GeekBrains

Ряды

Введение в математический анализ

План вебинара

1) Разбор ДЗ.
2) Ряды.

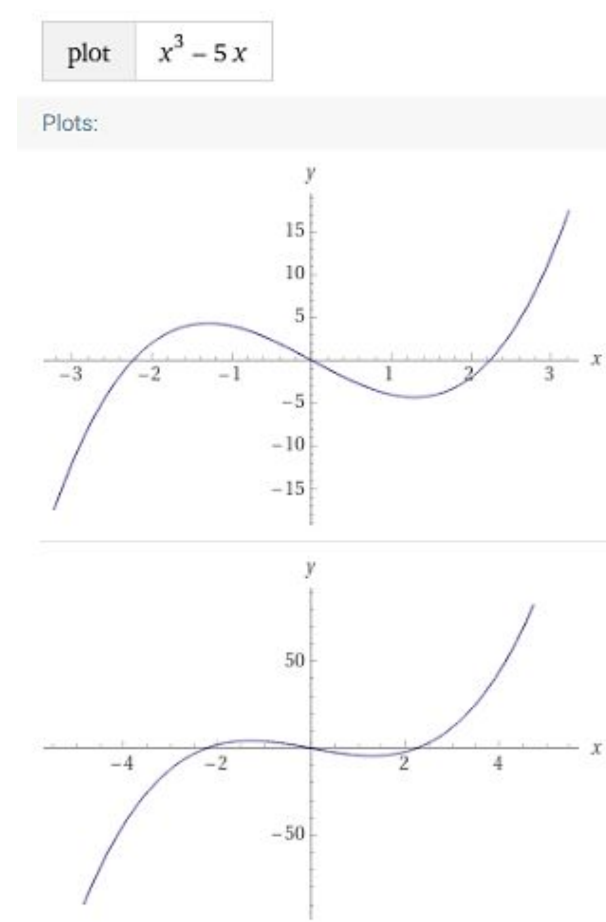
2.1) Сходимость (знакоположительные; знакопеременные ряды).

2.2) Ряды Тейлора и Маклорена.

2.3) Ряд Фурье.

Общие моменты

1) Важны и необходимое, и достаточное условие экстремума.
2) Локальный экстремум не обязательно совпадает с наибольшим или наименьшим значениями функции.



Разбор ДЗ (ФНП). Часть 2.

Исследовать на условный экстремум:

1. $U = 3 - 8x + 6y, \qquad \text{если} \quad x^2 + y^2 = 36$

$$L(\lambda_1, x, y) = 3 - 8x + 6y + \lambda_1 \cdot (x^2 + y^2 - 36)$$

$$\begin{cases} L'_x = -8 + \lambda_1 \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 6 + \lambda_1 \cdot 2y = 0 \\ L'_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{\lambda_1} \\ y = -\dfrac{3}{\lambda_1} \\ \dfrac{16}{\lambda_1^2} + \dfrac{9}{\lambda_1^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{\lambda_1} \\ y = -\dfrac{3}{\lambda_1} \\ \lambda_1^2 = \dfrac{25}{36} \end{cases}$$

$$\left(\frac{5}{6}, \frac{24}{5}, -\frac{18}{5}\right), \qquad \left(-\frac{5}{6}, -\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right)$$

Исследовать на условный экстремум:

$$L'_x = -8 + \lambda_1 \cdot 2x$$
$$L'_y = 6 + \lambda_1 \cdot 2y$$
$$L'_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 36$$

$$L''_{xx} = 2\lambda_1, \qquad L''_{yy} = 2\lambda_1, \qquad L''_{\lambda_1\lambda_1} = 0$$

$$L''_{xy} = 0, \qquad L''_{x\lambda_1} = 2x, \qquad L''_{y\lambda_1} = 2y$$

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1 x} & L''_{\lambda_1 y} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda_1 & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Исследовать на условный экстремум:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda_1 & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda_1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda_1 \end{vmatrix} + 2y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda_1 \\ 2y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2x \cdot (2x \cdot 2\lambda_1 - 0) + 2y \cdot (0 - 2y \cdot 2\lambda_1) =$$

$$= -8x^2\lambda_1 - 8y^2\lambda_1 = -8\lambda_1(x^2 + y^2)$$

$$\left(\frac{5}{6}, \frac{24}{5}, -\frac{18}{5}\right), \qquad \left(-\frac{5}{6}, -\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right)$$

Минимум

Максимум

Иллюстрация задачи на максимум: https://www.wolframalpha.com/input/?i=maximize+3-8x%2B6y+on+x%5E2%2By%5E2%3D36

$$2.\, U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15, \qquad \text{если} \quad x^2 + 16y^2 = 64$$

$$L(\lambda_1, x, y) = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda_1 \cdot (x^2 + 16y^2 - 64)$$

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + \lambda_1 \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 12x + 64y + \lambda_1 \cdot 32y = 0 \\ L'_{\lambda_1} = x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{2x + 6y}{x} \\ \lambda_1 = -\dfrac{3x + 16y}{8y} \\ x^2 + 16y^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{2x + 6y}{x} \\ 16xy + 48y^2 = 3x^2 + 16xy \\ x^2 + 16y^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{2x + 6y}{x} \\ 16y^2 = x^2 \\ x^2 + x^2 = 64 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{7}{2}, 4\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 4\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -4\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\frac{7}{2}, -4\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$$

$$L'_x = 4x + 12y + \lambda_1 \cdot 2x$$
$$L'_y = 12x + 64y + \lambda_1 \cdot 32y$$
$$L'_{\lambda_1} = x^2 + 16y^2 - 64$$

$$L''_{xx} = 4 + 2\lambda_1, \qquad L''_{yy} = 64 + 32\lambda_1, \qquad L''_{\lambda_1\lambda_1} = 0$$

$$L''_{xy} = 12, \qquad L''_{x\lambda_1} = 2x, \qquad L''_{y\lambda_1} = 32y$$

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1 x} & L''_{\lambda_1 y} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4 + 2\lambda_1 & 12 \\ 32y & 12 & 64 + 32\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda_1 & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda_1 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} 2x & 12 \\ 32y & 64+32\lambda_1 \end{vmatrix} + 32y\begin{vmatrix} 2x & 4+2\lambda_1 \\ 32y & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= -2x\cdot(128x + 64x\lambda_1 - 384y) + 32y\cdot(24x - 128y - 64y\lambda_1) =$$

$$= -256x^2 - 128x^2\lambda_1 + 768xy + 768xy - 4096y^2 - 2048y^2\lambda_1 =$$

$$= -256(x^2+16y^2) - 128\lambda_1(x^2+16y^2) + 1536xy =$$

$$= -256\cdot 64 - 128\lambda_1\cdot 64 + 1536xy = -16384 - 8192\lambda_1 + 1536xy$$

$$\left(-\frac{7}{2}, 4\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 4\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -4\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\frac{7}{2}, -4\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$$

Максимум | Минимум | Минимум | Максимум

Графики

- Задача максимизации:

https://www.wolframalpha.com/input/?i=maximize+2x%5E2%2B12xy%2B32y%5E2%2B15+on+x%5E2%2B16y%5E2%3D64

- Задача минимизации:

https://www.wolframalpha.com/input/?i=minimize+2x%5E2%2B12xy%2B32y%5E2%2B15+on+x%5E2%2B16y%5E2%3D64

3. Найти производную функции $U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению вектора $\vec{c}(-9, 8,\ -12)$ в точке $M(8, -12{,}9)$.

$$U'_{\vec{c}} = (\overrightarrow{c_0} \cdot \operatorname{grad} U)$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{(-9)^2 + 8^2 + (-12)^2} = \sqrt{289} = 17$$

$$\overrightarrow{c_0} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(-\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17}\right)$$

$$U'_x = 2x$$

$$U'_y = 2y$$

$$U'_z = 2z$$

$$\operatorname{grad} U = (2x, 2y, 2z)$$

$$\operatorname{grad} U\Big|_M = (16, -24, 18)$$

$$U'_{\vec{\mathrm{c}}} = (\overrightarrow{\mathrm{c}_0} \cdot \operatorname{grad} U)$$

$$\overrightarrow{c_0} = \left(-\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17}\right)$$

$$\operatorname{grad} U\Big|_M = (16, -24, 18)$$

$$U'_{\vec{c}}\Big|_M = -\frac{9}{17} \cdot 16 + \frac{8}{17} \cdot (-24) - \frac{12}{17} \cdot 18 = -\frac{144 + 192 + 216}{17} = -\frac{552}{17}$$

4. Найти производную функции $U = e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\vec{d} = (4, -13, -16)$ в точке $L(-16; 4; -13)$

$$U'_{\vec{d}} = \left(\overrightarrow{d_0} \cdot \operatorname{grad} U\right)$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{4^2 + (-13)^2 + (-16)^2} = \sqrt{441} = 21$$

$$\overrightarrow{d_0} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \left(\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21}\right)$$

$$U'_x = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x$$

$$U'_y = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2y$$

$$U'_z = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2z$$

$$\operatorname{grad} U = \left(e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x, e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2y, e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2z\right)$$

$$\operatorname{grad} U\Big|_L = (-32e^{441}, 8e^{441}, -26e^{441})$$

$$U'_{\vec{d}} = \left(\overrightarrow{d_0} \cdot \operatorname{grad} U\right)$$

$$\overrightarrow{d_0} = \left(\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21}\right)$$

$$\operatorname{grad} U\Big|_L = (-32e^{441}, 8e^{441}, -26e^{441})$$

$$U'_{\vec{d}}\Big|_M = \frac{4}{21} \cdot (-32e^{441}) - \frac{13}{21} \cdot 8e^{441} - \frac{16}{21} \cdot (-26e^{441}) =$$

$$= \frac{-128 - 104 + 416}{21} e^{441} = \frac{184}{21} e^{441}$$

Ряды

Числовой ряд – это бесконечная сумма

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$; краткая запись: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Сходимость ряда

Если ряд сходится, мы можем найти сумму ряда.

Т.е. сумма не растет до бесконечности, а складывается в определенное число.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Зачем нужны ряды

Способ исследовать и аппроксимировать функцию (приблизительно описать).

Числовые ряды

$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \quad -$знакопостоянный

$1 - 1 + 2 - 3 + 5 - \quad -$знакопеременный

$1 - 1 + 2 + 3 + 5 +$

Числовые ряды

$1 + 1 + 2 + 3 + 5 +$ $-$знакопостоянный

Знакочередующийся

$1 - 1 + 2 - 3 + 5 -$ $-$знакопеременный

$1 - 1 + 2 + 3 + 5 +$ $-$знакопеременный

Сходимость рядов. Замечание

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Если необходимое условие выполняется,
то ряд может сходиться и нужны дополнительные исследования
(достаточное условие).
Если необходимое условие не выполняется, то ряд точно не сходится.

Необходимые условия нужны, чтобы отсеять наверняка не сходящиеся ряды.
Но окончательный положительный ответ про сходимость по необходимому условию мы дать не можем.

Эталонные ряды

Гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Расходится.

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

где n – количество чисел в ряду

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – числа ряда

h – среднее гармоническое

Эталонные ряды

Гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Расходится.

$$a_2 = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3}}$$

$$a_2 = \frac{2}{\frac{1}{1/1} + \frac{1}{1/3}} = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$$

Эталонные ряды

Обобщённый гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$

- сходится при k>1
- расходится при k≤1

Доказательство расходимости гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

- $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{16} \ldots$

- $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}$

Доказательство расходимости гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{9} + \cdots\right] + \cdots \\
&> 1 + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{16} + \cdots\right] + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots.
\end{aligned}$$

Сходимость рядов. Знакопостоянные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

1. Первый признак сравнения.
2. Второй признак сравнения.
3. Признак д'Аламбера.
4. Радикальный признак Коши.
5. Интегральный признак Коши.
6. Признак Раабе.
7. Признак Гаусса.
8. Критерий Коши.

Признак=необходимое условие + достаточное условие

Признаки сравнения рядов

Даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – такие, что $0 < a_n \leq b_n$ для всех n. Тогда справедливы следующие признаки:

- Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится;
- Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

2-й признак сравнения (предельный)

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, у которых члены a_n и b_n положительны для всех n. Тогда справедливы следующие предельные признаки:

- Если $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ либо сходятся, либо расходятся;
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \cdots + \frac{1}{1000n+1} +$$

$$\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\cdots+\frac{1}{1000n+1}+$$

Для сравнения возьмём гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{1000n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1000n+1}{n}=1000\Rightarrow \text{ряд расходится}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} +$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+$$

Для сравнения возьмём ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Сходимость рядов. Признак д'Аламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Если q<1 – сходится, q>1 - расходится

Сильный признак, но не всесильный:
q=1 => нужны дополнительные исследования.

Сходимость рядов. Признак д'Аламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Если q<1 – сходится, q>1 - расходится

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} : \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

Сходимость рядов. Признак д’Аламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Если $q<1$ – сходится, $q>1$ - расходится

Самый популярный признак, но при q=1 нужны дополнительные исследования.

Сходимость рядов. Признак д'Аламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Если q<1 – сходится, q>1 - расходится

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} : \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

Ряд сходится

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} +$$

Ряд сходится

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} : \frac{2n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2}$$

Радикальный признак Коши

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

- если $q < 1$, то ряд сходится;
- если $q > 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то радикальный признак Коши не работает.

Радикальный признак Коши. Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$$

Радикальный признак Коши. Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{\frac{n^2+2n+1}{n}}=$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+2+\frac{1}{n}\right)}=\left(\frac{5}{6}\right)^{\infty}=0.$$

0<1 -> ряд сходится

Признак Раабе

Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right)=D$, то:

а) При $D<1$ ряд **расходится**. Причём полученное значение D может быть нулевым или отрицательным

б) При $D>1$ ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при $D=\infty$.

в) При $D=1$ **признак Раабе не даёт ответа**.

Источник: http://mathprofi.ru/slozhnye_ryady.html

Признак Раабе – пример.

$$D = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2 > 1$$

$\Longrightarrow$ ряд сходится по признаку Раабе

Несобственные интегралы. Дополнение.

Дан несобственный интеграл:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} I(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

При этом, если предел в правой части формулы (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

Интегральный признак Коши

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Данный ряд сходится одновременно с несобственным интегралом:

$$\int_1^{+\infty} a_x \, dx$$

То есть, если такой интеграл можно посчитать, и он не равен бесконечности, ряд сходится.

Исследовать ряд с помощью интегрального признака Коши

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

Для этого нужно посчитать интеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$$

Исследовать ряд с помощью интегрального признака Коши

Для этого нужно посчитать интеграл:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$$

$$\boxed{z = \ln(x+1), dz = \frac{1}{x+1}dx}$$

Исследовать ряд с помощью интегрального признака Коши

Для этого нужно посчитать интеграл:

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \ln\ln(x+1) \Big|_{1}^{+\infty}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln\ln(b+1) - \ln\ln(1+1)$$

!замена пределов интегрирования при замене переменной!

```python
from sympy import *
init_printing()
x=Symbol('x')
f=1/(x+1)/ln(x+1)
f
```

$$\frac{1}{(x+1)\log(x+1)}$$

```python
integrate(f,(x, 1, +oo)) #аналитическое решение
```

$$\infty$$

Интеграл расходится, следовательно расходится и ряд.

Давайте исследуем и этот ряд

$$\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$

Для этого найдём интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$$

Для этого найдём интеграл

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = -\frac{1}{\ln(x+1)}\Big|_{1}^{+\infty}$$

$$= -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{\ln(b+1)} + \frac{1}{\ln(1+1)} = \frac{1}{\ln 2}$$

!замена пределов интегрирования при замене переменной!

$$\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$

```
from sympy import *
init_printing()
x=Symbol('x')
f=1/(x+1)/(ln(x+1))**2
f
```

$$\frac{1}{(x+1)\log(x+1)^2}$$

```
integrate(f,(x, 1, +oo))
```

$$\frac{1}{\log(2)}$$

Интеграл сходится, следовательно ряд тоже сходится.

Сходимость рядов: знакочередующиеся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

1. Признак Лейбница.
2. Признак Абеля.
3. Признак Дирихле.

Сходимость рядов. Признак Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $|a_n| \geq |a_{n+1}|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \text{сходится, то} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится абсолютно}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \text{расходится, то} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится условно}$$

Сходимость рядов. Замечание

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \quad -\text{расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \quad -\text{сходится условно}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \quad -\text{сходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \quad -\text{сходится абсолютно}$$

Ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

=

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$=$$

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Говорит: «разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a или разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-a)$», одно и тоже.

Используются для аппроксимации функции многочленами series exp(x)

Extended Keyboard   Upload

Input interpretation:

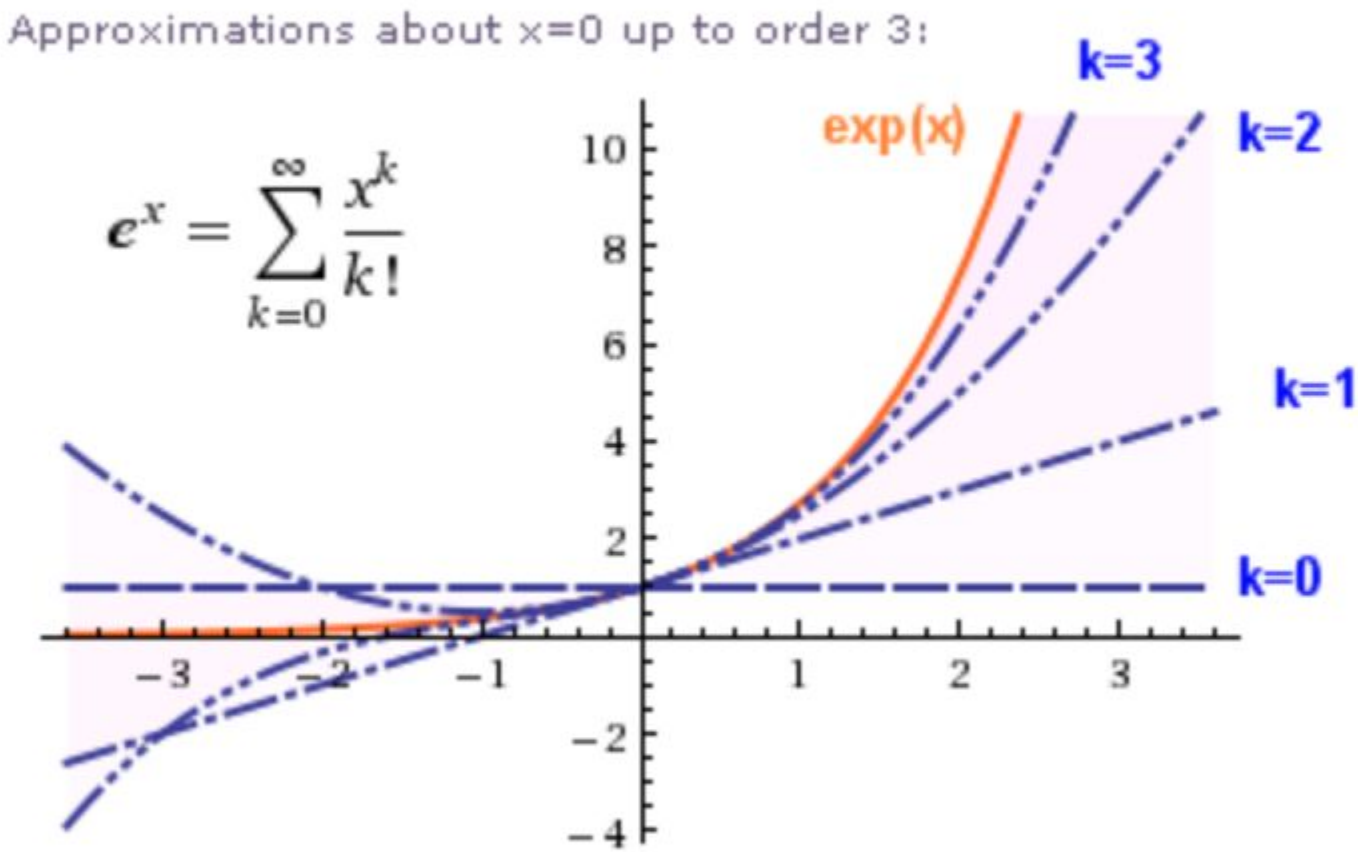
series	$\exp(x)$

Series expansion at x = 0:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)$$

(Taylor series)

(converges everywhere)


Approximations about x=0 up to order 3:
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
exp(x)
k=3
k=2
k=1
k=0
10
8
6
4
2
−2
−4
−3
−2
−1
1
2
3

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Пример. Разложить в окрестности 2:

$$x^2+5x+4=\frac{2^2+5\cdot 2+4}{0!}(x-2)^0+\frac{2\cdot 2+5}{1!}(x-2)^1+$$

$$+\frac{2}{2!}(x-2)^2=18+9(x-2)+(x-2)^2$$

Ряд Маклорена (ряд Тейлора в окрестности точки 0)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\sin x = \frac{\sin 0}{0!} x^0 + \frac{\cos 0}{1!} x^1 - \frac{\sin 0}{2!} x^2 - \frac{\cos 0}{3!} x^3 + \cdots =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ряд Маклорена. Замечание

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots \right) = 1$$

Ряд Фурье

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ \text{на отрезке } [-\pi; \pi]$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Задание

$$f(x) = x^2$$

6. *разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке $x \in [-\pi; \pi]$

7. *построить график функции и ее разложения

Ряд Фурье. Быстрое преобразование Фурье

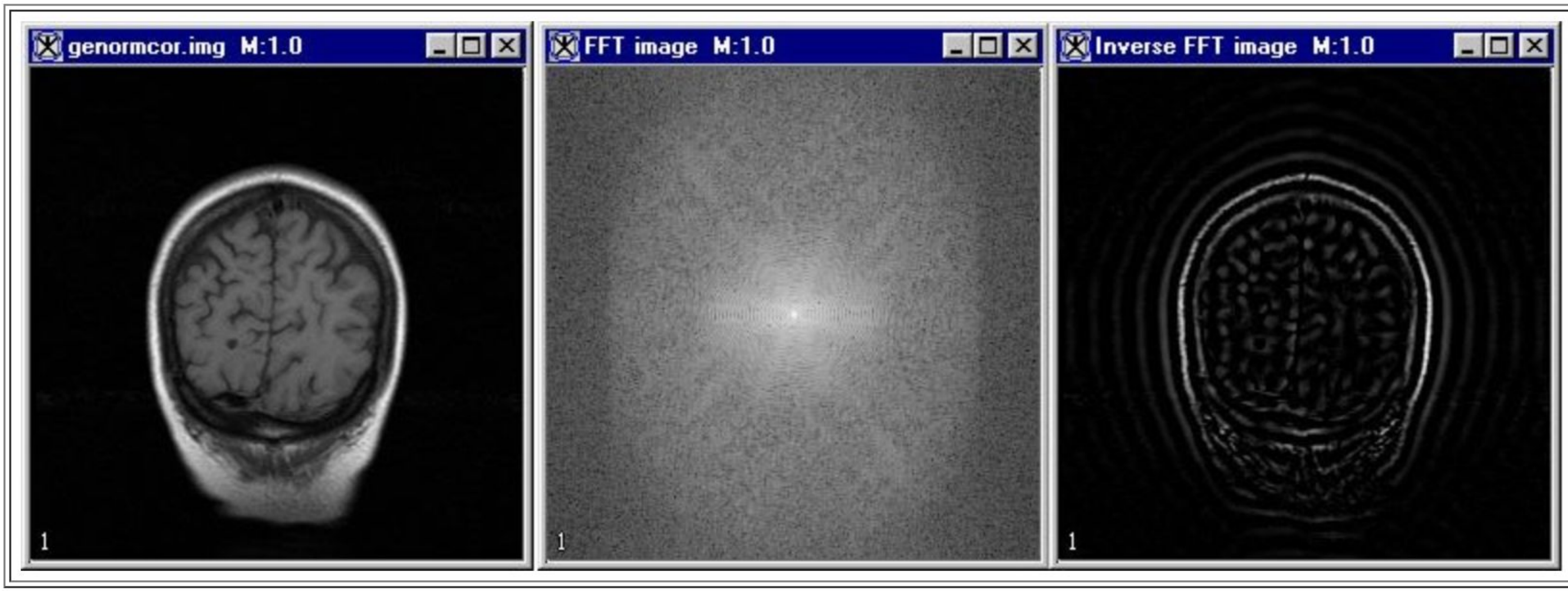
Источник:

- функциональный анализ.

Область применения в программировании:

- аудио форматы .mp3
- форматы изображений .jpeg, progressive JPEG
- видео форматы .mpeg

Figure 1. FFT algorithm processing



https://mipav.cit.nih.gov/pubwiki/index.php/Fast_Fourier_Transformation_(FFT)

Fast Fourier transformation (FFT).

Применяются в аудио формате .mp3.
До этого формата аудио дорожка хранилась в виде массива времени и значения амплитуды звуковой волны.
В формате .mp3 хранятся уже коэффициенты FFT. При этом существо сокращается место на хранение звуковой дорожки. Все современные мультимедийные форматы, особенно работающие в Интернете, как правило, построены на FFT.

Спасибо!
Успехов!