Московский инженерно-физический институт (государственный университет) Физико-технический факультет

Лекция 14

Прямой метод решения уравнений в матричной форме. Организация итерационного процесса. Проблема сходимости численных схем. Улучшенные итерационные методы. Внутренние и внешние итерации.

Прямой метод решения уравнений в матричной форме

Рассмотрим уравнение в матричной форме в виде:

$$\hat{A}\hat{\Phi} = \hat{Q}$$

Диагональные компоненты матрицы $\hat{A}$ положительны, в то время как недиагональные члены - отрицательны или равны нулю. Сумма недиагональных элементов в любом данном ряду меньше, чем диагональный элемент. Таким образом, матрица $\hat{A}$ является неприводимой диагонально преобладающей. Следовательно, для матрицы $\hat{A}$ существует обратная матрица $\hat{A}^{-1}$, и решение уравнения можно записать в виде:

$$\hat{\Phi} = \hat{A}^{-1}\hat{Q}$$

Организация итерационного процесса

Запишем матрицу $\vec{A}$ в виде суммы трех матриц:

$$\vec{A} = \vec{D} - \vec{U} - \vec{V}$$

где $\vec{D}$ – диагональная матрица (отличные от нуля элементы находятся только на основной диагонали), $\vec{U}$ – верхняя треугольная матрица (отличные от нуля элементы находятся только выше основной диагонали) и $\vec{V}$ – нижняя треугольная матрица (отличные от нуля элементы находятся ниже основной диагонали).

$$\vec{D}\vec{\Phi} = (\vec{U} + \vec{V})\vec{\Phi} + \vec{Q}$$

Итерационный процесс можно определить следующим образом:

$$\vec{\Phi}^{(i+1)} = \vec{D}^{-1}(\vec{U} + \vec{V})\vec{\Phi}^{(i)} + \vec{D}^{-1}\vec{Q}$$

Проблема сходимости численных схем

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока разность между потоками $\Phi^{(i)}$ и $\Phi^{(i+1)}$ на двух последующих итерациях не будет меньше заданного критерия. В зависимости от физических особенностей решаемой задачи и организованной итерационной схемы может возникнуть проблема сходимости или скорости сходимости итерационного процесса.

Улучшенные итерационные методы

При расчете любой компоненты $\hat{\Phi}^{(i+1)}$ в правой части уравнения будут использоваться только значения потока из последней итерации, т. е. $\hat{\Phi}^{(i)}$. Может оказаться, что после того, как рассчитана новая компонента $\hat{\Phi}^{(i+1)}$, более предпочтительно использовать именно ее, а не $\hat{\Phi}^{(i)}$ для определения последующих компонент $\hat{\Phi}^{(i+1)}$:

$$(\quad - \quad) \quad = \hat{D} \quad \hat{V} + \hat{\Phi} \quad \hat{U} \, \hat{\Phi} \quad \hat{Q}$$

Так как матрица ($\hat{D}$ – $\hat{V}$) треугольная, включая основную диагональ, то можно легко найти обратную ей или решить уравнение относительно $\hat{\Phi}^{(i+1)}$.

Внутренние и внешние итерации

Организация итерационного процесса, включающая внутренние и внешние итерации, основана на идее вычисления компонент $\vec{\Phi}^{(i+1)}$ на базе только вычисленных компонент $\vec{\Phi}^{(i)}$ и $\vec{\Phi}^{(i+1)}$ на внутренних итерациях. На внешних итерациях производится пересчет источника с учетом всех вычисленных $\vec{\Phi}^{(i+1)}$. Часто на внутренних итерациях решается уравнение с фиксированным источником деления, а полученное решение в итерациях по рассеянию используется для пересчета источника деления.