

Математика 2

Неопределенный интеграл

Лектор:

доцент отделения математики и информатики

Имас Ольга Николаевна

Раздел 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Опр. 1

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a, b) , называется **первообразной** для $f(x)$, если $\forall x \in (a, b)$ выполняется

$$F'(x) = f(x)$$

ТЕОРЕМА.1 (свойство первообразной)

Если в некотором конечном или бесконечном интервале D функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то $F(x)+C$ ($C - const$) тоже первообразная.

Обратно. Каждая первообразная для $f(x)$ может быть представлена в форме $F(x)+C$.

Опр. 2.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенной на интервале (a, b) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$.

Обозначают: $\int f(x)dx$

x – переменная интегрирования

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

\int – знак интеграла.

Основные свойства неопределенного интеграла

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$2. d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C$$

$$4. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$5. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$6. \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

Таблица интегралов

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$1(a). \int dx = x + C$$

$$1(b). \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$7(a). \int e^x dx = e^x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$8(a). \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arctg} x + C \end{cases}$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$9(a). \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$10. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$12. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$13. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$14. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

$$16. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$17. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$18. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$19. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

Методы интегрирования

1. Табличное интегрирование

2. Метод подведения под знак дифференциала (подстановки)

ТЕОРЕМА 2.

Пусть требуется $\int f(x)dx$ найти где первообразная не табличная

Пусть $x=\phi(t)$, $\phi(t)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию.

Тогда
$$\int f(x)dx = \int f[\phi(t)]\phi'(t)dt$$

Подведение под знак дифференциала

Вспомним определение дифференциала: $d\phi(x)=\phi'(x)dx$

Выразим dx : $dx = \frac{d\phi(x)}{\phi'(x)}$ Тогда
$$\int \frac{f(\phi(x))\cancel{\phi'(x)}dx}{\cancel{\phi'(x)}} = \int f(\phi)d\phi$$

Пример.

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{\sin x d \cos x}{\cos x \cdot (\cos x)'} = \int \frac{\cancel{\sin x} d \cos x}{\cos x \cdot (-\cancel{\sin x})} = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C$$