Показательные неравенства
их типы и методы решения

Свойства показательной функции

1. Область определения функции	$(-\infty;\infty)$	
2. Область значений функции	$(0;\infty)$	
3. Промежутки сравнения значений функции с единицей	$y=a^x, a>1$	$y=a^x, 0<a<1$
	при $x>0,\ \ a^x>1$	при $x>0,\ \ 0<a^x<1$
	при $x<0,\ \ 0<a^x<1$	при $x<0,\ \ a^x>1$
4. Четность, нечетность	Функция не является ни чётной, ни нечётной (функция общего вида).	
5. Монотонность	монотонно возрастает на **R**	монотонно убывает на **R**
6. Экстремумы	Показательная функция экстремумов не имеет	
7. Асимптота	Ось O_x является горизонтальной **асимптотой**	
8. При любых действительных значениях **x** и **y; a>0, a≠1; b>0, b≠1.**	1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$; 3) $(ab)^x = a^x b^x$; 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; 5) $(a^x)^y = a^{xy}$;	6) $r \in Q$ и $a<b$, то $a^r < b^r$ при $r>0$ $a^r > b^r$ при $r<0$; 7) $r, s \in Q$ и $r>s$, то $a^r > a^s$ при $a>1$ $a^r < a^s$ при $0<a<1$.

Задание № 1

Определите тип функции

$y = (1{,}3)^x$	возрастающая	$1{,}3 > 1$
$y = (0{,}8)^x$	убывающая	$0 < 0{,}8 < 1$
$y = e^x$	возрастающая	$e > 1$
$y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$	убывающая	$0 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ
простейших показательных неравенств:

Пусть **a** – данное положительное, не равное единице число и **b** – данное действительное число. Тогда неравенства

$\mathbf{a^x > b}$ $\mathbf{(a^x \geq b)}$ и $\mathbf{a^x < b}$ $\mathbf{(a^x \leq b)}$

называются простейшими показательными неравенствами.

ЧТО НАЗЫВАЕТСЯ
решением неравенства?

Решением неравенства с неизвестным x называют число x_0, при подстановке которого в неравенство получается верное числовое неравенство.

ЧТО ЗНАЧИТ
решить неравенство?

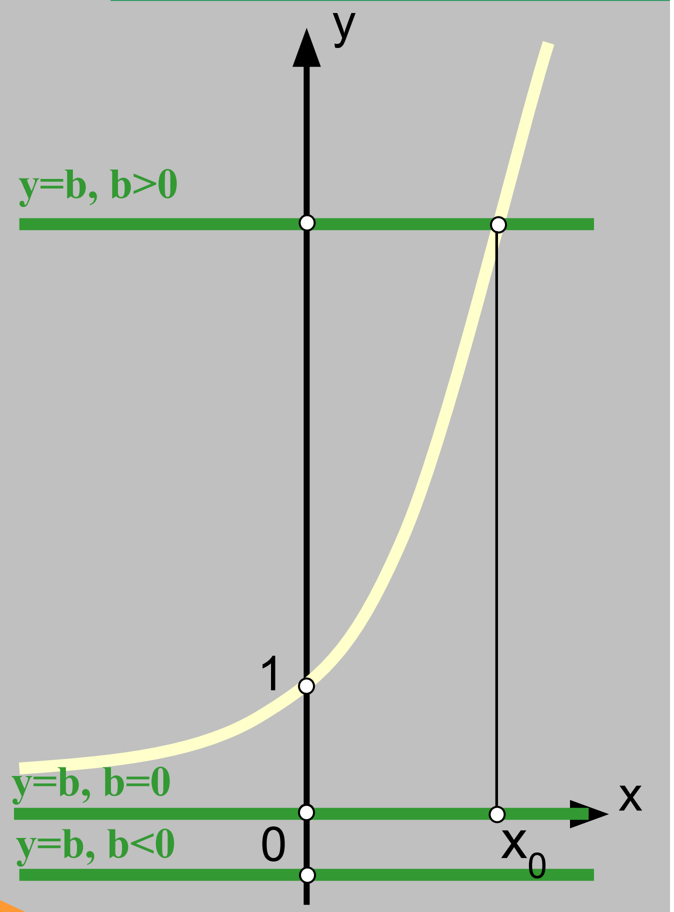
Решить неравенство –

значит, найти все его решения или

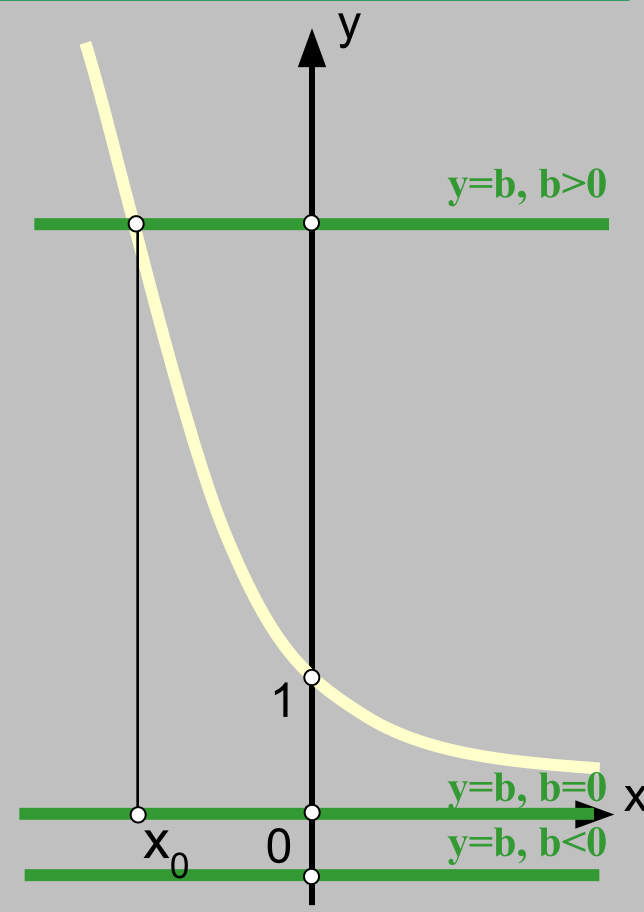
показать, что их нет.

Рассмотрим взаимное расположение графика функции **$y=a^x$**, **$a>0$**, **$a\neq 1$** и прямой **$y=b$**

$y = a^x, a > 1$ и $b \in R$



$y = a^x, 0 < a < 1$ и $b \in R$



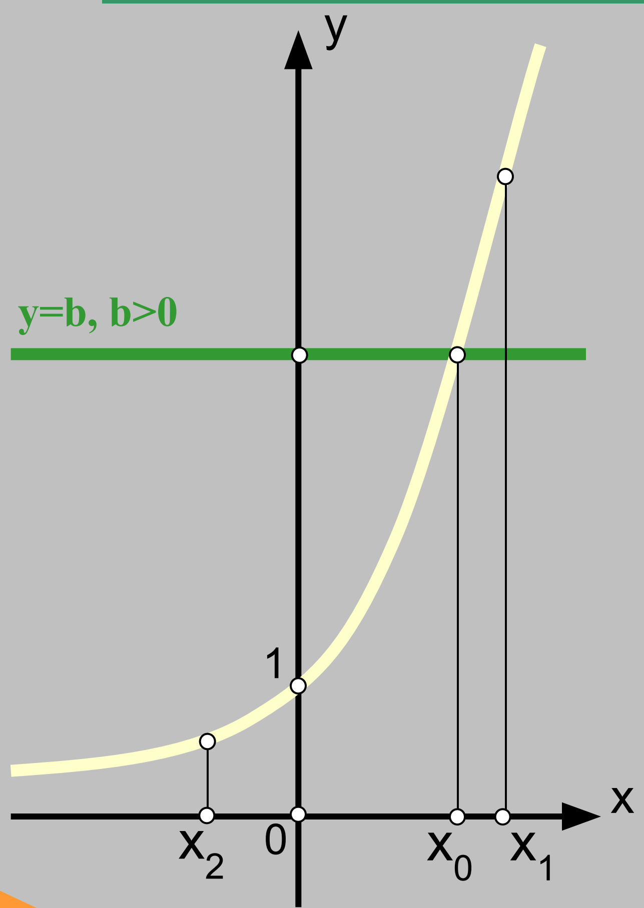
ВЫВОД №1:

При **b ≤ 0** прямая **y=b** не пересекает график функции **$y=a^x$**, т.к. расположена ниже кривой **$y=a^x$**, поэтому неравенства **$a^x > b$ ($a^x \geq b$)** выполняются при **$x \in R$**, а неравенства **$a^x < b$ ($a^x \leq b$)** не имеют решения.

$2^x > -5$ справедливо при любых x	$2^x > 0$ и $-5 < 0$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq -4$ справедливо при любых x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$ и $-4 < 0$
$10^x < -3$ решений нет	$10^x > 0$ и $-3 < 0$
$\left(\frac{1}{7}\right)^x \leq -10$ решений нет	$\left(\frac{1}{7}\right)^x > 0$ и $-10 < 0$

ВЫВОД №2:

При **b > 0** прямая y **= b** пересекает график функции $y = a^x$ в единственной точке, абсцисса которой $x_0 = \log_a b$

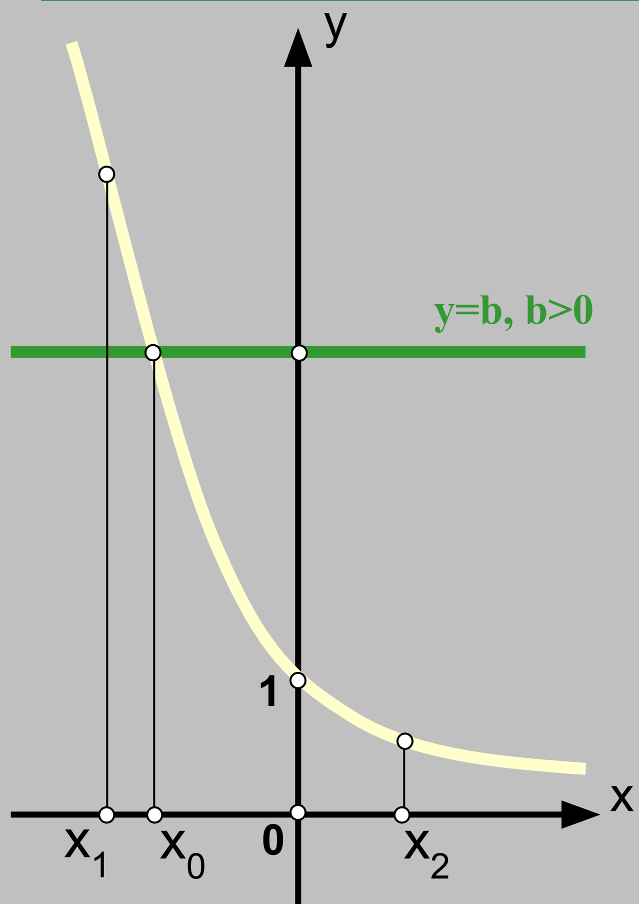


Если **a > 1** и **b > 0**, то для каждого $x_1 > x_0$ соответствующая точка графика функции $y = a^x$ находится выше прямой **y = b**, а для каждого $x_2 < x_0$ - ниже прямой **y = b**.

ВЫВОД №2:

При **b > 0** прямая у **= b** пересекает график функции $y = a^x$ в единственной точке, абсцисса которой $x_0 = \log_a b$

$y = a^x$, $0 < a < 1$ и $b > 0$



Если **a > 1 и b > 0**, то для каждого $x_1 < x_0$ соответствующая точка графика функции $y = a^x$ находится выше прямой **y = b**, а для каждого $x_2 > x_0$ - ниже прямой **y = b**.

Простейшие показательные неравенства

$a > 1$		$0 < a < 1$	
$a^x > b$	$a^x < b$	$a^x > b$	$a^x < b$
$a^x > a^{\log_a b}$	$a^x < a^{\log_a b}$	$a^x > a^{\log_a b}$	$a^x < a^{\log_a b}$
$x > \log_a b$	$x < \log_a b$	$x < \log_a b$	$x > \log_a b$

Пример №1.1

$$2^x < 8$$

Решение:

$$2^x < 8,$$

$$2^x < 2^3, \quad y = 2^t \left(2 > 1\right)$$ **возрастает на всей области определения,**

$$x < 3.$$

Ответ:

$$\left(-\infty;3\right)$$

Пример №1.2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 27$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 27,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^{t} \left(0 < \frac{1}{3} < 1\right)$$ **убывает на всей области определения,**

$$x < -3.$$

Ответ: $(-\infty; -3)$

Пример №1.3

$$3^x > 5$$

Решение:

$$3^x > 5,$$

$$3^x > 3^{\log_3 5}, \quad y = 3^t\left(3 > 1\right)$$ возрастает на всей области определения,

$$x > \log_3 5.$$

Ответ:

$$\left(\log_3 5; \infty\right)$$

Пример №1.4

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < 7$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < 7,$$

$$4^{-x} < 4^{\log_4 7}, \qquad y = 4^t \left(4 > 1\right)$$ возрастает на всей области определения,

$$-x < \log_4 7,$$

$$x > -\log_4 7.$$

Ответ: $\left(-\log_4 7; \infty\right)$

1) Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим

Пример №1

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4$$

Решение:

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4,$$

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 2^2, \; y = 2^t \left(2 > 1\right)$$

возрастает на всей области определения

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 2,$$

$$\frac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0,$$

$$\frac{x-5}{x-2} \leq 0,$$

$$2 < x \leq 5.$$

Ответ: $\left(2;5\right]$

1) Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим

Пример №2

$$-4 \le 3^{x^2-2x-1} - 5 \le 4$$

Решение:

$$-4 \le 3^{x^2-2x-1} - 5 \le 4,$$

$$1 \le 3^{x^2-2x-1} \le 9,$$

$$\begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \ge 1, \\ 3^{x^2-2x-1} \le 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \ge 3^0, \\ 3^{x^2-2x-1} \le 3^2; \end{cases} \quad y = 3^t\,(3>1)$$

возрастает на всей области определения

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 \ge 0, \\ x^2 - 2x - 1 \le 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 1-\sqrt{2}, \\ x \ge 1+\sqrt{2}; \end{array}\right. \\ -1 \le x \le 3, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ x \le 1-\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ x \ge 1+\sqrt{2}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le 1-\sqrt{2}, \\ 1+\sqrt{2} \le x \le 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[-1;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};3\right]$

2) Показательные неравенства, сводящиеся к квадратным неравенствам

Решение:

Пример

$$2^{2x} + 2 > 3 \cdot 2^x$$

$$2^{2x} + 2 > 3 \cdot 2^x,$$

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 > 0.$$

Пусть $2^x = t, t > 0$, тогда

$$\begin{cases} t^2 - 3t + 2 > 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t < 1, \\ t > 2, \end{array}\right. \\ t > 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > 0, \\ t < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} t > 0, \\ t > 2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 < t < 1, \\ t > 2. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной x

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 2^x < 1, \\ 2^x > 2; \end{array}\right. \quad 2^x > 0 \quad \text{при } x \in R \quad \left[\begin{array}{l} 2^x < 1, \\ 2^x > 2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2^x < 2^0, \\ 2^x > 2; \end{array}\right.$$

функция $y = 2^t \, (2 > 1)$ возрастает при всех x из области определения

$$\left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 1. \end{array}\right.$$

Ответ:

$$(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$$

3) Однородные показательные неравенства первой и второй степени. Однородные показательные неравенства первой степени

Пример №1

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>5$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+1\right)>5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\frac{5}{4}>5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>4,$$

$(2)^{2-x}>2^{2},\quad y=2^{t}\left(2>1\right)$ возрастает на всей области определения

$$2-x>2,$$

$$x<0.$$

Ответ:

$$\left(-\infty;0\right)$$

3) Однородные показательные
тва первой и второй степени. Однородные показательные неравенства первой степени

Пример №2

$$3^{x+2}+7^{x}<4\cdot 7^{x-1}+34\cdot 3^{x-1}$$

Решение:

$$3^{x+2}+7^{x}<4\cdot 7^{x-1}+34\cdot 3^{x-1},$$

$$3^{x+2}-34\cdot 3^{x-1}<4\cdot 7^{x-1}-7^{x},$$

$$3^{x-1}\left(3^{3}-34\right)<7^{x-1}\left(4-7\right),$$

$$3^{x-1}\left(-7\right)<7^{x-1}\left(-3\right),$$

$$3^{x-2}>7^{x-2},\ 7^{x-2}>0,\ \text{при } x\in R$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-2}>1,$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-2}>\left(\frac{3}{7}\right)^{0},\quad y=\left(\frac{3}{7}\right)^{t}\left(0<\frac{3}{7}<1\right),$$

убывает на всей
области определения

$$x-2<0.$$

$$x<2.$$

Ответ: $\left(-\infty;2\right)$

3) Однородные показательные неравенства первой и второй степени. Однородные показательные неравенства второй степени

Решение:

Пример №3

$$3\cdot 4^x+2\cdot 9^x-5\cdot 6^x<0$$

$$3\cdot 4^x+2\cdot 9^x-5\cdot 6^x<0,$$

$$3\cdot 2^{2x}-5\cdot(2\cdot 3)^x+2\cdot 3^{2x}<0,$$

$$3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 3^{2x}<0,\ 3^{2x}>0,\ \text{при}\ x\in R$$

$$3\frac{2^{2x}}{3^{2x}}-5\frac{2^x3^x}{3^{2x}}+2\frac{3^{2x}}{3^{2x}}<0,$$

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\left(\frac{2}{3}\right)^x+2<0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t, t>0,$ тогда

$$\begin{cases}3t^2-5t+2<0,\\ t>0;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{2}{3}<t<1,\\ t>0;\end{cases}\quad \frac{2}{3}<t<1.$$

Вернёмся к переменной x

$$\frac{2}{3}<\left(\frac{2}{3}\right)^x<1,\quad \frac{2}{3}<\left(\frac{2}{3}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^0,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(0<\frac{2}{3}<1\right)$$ **убывает на всей области определения**

$$0<x<1.$$

Ответ: $(0;1)$

4) Показательные неравенства, сводящиеся к рациональным неравенствам

Решение:

Пример

$$2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$$

$$2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0,$$

$$2^x + \frac{2}{2^x} - 3 < 0,$$

Пусть $2^x = t, t > 0,$ **тогда**

$$\begin{cases} t + \dfrac{2}{t} - 3 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t} < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 3t + 2 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < t < 2, \\ t > 0; \end{cases}$$

$$1 < t < 2.$$

Вернёмся к переменной x

$$1 < 2^x < 2,$$

$$y = 2^r \left(2 > 1\right)$$

возрастает на всей области определения

$$0 < x < 1.$$

Ответ:

$$\left(0;1\right)$$

5) Показательные нестандартные неравенства

Решение:

Пример

$$\left(x^2-4x+4\right)^{x-1,5}\geq 1$$

$$\left(x^2-4x+4\right)^{x-1,5}\geq 1,$$
$$\left(\left(x-2\right)^2\right)^{x-1,5}\geq 1,$$
$$\left|x-2\right|^{2x-3}\geq 1.$$

Неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\left|x-2\right|^{2x-3}>1,\\ \left|x-2\right|^{2x-3}=1.\end{array}\right.$

Решим каждое утверждение совокупности отдельно.

$$\left|x-2\right|^{2x-3}>1,$$
$$\left|x-2\right|^{2x-3}>\left|x-2\right|^{0}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<\left|x-2\right|<1,\\ 2x-3<0;\end{cases}\\ \begin{cases}\left|x-2\right|>1,\\ 2x-3>0;\end{cases}\end{array}\right.\quad
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|x-2\right|>0,\\ \left|x-2\right|<1,\\ 2x-3<0;\end{cases}\\ \begin{cases}\left|x-2\right|>1,\\ 2x-3>0;\end{cases}\end{array}\right.\quad
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\neq 2,\\ -1<x-2<1,\\ 2x<3;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-1>1,\\ x-2<-1,\end{array}\right.\\ 2x>3;\end{cases}\end{array}\right.\quad
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\neq 2,\\ 1<x<3,\\ x<1,5;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<1,\end{array}\right.\\ x<1,5;\end{cases}\end{array}\right.\quad
\left[\begin{array}{l}1<x<1,5,\\ x>3.\end{array}\right.$$

5) Показательные нестандартные неравенства

Решение:

Пример

$$\left(x^2-4x+4\right)^{x-1,5}\ge 1$$

$$|x-2|^{2x-3}=1.$$

1.

$$\left[\begin{array}{l} x-2=-1,\\ x-2=0,\\ x-2=1;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1,\\ x=2,\\ x=3.\end{array}\right.$$

2.

$$2x-3=0,$$
$$2x=3,$$
$$x=1,5.$$

Проверка

$x=1$

$$|1-2|^{2-3}=1,$$
$$|-1|^{-1}=1,$$
$$1=1.(\text{верно})$$

$x=2$

$$|2-2|^{2\cdot 2-3}=1,$$
$$0^1=1,$$
$$0=1.(\text{неверно})$$

$x=3$

$$|3-2|^{3\cdot 2-3}=1,$$
$$1^3=1,$$
$$1=1.(\text{верно})$$

$x=1,5$

$$|1,5-2|^{2\cdot 1,5-3}=1,$$
$$|-0,5|^0=1,$$
$$1=1.(\text{верно})$$

Проверка показала, что x=1, x=3, x=1,5 являются решениями уравнения, а x=2 не является решением уравнения.

Итак,

$$\left[\begin{array}{l} 1<x<1,5,\\ x>3,\\ x=1, x=3, x=1,5;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 1\le x\le 1,5,\\ x\ge 3.\end{array}\right.$$

Ответ:

$$[1;1,5]\cup[3;\infty).$$