

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
И  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

# Лекция 4

# Операции над событиями

Пусть дано вероятностное  
пространство

$$\langle \Omega, \mathcal{S}, p \rangle$$



# СУММА СОБЫТИЙ

*Суммой  $A+B$  двух событий  $A$  и  $B$*

называют *событие*, состоящее в появлении события **A**, **или** события **B**, **или** **обоих** этих событий.

**Суммой нескольких событий** называют событие, которое состоит в появлении **хотя бы одного** из этих событий.

Например, событие  $A + B + C$  состоит в появлении одного из событий:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A$  и  $B$ ,  $A$  и  $C$ ,  $B$  и  $C$ ,  $A$  и  $B$  и  $C$ .

# Теорема сложения

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

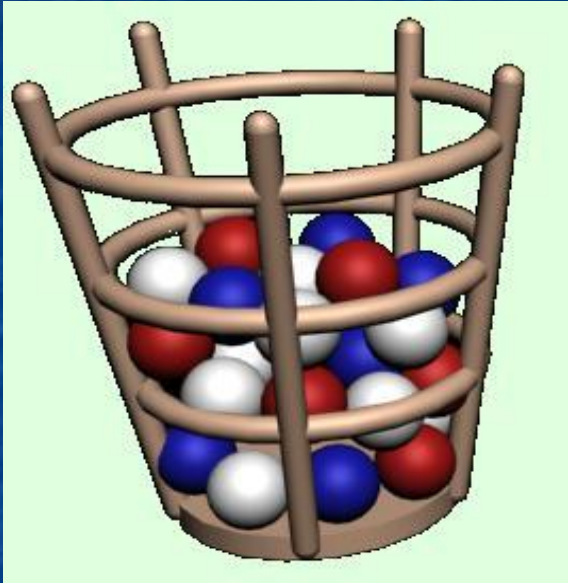


***Следствие.*** Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) \dots + P(A_n)$$



# Пример



В урне 30 шаров:  
10 красных, 5  
синих и 15 белых.  
Найти  
вероятность  
появления

**Решение.** Появление <sup>цветного шара</sup> цветного шара означает появление либо красного либо синего шара.

Вероятность появления  
**красного шара** (событие  
A)

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Вероятность появления  
**синего шара** (событие B)

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

**События  $A$  и  $B$  несовместны.**

**Искомая вероятность :**

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$



# Полная группа событий

## Теорема.

Сумма вероятностей событий

$A_1, A_2, \dots, A_n$ , образующих полную группу несовместных событий, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$



## Пример

Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Вероятность получения пакета из города  $A$  равна  $0,7$ , из города  $B$  —  $0,2$ .

Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города  $C$ .

# Решение

События «пакет получен из города **A**», «пакет получен из города **B**», «пакет получен из города **C**» образуют *полную группу*, поэтому :

$$0,7 + 0,2 + p = 1.$$

Отсюда искомая вероятность

$$p = 1 - 0,9 = 0,1.$$

**Следствие.** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Следовательно,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



**Пример.** В ящике имеется  $n$  деталей, из которых  $m$  стандартных. Найти вероятность того, что среди  $k$  наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

**Решение.** События «среди извлечённых деталей есть хотя бы одна стандартная» и «среди извлечённых деталей нет ни одной стандартной» - противоположные.



Обозначим исходное событие  $A$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}),$$

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

# Обозначения

$$P(A) = p \Rightarrow P(\bar{A}) = q$$

$$p + q = 1$$

Вероятность появления хотя бы одного события в  $n$  испытаниях

Пусть в  $n$  независимых испытаниях события  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , появляются с вероятностями

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

## **Теорема.**

**Вероятность появления хотя бы одного из событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , независимых в совокупности равна**

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$$



# Пример

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания у первого стрелка  $p_1=0,6$ ; у второго стрелка  $p_2=0,7$ . Какова вероятность, что хотя бы один из стрелков попал в цель?

# Решение

- Зная вероятности попадания стрелков  $p_1=0,6$  и  $p_2=0,7$ , найдем вероятности промаха для каждого стрелка

$$\bar{p}_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$\bar{p}_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3$$

- Тогда вероятность, что хотя бы один из стрелков попадет

$$P(A) = 1 - \bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = 1 - 0,4 \cdot 0,3 = 0,88$$



# Произведение событий

Произведением (совмещением) двух событий  $A$  и  $B$  называют событие  $AB$ , состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.

# Пример

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания у первого стрелка  $p_1=0,6$ ; у второго стрелка  $p_2=0,7$ . Какова вероятность, что оба стрелка попадут в мишень?

# Решение

- Так как вероятность совместного попадания стрелков в цель равна произведению вероятностей попадания каждого из стрелков, имеем

$$P(A) = p_1 \cdot p_2 = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$$



**Произведением нескольких событий**  
**называют событие, состоящее в**  
**совместном появлении всех этих**  
**событий.**

# Пример

Четыре монеты подбрасывают одновременно. Найти вероятность, что 4 раза выпадет герб.

# Решение

- Вероятность выпадения герба на одной монете  $p=1/2$  (так как благоприятный исход  $m=1$ ; общее число исходов  $n=2$ )
- Поскольку герб должен выпасть 4 раза, получаем

$$P(A)=1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2=1/16$$

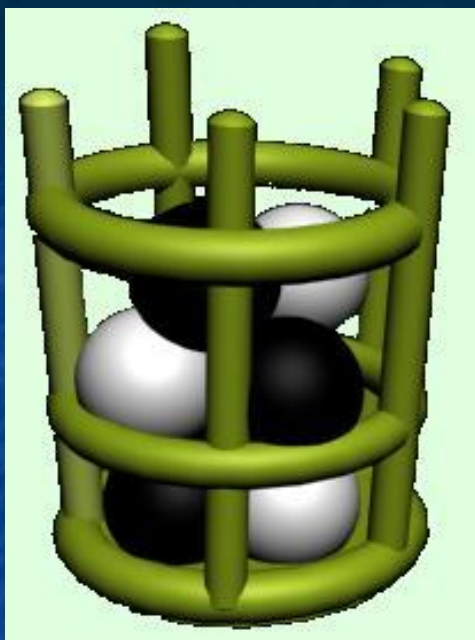


# Условная вероятность

## *Условной вероятностью*

$$P_A(B) \text{ или } P(B/A)$$

**называют вероятность события  $B$ ,  
вычисленную в предположении, что  
событие  $A$  уже наступило.**



Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно.

Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие  $B$ ), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие  $A$ ).



*Решение.* После первого испытания в урне осталось пять шаров, из них три белых. Искомая условная вероятность:

$$P_A(B) = \frac{3}{5}$$

# Условная вероятность

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$(P(A) > 0)$$

# Теорема умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$



# Замечание

$$P(BA) = P(B) \cdot P_B(A),$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A).$$

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

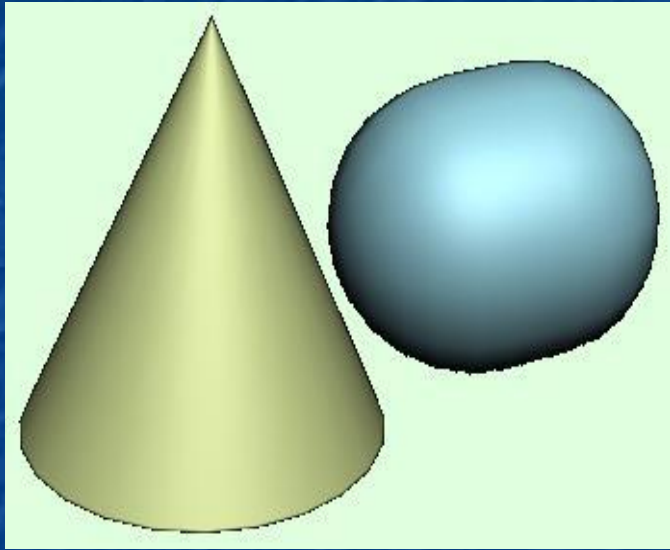
# Следствие

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) =$$

$$= P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$$

$$P(ABC) = P(A) P_A(B) P_{AB}(C)$$

# Пример



У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй.

Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.



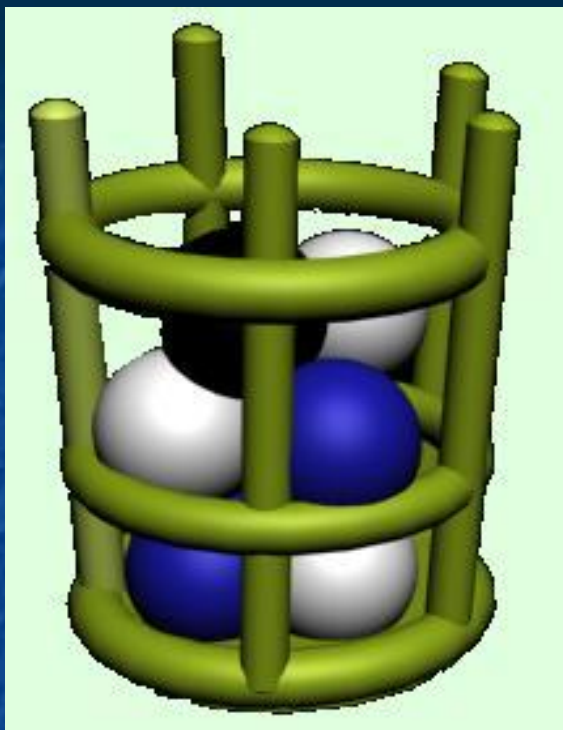
**Решение.** Первый валик- конусный (событие **A**), второй валик- эллиптический (событие **B**).

$$P(A) = \frac{3}{10}, \quad P_A(B) = \frac{7}{9}$$

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

$$P(B) = \frac{7}{10}, P_B(A) = \frac{3}{9},$$

$$P(AB) = P(B)P_B(A) = \frac{7}{30}.$$



**Пример.** В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно.

Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие **A**), при втором – черный (**B**) и при третьем – синий (**C**).



# Решение

$$P(A) = \frac{5}{12}, \quad P_A(B) = \frac{4}{11}, \quad P_{AB}(C) = \frac{3}{10},$$

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

# Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Событие  $B$  называют *независимым* от события  $A$ , если

$$P_A(B) = P(B)$$

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = \\ P(A)P(B) = P(B)P_B(A) \Rightarrow$$

$$P_B(A) = P(A).$$

Если событие **В** **не зависит** от события **А**,  
событие **А** **не зависит** от события **В**.



Для независимых событий **теорема**  
**умножения**

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

**Пример** Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие **A**) равна **0,8**, а вторым (событие **B**) – **0,7**.

**Решение.** События **A** и **B** независимые, поэтому:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

**Замечание.** Если события  $A$  и  $B$  независимы, то независимы также события  $A$  и  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  и  $B$ ,  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ .

$$P(A\bar{B}) = P(A)(1 - P(B)),$$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}).$$



Несколько событий называют **попарно независимыми**, если **каждые два из них независимые.**

**Несколько событий называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.**

*Если несколько событий независимы попарно, то отсюда ещё **не следует** их независимость в совокупности.*



## Следствие из Теоремы Умножения

*Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна :*

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n).$$

# Задачи

# Задача 1



Найти вероятность  
совместного появления  
герба при одном  
бросании двух монет.



**Решение.** Вероятность появления герба первой монеты (событие  $A$ )

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Вероятность появления герба второй монеты (событие  $B$ )

$$P(B) = \frac{1}{2}.$$

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

## Задача 2

Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором – 7 и в третьем – 9 стандартных деталей.

Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали.

Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

**Решение.** Из первого ящика вынута стандартная деталь (событие  $A$ ), из второго -  $B$ ), из третьего –  $C$ .

$$P(A) = \frac{8}{10} = 0,8. \quad P(B) = \frac{7}{10} = 0,7.$$

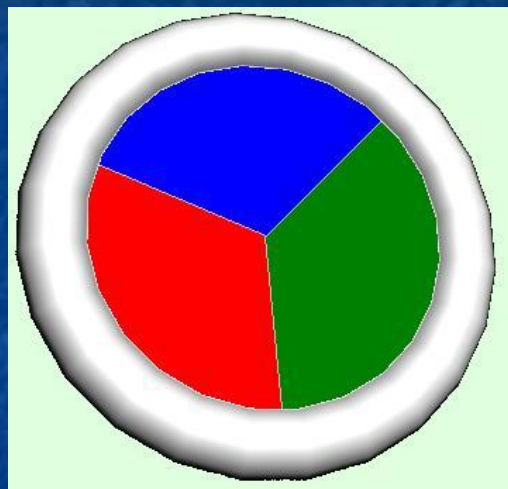
$$P(C) = \frac{9}{10} = 0,9.$$



- События  $A, B, C$  независимые,  
поэтому

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

## Задача 3



Вероятности  
попадания в цель  
при стрельбе из  
трех орудий  
таковы:

$$p_1 = 0,8; p_2 = 0,7; p_3 = 0,9.$$

Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие  $A$ ) при одном залпе из всех орудий.

**Решение.** Рассматриваемые события:

$A_1$  = {попадание первого орудия},

$A_2$  = {попадание второго орудия},

$A_3$  = {попадание третьего орудия}



Вероятности событий,  
противоположных событиям  $A_1, A_2, A_3$   
( т.е. вероятности промахов),  
соответственно равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$q_3 = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994$$

## Задача 4

Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна  $0,4$ . Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее  $0,9$  он попал в цель хотя бы один раз?

# Решение

Приняв во внимание, что, по условию,

$$P(A) \geq 0,9, p = 0,4$$

(следовательно,  $q = 1 - 0,4 = 0,6$ )



получим  $1 - 0,6^n \geq 0,9$ ;  $0,6^n \leq 0,1$

$$n \lg 0,6 \leq \lg 0,1$$

Учитывая  $\lg 0,6 < 0$ , имеем

$$n \geq \frac{\lg 0,1}{\lg 0,6} = \frac{-1}{1,7782} = \frac{-1}{-0,2218} = 4,5.$$

$$n \geq 5$$

## Задача 5

Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трёх независимых в совокупности испытаниях, равна **0,936**.

Найти вероятность появления события в одном испытании .

**Решение.** Применим формулу

$$P(A) = 1 - q^n.$$

$$P(A) = 0,936; \quad n = 3. \quad 0,936 = 1 - q^3,$$

$$q^3 = 1 - 0,936 = 0,064.$$

$$q = \sqrt[3]{0,064} = 0,4.$$

$$p = 1 - q = 1 - 0,4 = 0,6.$$



# Задача 6

Брошены монета и игральная кость.  
Найти вероятность совмещения  
событий: появится герб и появится 6  
очков.

# Решение

- Вероятность появления герба при броске монеты равна  $p_1=1/2$ .
- Вероятность появления 6 очков при броске игральной кости равна  $p_2=1/6$  (всего граней 6, благоприятный исход 1).

- Вероятность совместного появления этих двух событий равна произведению их вероятностей, то есть

$$P(A) = p_1 \cdot p_2 = 1/2 \cdot 1/6 = 1/12$$



# Задача 7

Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в мишень равна  $p=0,9$ . Стрелок сделал три выстрела. Найти вероятность, что все три выстрела дали попадание.

# Решение

- Обозначим события  
A={первый выстрел попал}  
B={второй выстрел попал}  
C={третий выстрел попал}
- События A,B,C независимые.

- Вероятность, что все три выстрела дали попадание  $P(ABC)$  можно найти по формуле умножения для независимых событий

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,729$$



## Задача 8

Вероятность поражения цели первым стрелком  $p_1 = 0,7$ , вторым  $p_2 = 0,6$ . Найти вероятность, что цель будет поражена только одним стрелком.

# Решение

- Поражение цели только одним стрелком означает, что первый попал **и** второй не попал **или** первый не попал **и** второй попал.
- Переведем эту фразу на язык вероятностей:

$$p_1 = 0,7 \Rightarrow \bar{p}_1 = 0,3$$

$$p_2 = 0,6 \Rightarrow \bar{p}_2 = 0,4$$

$$P(A) = p_1 \bar{p}_2 + \bar{p}_1 p_2$$

Подставив значения, имеем

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,44$$



## Задача 9

Среди 100 лотерейных билетов 5 выигрышных. Найдите вероятность того, что 2 наудачу купленных билета будут выигрышными.

# Решение

- Обозначим события  
 $A = \{\text{первый билет выигрышный}\}$   
 $B = \{\text{второй билет выигрышный}\}$
- Вероятность события  $P(A) = 5/100$
- Вероятность события  $B$ , при условии, что первый купленный билет выигрышный равна  $4/99$

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

- Подставим найденные значения в формулу

$$P(AB) = 5/100 \cdot 4/99 = 1/495$$



# Вопросы к лекции 4

- Теорема сложения вероятностей
- Вероятность появления хотя бы одного события в  $n$  испытаниях
- Вероятность совместного появления независимых событий
- Условная вероятность
- Теорема умножения вероятностей

**Конец лекции 4**