Математика 2

Неопределенный интеграл

Лектор:
доцент отделения математики и информатики
Имас Ольга Николаевна

Раздел 1. НЕОПРЕДЕЛННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Опр. 1

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a, b), называется *первообразной* для $f(x)$, если $\forall x \in (a, b)$ выполняется

$$F'(x) = f(x)$$

ТЕОРЕМА.1 (свойство первообразной)

Если в некотором конечном или бесконечном интервале D функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то $F(x)+C$ (C – $const$) тоже первообразная.

Обратно. Каждая первообразная для $f(x)$ может быть представлена в форме

$$F(x)+C.$$

Опр. 2.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенной на интервале (a, b) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$.

Обозначают: $\int f(x)dx$

x – переменная интегрирования

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

$\int$ – знак интеграла.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)dx$

3. $\int dF(x) = F(x) + C$

4. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

5. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

6. $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$

Таблица интегралов

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

1(a). $\int dx = x + C$

1(b). $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

7(a). $\int e^x\,dx = e^x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\,\dfrac{x}{a} + C$

8(a). $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} arctg\,x + C \\ -\,arcctg\,x + C \end{cases}$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

9(a). $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

12. $\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C$

13. $\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x + C$

15. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x + C$

16. $\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

17. $\int \mathrm{ctg}\,x\,dx = \ln|\sin x| + C$

18. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$

19. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

Методы интегрирования

1. Табличное интегрирование

2. Метод подведения под знак дифференциала (подстановки)

ТЕОРЕМА 2.

Пусть требуется $\int f(x)dx$ найти где первообразная не табличная

Пусть $x=\phi(t)$, $\phi(t)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию.

Тогда $\int f(x)d\,x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)d\,t$

Подведение под знак дифференциала

Вспомним определение дифференциала: $d\phi(x)= \phi\,'(x)dx$

Выразим dx: $dx = \dfrac{d\,\varphi(x)}{\varphi'(x)}$ Тогда $\int \dfrac{f(\varphi(x))\cancel{\varphi'(x)}\,d\varphi(x)}{\cancel{\varphi'(x)}} = \int f(\varphi)d\varphi$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

Пример.

$$\int \frac{\boxed{\sin x dx}}{\boxed{\cos x}} = \int \frac{\sin x d\cos x}{\cos x \cdot (\cos x)'} = \int \frac{\cancel{\sin x} d\cos x}{\cos x \cdot (-\cancel{\sin x})} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$