Стереометрия

Метод координат в задачах ЕГЭ

Вспомним основные формулы

Если известны координаты точек А и В: $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$, то

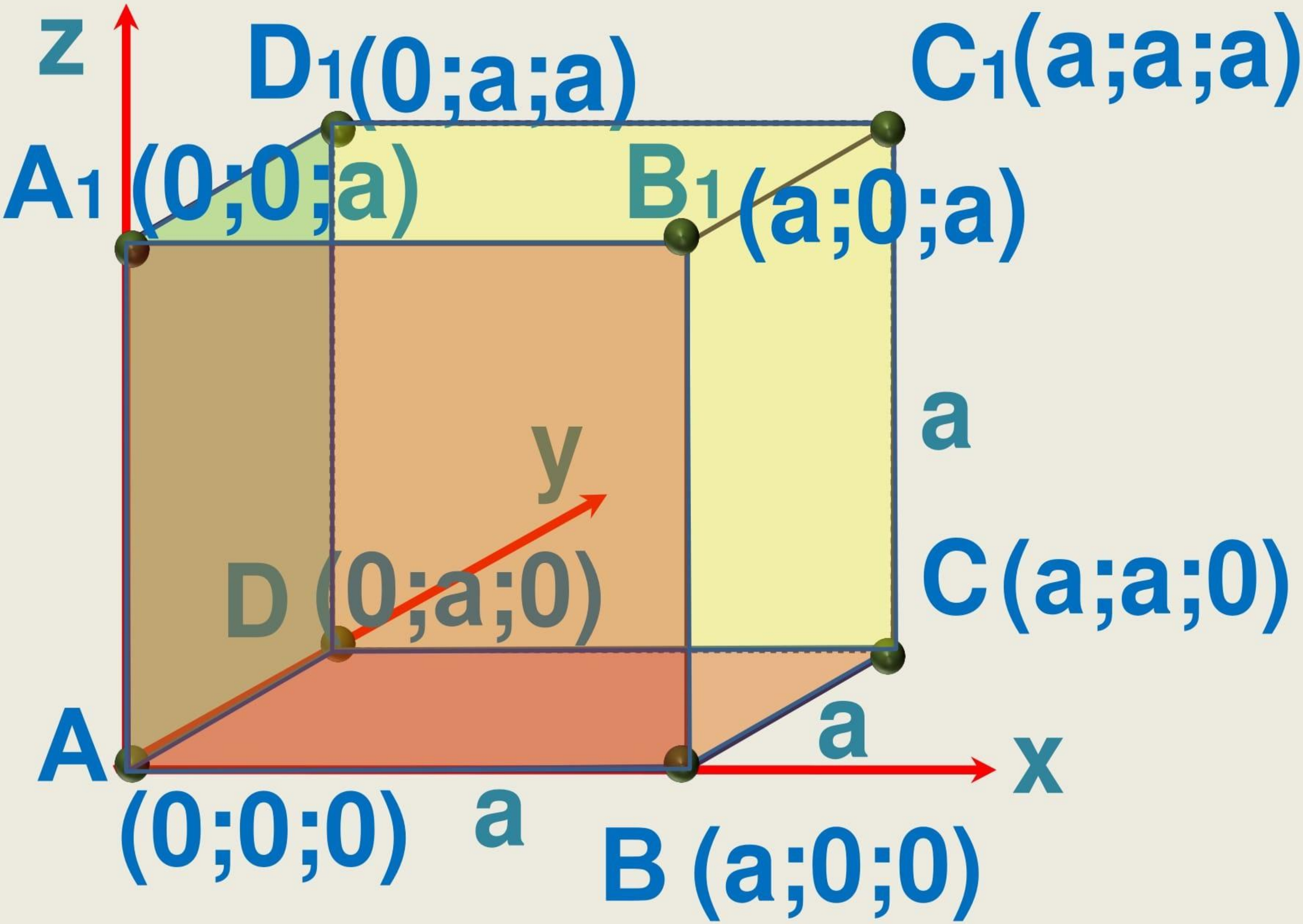
1. Координаты вектора АВ: $\overline{AB}\{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$

2. Длина вектора АВ: $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

3. Координаты середины отрезка АВ: $M(x_M; y_M; z_M)$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

КУБ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ



1. Формулы и методы решения.

1.1. Угол между прямыми. Вектор $\bar{a}\{x_a; y_a; z_a\}$ лежит на прямой а,
Вектор $\bar{в}\{x_в; y_в; z_в\}$ лежит на прямой в.

Косинус угла между прямыми а и в:

$$\cos\varphi = \frac{\left|x_a \cdot x_в + y_a \cdot y_в + z_a \cdot z_в\right|}{\sqrt{x_a^{\,2} + y_a^{\,2} + z_a^{\,2}} \cdot \sqrt{x_в^{\,2} + y_в^{\,2} + z_в^{\,2}}}$$

1.2. Угол между прямой и плоскостью. Прямая а образует с плоскостью α угол $\varphi\left(\varphi \le 90^\circ\right)$. Плоскость α задана уравнением: ax+вy+cz+d=0 и $\bar{n}\{a; в; c\}$ – вектор нормали,
Синус угла определяется по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{\left|x_a \cdot a + y_a \cdot в + z_a \cdot c\right|}{\sqrt{x_a^{\,2} + y_a^{\,2} + z_a^{\,2}} \cdot \sqrt{a^2 + в^2 + c^2}}$$

1.3. Угол между двумя плоскостями. Плоскость α задана уравнением: $a_1x+в_1y+c_1z+d=0$ и ее вектор нормали $n_\alpha\{a_1;в_1;c_1\}$ плоскость β задана уравнением $a_2x+в_2y+c_2z+d=0$ и ее вектор нормали $n_\beta\{a_2;в_2;c_2\}$. Косинус угла φ между плоскостями:

$$\cos\varphi=\frac{|a_1\cdot a_2+в_1\cdot в_2+c_1\cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2+в_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+в_2^2+c_2^2}}$$

1.4. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние h от точки $M(x_M;y_M;z_M)$ до плоскости α, заданной уравнением ax+вy+cz+d=0 определяется по формуле:

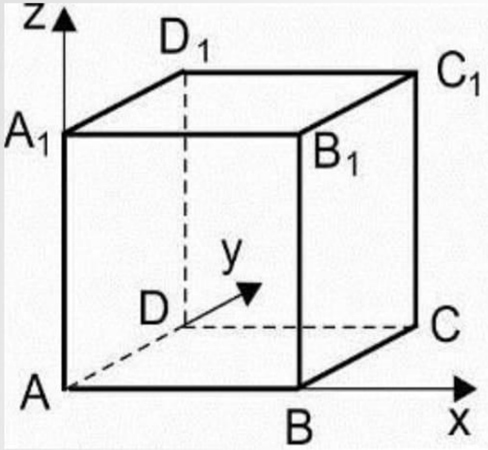
$$h=\frac{|a\cdot x_M+в\cdot y_M+c\cdot z_M+d|}{\sqrt{a^2+в^2+c^2}}$$

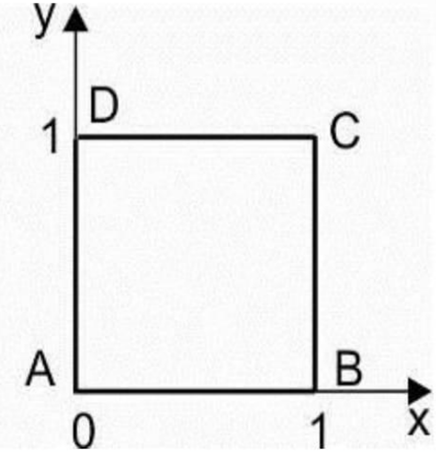
1.5. Если отрезок AB, концами которой служат точки $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_A;z_\mathrm{A}), B(x_B;y_B;z_B)$ разделен точкой $\mathrm{C}(x;y;z)$ в отношении λ, то координаты точки C определяются по формулам:

$$x=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};y=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda};z=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}$$

2. Координаты вершин многогранников

2.1. Координаты вершин единичного куба.





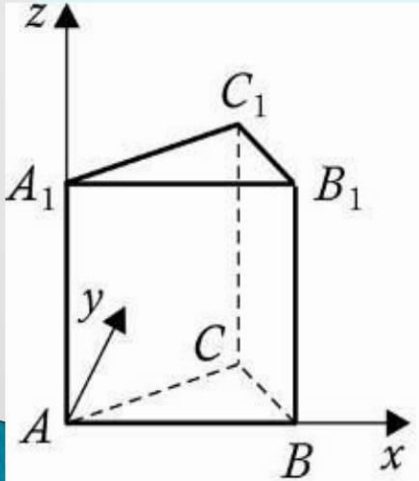
$A(0;0;0)\, A_1(0;0;1)$

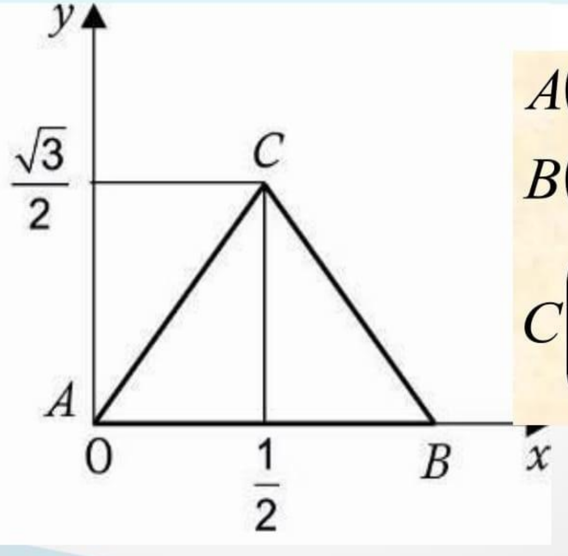
$B(1;0;0),\ B_1(1;0;1)$

$D(0;1;0)\, D_1(0;1;1)$

$C(1;1;0)\, C_1(1;1;1)$

2.2. Координаты вершин правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1.



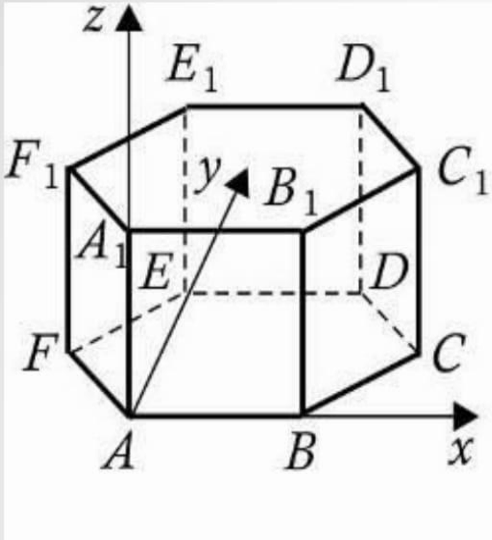


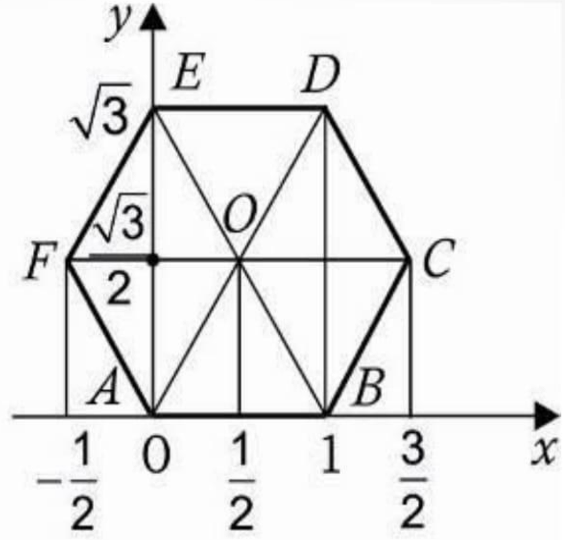
$A(0;0;0)\, A_1(0;0;1)$

$B(1;0;0),\ B_1(1;0;1)$

$C\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right) C_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

2.3. Координаты вершин правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1.

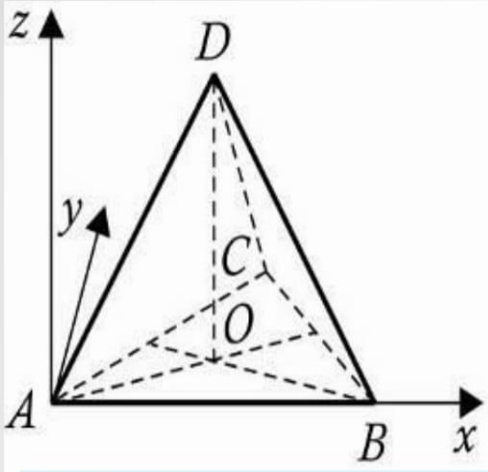


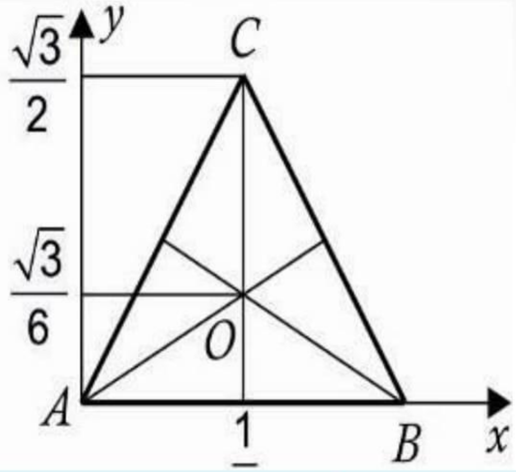


$$A(0;0;0)\,A_1(0;0;1)\,B(1;0;0),\ B_1(1;0;1)\,C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)C_1\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$$

$$D\left(1;\sqrt{3};0\right)D_1\left(1;\sqrt{3};1\right)E\left(0;\sqrt{3};0\right)E_1\left(0;\sqrt{3};1\right)F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)F_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$$

2.4. Координаты вершин правильной треугольной пирамиды (тетраэдра), все ребра которой равны 1



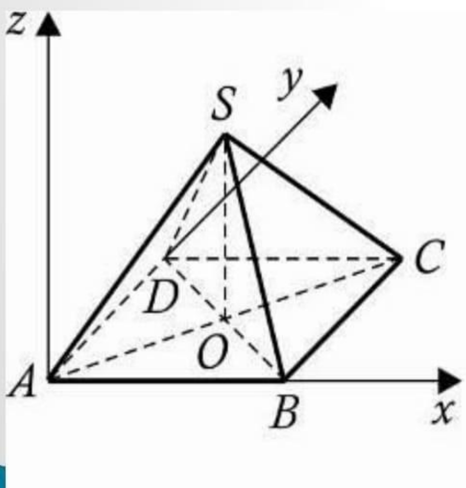


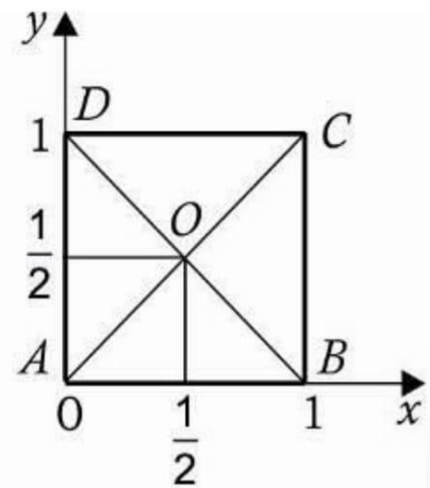
$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$,

$C\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$D\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)$

2.5. Координаты вершин правильной четырехугольной пирамиды , все ребра которой равны 1



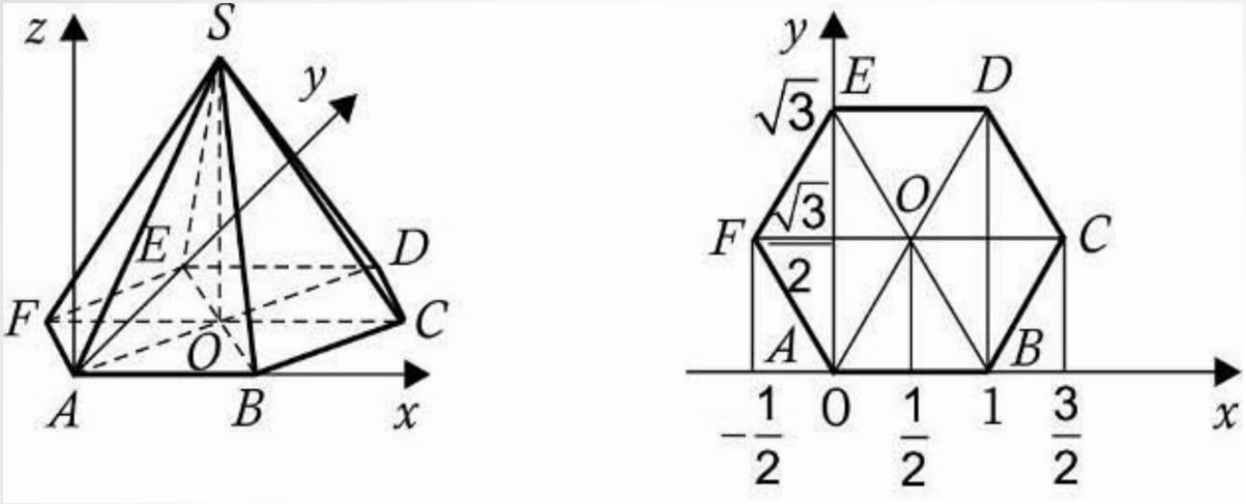


$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$,

$C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$

$S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2.6. Координаты вершин правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2

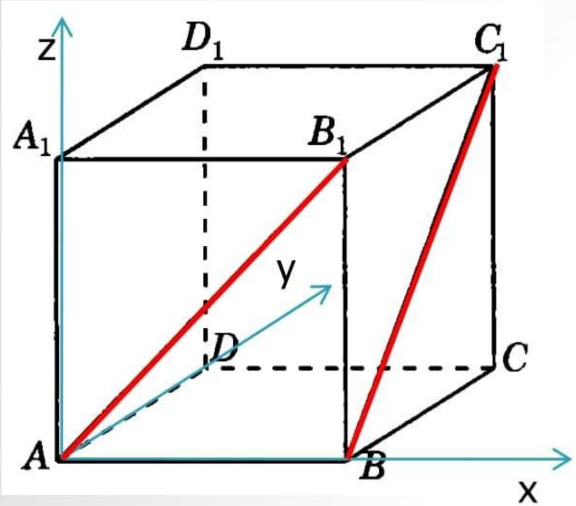


$$A(0;0;0), B(1;0;0), C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), D\left(1;\sqrt{3};0\right),$$

$$E\left(0;\sqrt{3};0\right), F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

3. Примеры решения задач

3.1. В единичном кубе найти угол между прямыми AB_1 и BC_1



Введем систему координат и найдем координаты точек A, B, B_1, C_1

вспомним?

Находим координаты направляющих векторов прямых AB_1 и BC_1 по формуле 1.

вспомним?

$$\overrightarrow{AB_1}\{1;0;1\},\overrightarrow{BC_1}\{0;1;0\}$$

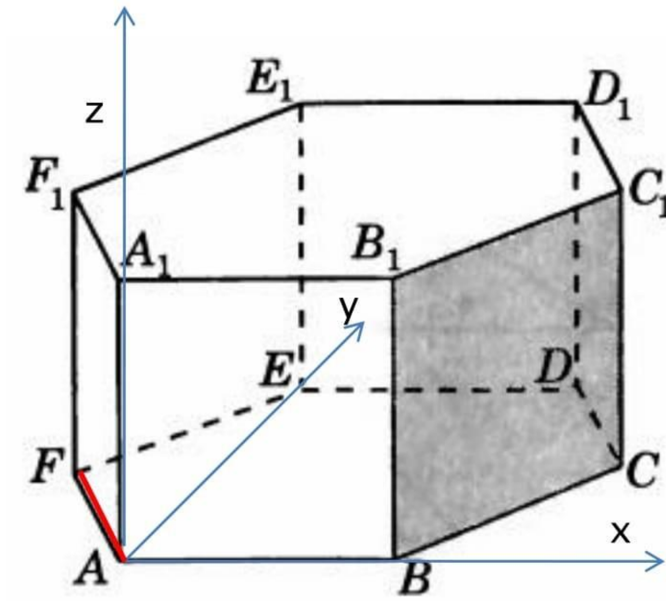
Косинус угла φ между прямыми AB_1 и BC_1 определяется по формуле 1.1:

вспомним?

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{2}, \varphi = 60°$$

$Ответ: 60°$

3.2. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найти угол между прямой AF и плоскостью BCC_1



Введем систему координат и находим координаты нужных точек.

вспомним?

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AF}\left\{-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right\}$

Плоскость BCC_1 совпадает с плоскостью грани BB_1C_1C; зададим ее с помощью точек

$$B(1;0;0),\ B_1(1;0;1),\ C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

Пусть ax+by+cz+d=0 – уравнение плоскости BCC_1

$$B(1;0;0)\in(BCC_1)\Rightarrow a+d=0 \qquad d=-a$$

$$B_1(1;0;1)\in(BCC_1)\Rightarrow a+c+d=0 \qquad c=0$$

$$C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)\in(BCC_1)\Rightarrow a\cdot\frac{3}{2}+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+d=0 \quad\Rightarrow\quad b=-\frac{a}{\sqrt{3}}$$

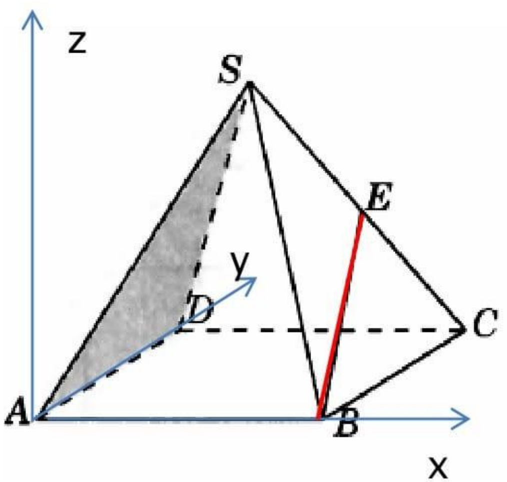
Уравнение плоскости BCC_1 примет вид $ax-\frac{a}{\sqrt{3}}y-a=0 \text{ или } \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$

Вектор нормали : $\bar{n}\{\sqrt{3};-1;0\}$

Синус искомого угла: $$\sin\varphi=\frac{\left|\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot0\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2+0}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+0}}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ Ответ:\varphi=60^\circ$$

вспомним?

3.3. В правильной четырехугольной пирамиде , все ребра которой равны 1, найти синус угла между прямой BE и плоскостью SAD, где E– середина ребра SC



Координаты точки E определим по формуле 3:

вспомним?

$$E\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \text{ и } \overline{BE}\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

Пусть уравнение плоскости ADS ax+by+cz+d=0

Из того, что $A(0;0;0), D(0;1;0)\, S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in (ADS)$

вспомним?

следует, что d=0, b+d=0 и : $a\cdot\frac{1}{2}+b\cdot\frac{1}{2}+c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+d=0$

Отсюда получим, что $a=-\sqrt{2}c, b=0, d=0$ и уравнение плоскости ADS примет вид:

$-\sqrt{2}cx+cz=0$, или $\sqrt{2}x-z=0$. Вектор нормали $\bar{n}\{\sqrt{2};0;-1\}$

Синус угла между прямой BE плоскостью ADS определим по формуле 1.2

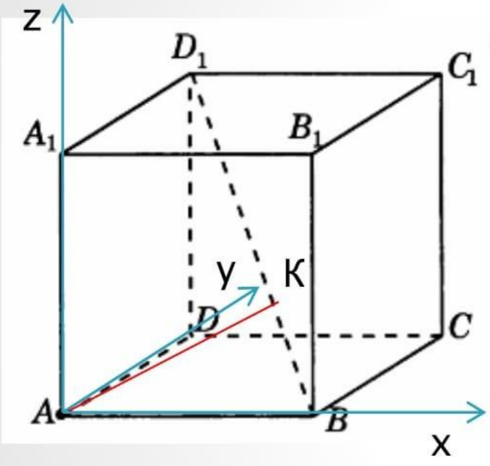
вспомним?

$$\sin\varphi=\frac{\left|\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+0\cdot\frac{3}{4}+(-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ответ : $\frac{\sqrt{2}}{3}$

3.4. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найти расстояние от точки A до прямой BD_1

Находим координаты точек $A(0;0;0)\,B(1;0;0)\,D_1(0;1;1)$, вектора $\overline{BD_1}\{-1;1;1\}$



Искомое расстояние есть длина перпендикуляра AK.
Если отрезок BD разделен точкой K(x;y;z) в отношении λ, то координаты точки K определяются по формуле 1.5:

Вспомним?

$$x=\frac{1+0}{1+\lambda};\,y=\frac{0+\lambda}{1+\lambda};\,z=\frac{0+\lambda}{1+\lambda}\;K\left(\frac{1+0}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda}\right)\overline{AK}\left\{\frac{1+0}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

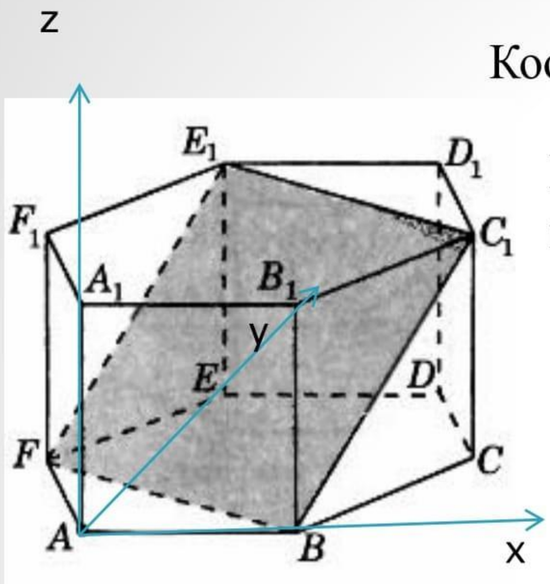
$$\text{т.к. } \overline{AK}\perp\overline{BD_1}\Rightarrow\overline{AK}\cdot\overline{BD_1}=0$$

$$-\frac{1}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}=0\;\;\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow K\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\overline{AK}\left\{\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$$

$$\left|\overline{AK}\right|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\qquad\text{Ответ}:\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Вспомним?

3.5. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найти расстояние от точки А до плоскости BFE_1



Координаты точек $A(0;0;0)\,B(1;0;0)$ и $E_1\left(0;\sqrt{3};1\right), F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

Подставив координаты точек B, F и E_1 в общее уравнение плоскости получим систему уравнений:

$$B \in \left(BFE_1\right) \Rightarrow a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+d=0$$

$$F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right) \in \left(BFE_1\right) \Rightarrow a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+d=0$$

$$E_1\left(0;\sqrt{3};1\right) \in \left(BFE_1\right) \Rightarrow b\cdot\sqrt{3}+c\cdot 1+d=0$$

Откуда $d=-a, c=-2a, b=a\sqrt{3}$

Уравнение плоскости примет вид: $ax+\sqrt{3}ay-2az-a=0$, или $x+\sqrt{3}y-2z-1=0$

Вектор нормали: $\bar{n}\left\{1;\sqrt{3};-2\right\}$

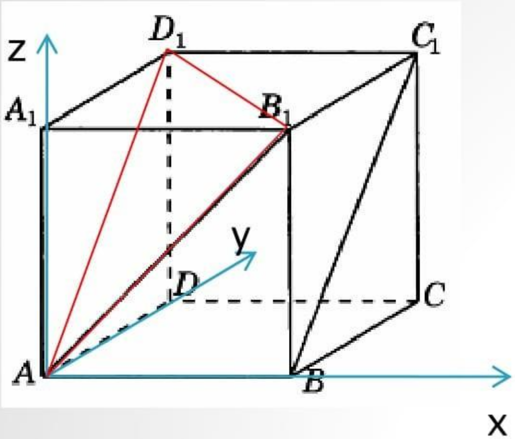
Вычислим расстояние h от точки А до плоскости BFE_1 по формуле 1.4:

$$h=\frac{1\cdot 0+\sqrt{3}\cdot 0+(-2)\cdot 0-1}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

вспомним?

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3.6. В единичном кубе $A...D_1$, найти расстояние между прямыми AB_1 и BC_1



При параллельном переносе на вектор $\overline{BA}$ прямая BC_1 отображается на прямую AD_1. Таким образом, плоскость AB_1D_1 содержит прямую AB_1 и параллельна прямой BC_1. Расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 находим как расстояние от точки B до плоскости AB_1D_1

Пусть ax+by+cz+d=0 – уравнение плоскости AB_1D_1.

Так как $A(0;0;0)\in(AB_1D_1)\Rightarrow d=0$

$B_1(1;0;1)\in(AB_1D_1)\Rightarrow a=-c$

$D_1(0;1;1)\in(A_1B_1D_1)\Rightarrow b=-c$

Уравнение плоскости запишется как –cx-cy+cz=0, или x+y+z=0..

Вектор нормали $\overline{n}\{1;1;-1\}$

Расстояние h от точки $B(1;0;0)$ до плоскости AB_1D_1 находим по формуле 1.4

вспомним?

$$h=\frac{|1\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot 0|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$