2x-3} \geq 1.$$

Пример

$$(x^2 - 4x + 4)^{x-1,5} \geq 1$$

Неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} |x-2|^{2x-3} > 1, \\ |x-2|^{2x-3} = 1. \end{cases}$$

Решим каждое утверждение совокупности отдельно.

$$|x-2|^{2x-3} > 1,$$

$$|x-2|^{2x-3} > |x-2|^0$$

$$\begin{cases} 0 < |x-2| < 1, \\ 2x-3 < 0; \\ |x-2| > 1, \\ 2x-3 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-2| > 0, \\ |x-2| < 1, \\ 2x-3 < 0; \\ |x-2| > 1, \\ 2x-3 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 2, \\ -1 < x-2 < 1, \\ 2x < 3; \\ x-1 > 1, \\ x-2 < -1, \\ 2x > 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 2, \\ 1 < x < 3, \\ x < 1,5; \\ x > 3, \\ x < 1, \\ x < 1,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < x < 1,5, \\ x > 3. \end{cases}$$

5) Показательные нестандартные неравенства

Решение:

$$|x - 2|^{2x-3} = 1.$$

1.

$$\begin{cases} x - 2 = -1, \\ x - 2 = 0, \\ x - 2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 0, \\ 2x &= 3, \\ x &= 1,5. \end{aligned}$$

Проверка

$$x = 1$$

$$|1 - 2|^{2-3} = 1,$$

$$|-1|^{-1} = 1,$$

$$1 = 1. (\text{верно})$$

$$x = 2$$

$$|2 - 2|^{2 \cdot 2 - 3} = 1,$$

$$0^1 = 1,$$

$$0 = 1. (\text{неверно})$$

$$x = 3$$

$$|3 - 2|^{3 \cdot 2 - 3} = 1,$$

$$1^3 = 1,$$

$$1 = 1. (\text{верно})$$

$$x = 1,5$$

$$|1,5 - 2|^{2 \cdot 1,5 - 3} = 1,$$

$$|-0,5|^0 = 1,$$

$$1 = 1. (\text{верно})$$

Проверка показала, что $x=1$, $x=3$, $x=1,5$ являются решениями уравнения, а $x=2$ не является решением уравнения.

Итак,

$$\begin{cases} 1 < x < 1,5, \\ x > 3, \\ x = 1, x = 3, x = 1,5; \end{cases}$$

$$x > 3,$$

$$x = 1, x = 3, x = 1,5;$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 1,5, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

$$x \geq 3.$$

Пример

$$(x^2 - 4x + 4)^{x-1,5} \geq 1$$

Ответ:

$$[1; 1,5] \cup [3; \infty).$$