

***Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет)  
Физико-технический факультет***

**Лекция 14**

**Прямой метод решения уравнений в матричной форме.**

**Организация итерационного процесса.**

**Проблема сходимости численных схем.**

**Улучшенные итерационные методы.**

**Внутренние и внешние итерации.**

# Прямой метод решения уравнений в матричной форме

Рассмотрим уравнение в матричной форме в виде:

$$= \overset{\square}{A} \overset{\square}{\Phi} \overset{\square}{Q}$$

Диагональные компоненты матрицы  $\overset{\square}{A}$  положительны, в то время как недиагональные члены - отрицательны или равны нулю. Сумма недиагональных элементов в любом данном ряду меньше, чем диагональный элемент. Таким образом, матрица  $\overset{\square}{A}$  является неприводимой диагонально преобладающей. Следовательно, для матрицы  $\overset{\square}{A}$  существует обратная матрица  $\overset{\square}{A}^{-1}$ , и решение уравнения можно записать в виде:

$$= \overset{\square}{\Phi} \overset{\square}{A}^{-1} \overset{\square}{Q}$$

## Организация итерационного процесса

Запишем матрицу  $\overset{\Delta}{A}$  в виде суммы трех матриц:

$$= \overset{\Delta}{A} - \overset{\Delta}{D} - \overset{\Delta}{U} - \overset{\Delta}{V}$$

где  $\overset{\Delta}{D}$  – диагональная матрица (отличные от нуля элементы находятся только на основной диагонали),  $\overset{\Delta}{U}$  – верхняя треугольная матрица (отличные от нуля элементы находятся только выше основной диагонали) и  $\overset{\Delta}{V}$  – нижняя треугольная матрица (отличные от нуля элементы находятся ниже основной диагонали).

$$= (\overset{\Delta}{D} \overset{\Delta}{\Phi} + \overset{\Delta}{U} \overset{\Delta}{V} \overset{\Delta}{\Phi} \overset{\Delta}{Q})$$

Итерационный процесс можно определить следующим образом:

$$= \overset{\Delta}{\Phi}^{(i+1)} + \overset{\Delta}{D}^{-1} \overset{\Delta}{U} \overset{\Delta}{V} \overset{\Delta}{\Phi}^{(i)} \overset{\Delta}{D}^{-1} \overset{\Delta}{Q}$$

## Проблема сходимости численных схем

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока разность между потоками  $\Phi_{\Delta}^{(i)}$  и  $\Phi_{\Delta}^{(i+1)}$  на двух последующих итерациях не будет меньше заданного критерия. В зависимости от физических особенностей решаемой задачи и организованной итерационной схемы может возникнуть проблема сходимости или скорости сходимости итерационного процесса.

## Улучшенные итерационные методы

При расчете любой компоненты  $\bar{\Phi}^{(i+1)}$  в правой части уравнения будут использоваться только значения потока из последней итерации, т. е.  $\bar{\Phi}^{(i)}$ . Может оказаться, что после того, как рассчитана новая компонента  $\bar{\Phi}^{(i+1)}$ , более предпочтительно использовать именно ее, а не  $\bar{\Phi}^{(i)}$  для определения последующих компонент  $\bar{\Phi}^{(i+1)}$ :

$$(\bar{D} - \bar{V}) \bar{\Phi} = \bar{U} \bar{\Phi} + \bar{Q}$$

Так как матрица  $(\bar{D} - \bar{V})$  треугольная, включая основную диагональ, то можно легко найти обратную ей или решить уравнение относительно  $\bar{\Phi}^{(i+1)}$ .

## Внутренние и внешние итерации

Организация итерационного процесса, включающая внутренние и внешние итерации, основана на идее вычисления компонент  $\Phi^{(i+1)}$  на базе только вычисленных компонент  $\Phi^{(i)}$  и  $\Phi^{(i+1)}$  в внутренних итерациях. На внешних итерациях производится пересчет источника с учетом всех вычисленных  $\Phi^{(i+1)}$ . Часто на внутренних итерациях решается уравнение с фиксированным источником деления, а полученное решение в итерациях по рассеянию используется для пересчета источника деления.